۱. به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ ، برابر ۶ می باشد؟

۱) $-\frac{9}{5}$	۲) ۱	۳) $-\frac{9}{5}, 1$	۴) $-1, \frac{9}{5}$

۲. به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

۱) $a<-4$	۲) $a>-4$	۳) $a<4$	۴) $a>4$

۳. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-3x-1=0$ ، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^2-3x+1=0$	۲) $x^2+3x+1=0$

۳) $x^2-5x+2=0$	۴) $x^2+5x+2=0$

۴. به ازای کدام مقدار a، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ ، دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟

۱) $-2<a<2$	۲) $2<a<5$	۳) $2<a<14$	۴) $5<a<14$

۵. به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=(1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a$، همواره بالای محور xها است؟

۱) $a<1$	۲) $a<-2$	۳) $a>3$	۴) $-2<a<1$

۶. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می‌باشد؟

۱) ۳	۲) ۴	۳) ۵	۴) ۶

۷. به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ می‌باشد؟

۱) ۹	۲) ۱۱	۳) ۱۳	۴) ۱۵

۸. به‌ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

۱) $m<-6$	۲) $m>3$	۳) $0<m<3$	۴) $3<m<6$

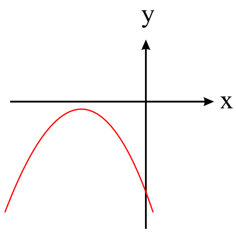
۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+(m-2)x+m+1=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت است؟

۱) $-1<m<0$	۲) $m<0$	۳) $2<m<8$	۴) $m>8$

۱۰. به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $(m-2)x^2-2x+(m-3)=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟

۱) $m<1$	۲) $m>1$	۳) $2<m<5$	۴) $2<m<3$

۱۱. شکل زیر مربوط به سهمی به معادله‌ی $y=ax^{۲}+bx+c$ است، کدام گزینه صحیح است؟



۱) یکی از صفرهای تابع، منفی است.
۲) $c<۰\,,b>۰\,,a<۰$
۳) $c>۰\,,b<۰\,,a>۰$
۴) $bc>۰\,,a<۰$

۱۲. در معادله‌ی $۴x^{۲}-۸x+c=۰$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگتر از ریشه‌ی دیگر است. در معادله‌ی $۲x^{۲}-x+c=۰$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) -۵ ۴) ۵

۱۳. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^{۲}-۱)^{۲}-۴x^{۲}+۷=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ریشه ندارد ۳) $۴+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\sqrt{۲}$

۱۴. اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، خط گذرا از نقاط $A(b,a)$ و $B(a,b)$ همواره بر کدام خط عمود است؟

۱) $y+x=۰$ ۲) $y-۲x=۰$ ۳) $y-x=۰$ ۴) $x-۲y=۰$

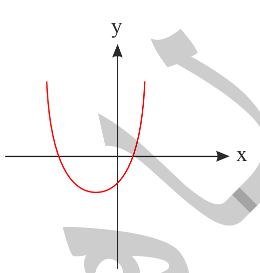
۱۵. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x=a(x-۲)^{۲}$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۶. حاصل‌ضرب جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(x^{۲}+۳)^{۲}-۵x^{۲}-۱۱=۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۴

۱۷. اگر ضابطهٔ سهمی مقابل به‌صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $ab<۰$ ۲) $ac>۰$
۳) $bc<۰$ ۴) $abc>۰$

۱۸. اگر نمودار تابع درجه دوم $y=ax^{۲}+bx+c\ (a\neq ۰)$ فقط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات عبور نکند، علامت a، b و c چگونه اند؟

۱) $a<۰$ ، $b<۰$ و $c\geq ۰$ ۲) $a<۰$ ، $b\geq ۰$ و $c<۰$
۳) $a>۰$ ، $b\leq ۰$ و $c>۰$ ۴) $a<۰$ ، $b<۰$ و $c\leq ۰$

۱۹. به‌ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادلهٔ $۴x^{۲}+kx-۵=۰$ معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۴$ است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۵ ۴) ۵

۲۰. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۲۱x+۸=۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲+\beta^۲+۲\alpha\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) ۴۹ ۳) $\frac{۶۴}{۹}$ ۴) ۷

۲۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۲=۰$ باشند، حاصل $(\alpha+۲)(\beta+۲)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۶

۲۲. اگر α,β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+(c+۲)x+۸=۰$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+bx+c=۰$ به صورت $\sqrt{\alpha\beta}$ و $۲\sqrt{\alpha\beta}$ خواهد بود. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۳. در مورد معادلهٔ $۵x^۲+۱۳x-۷=۰$ کدام گزینه درست است؟

۱) دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت متمایز است.
۲) دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی متمایز است.
۳) دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت است.
۴) فاقد ریشهٔ حقیقی است.

۲۴. اگر α,β ریشه‌های معادلهٔ $-۳x^۲-۴x+۶=۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{۳\alpha-۱,۳\beta-۱\}$ است؟

۱) $x^۲-۲x-۴=۰$
۲) $x^۲-۶x-۱۳=۰$
۳) $x^۲+۶x-۱۳=۰$
۴) $x^۲+۲x-۴=۰$

۲۵. «مستطیل طلایی» مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}+۲}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}-۲}{۲}$

۲۶. سهمی به معادلهٔ $f(x)=-mx^۲+۲x+m-۱$ فقط از ناحیهٔ اول و مبدأ نمی‌گذرد، حدود m کدام است؟

۱) $m>۰$
۲) $m<۰$
۳) $۰<m<۱$
۴) هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود.

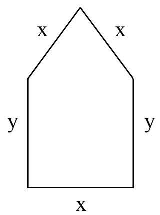
۲۷. معادلهٔ $۴x^۶+۱=۵x^۳$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۸. معادلهٔ درجه دوم $x^۲-(m^۲-۳m+۳)x+m^۳-۳=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. اگر مجموع ریشه‌های این معادله برابر ۱ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۲ ۳) ۶ ۴) -۴

۲۹. می‌خواهیم پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد مستطیل چند متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ ($\frac{\sqrt{3}}{4}$ را ۰٫۵ فرض کنید)

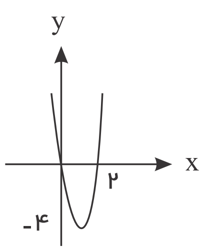


۱) $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$
۲) $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$
۴) $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$

۳۰. کدام معادله، تعداد جواب‌های کمتری نسبت به معادلهٔ بقیهٔ گزینه‌ها دارد؟

۱) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
۲) $x^4 + 8x^2 + 7 = 0$
۳) $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 = 0$
۴) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۳۱. شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. مقدار $f(3)$ کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۰
۳) ۳
۴) ۶

۳۲. اگر در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2 - (4m - 1)x + m^2 + 1 = 0$ رابطهٔ $S = P + 1$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، چند مقدار برای m وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

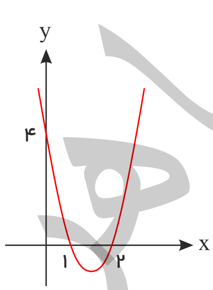
۳۳. اگر رأس سهمی $y = x^2 - mx + m + 1$ بر روی خط $y = x + 1$ واقع باشد، در این صورت مقدار m کدام است؟

۱) ۱ یا ۳
۲) ۱ یا -3
۳) صفر یا ۲
۴) صفر یا -2

۳۴. اگر محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = x^2 - kx + 1$ به صورت $x = -2$ باشد، کمترین مقدار سهمی کدام است؟

۱) -3
۲) -2
۳) ۲
۴) ۳

۳۵. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. مقدار $f(4)$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۳۶. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) ۸
۲) ۲
۳) ۶
۴) ۴

۳۷. اگر محل تلاقی نمودار یک سهمی با محور xها، نقاطی به طول‌های ۱ و ۲ باشد و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند، طول رأس سهمی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۸. اگر $y+3x=12$ ، بیشترین مقدار xy کدام است؟

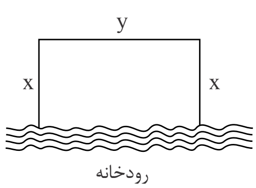
۱) ۱۲ ۲) ۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۳۹. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x-2=0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-58x+16=0$ ۲) $x^2-58x+4=0$

۳) $x^2-29x+16=0$ ۴) $x^2-29x+4=0$

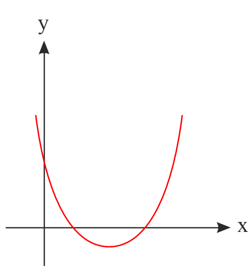
۴۰. قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم مساحت این مستطیل بیشترین مقدار ممکن گردد، مقدار x کدام است؟



۱) ۲۵ ۲) ۳۰

۳) $\frac{100}{3}$ ۴) ۳۵

۴۱. اگر شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=x^2-mx+m+\frac{5}{4}$ باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی m کدام است؟



۱) $m>0$ ۲) $-1<m<0$

۳) $m>5$ ۴) $m>-\frac{5}{4}$

۴۲. اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور xها را در دو نقطه، به طول‌های -1 و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) ۳ ۴) -3

۴۳. اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^2+4x+a-3$، محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز با طول مثبت قطع کند، راس سهمی به ازای کدام مقادیر a، زیر محور xها قرار دارد؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $\varnothing$ ۳) $(-\infty,0)$ ۴) $(-\frac{1}{2},0)$

۴۴. صفرهای تابع $f(x)=x^2-2mx+12$ برابر $\frac{m}{2}$ و $\frac{n}{2}$ است. مقدار $|m-n|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۴

۴۵. اگر x_1 و x_2 $(x_1 < x_2)$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+4m-2=0$ باشند و رابطهٔ $S+P=5$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن x_1+1 و x_2+2 باشد، کدام است؟

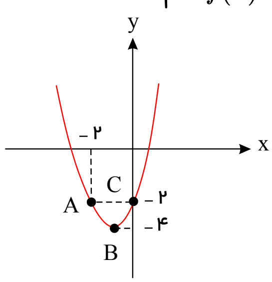
۱) $x^2-4x+3=0$
۲) $x^2-6x+8=0$
۳) $x^2-6x+9=0$
۴) $x^2-7x+12=0$

۴۶. ضابطهٔ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌صورت $f(x)=x^2-6x+8$ است. حاصل‌ضرب صفرهای تابع $y=f(x+3)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -2
۳) -1
۴) $-\frac{1}{2}$

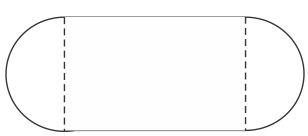
۴۷. نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸



۴۸. استادیومی به‌شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، طول مستطیل چقدر باشد تا مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن شود؟

۱) ۷۵۰
۲) ۳۷۵
۳) $\frac{750}{\pi}$
۴) $\frac{375}{\pi}$


استادیوم

۴۹. اگر مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $x^3+m(x^2+1)+2x=m$ برابر ۱۲ باشد، m کدام است؟

۱) ± 2
۲) $\pm\sqrt{5}$
۳) ± 4
۴) $\pm\sqrt{3}$

۵۰. نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+8$ در بازه‌ی $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) -1
۳) -2
۴) ۲

۵۱. ریشه‌های کدام یک از معادلات زیر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-4x-1=0$ یک واحد بیشتر است؟

۱) $x^2-\frac{5}{2}x-4=0$
۲) $x^2-4x-\frac{5}{2}=0$
۳) $x^2-4x+\frac{5}{2}=0$
۴) $2x^2-8x+10=0$

۵۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-x-1=0$ باشند، حاصل عبارت $\alpha\beta^{-1}+\beta\alpha^{-1}$ کدام است؟

۱) -1
۲) ۱
۳) -3
۴) ۳

۵۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن از ۳ برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^2+x-3=0$ ، یک واحد کمتر باشند، کدام است؟

۱) $x^2-5x+23=0$
۲) $x^2-5x-23=0$
۳) $x^2+5x+23=0$
۴) $x^2+5x-23=0$

۵۴. اگر تابع $f(x)=x^2-4x-1$ در $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -4

۵۵. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2+4x-1=0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2+16x+1=0$ ۲) $x^2-28x+1=0$

۳) $x^2+18x+2=0$ ۴) $x^2-18x+1=0$

۵۶. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن ۳ واحد از معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-1=0$ بیش‌تر باشد، کدام است؟

۱) $x^2-3x-2=0$ ۲) $x^2-2x-3=0$

۳) $x^2+3x-5=0$ ۴) $x^2-5x-2=0$

۵۷. اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(x-2)(x^2+mx+m+3)=0$ برابر ۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۵۸. به ازای چه مقادیری از a، نمودار تابع $f(x)=(a^2-4)x^2+(a^2-9)x+1$ از هر ۴ ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور می کند؟

۱) $(-3,3)$ ۲) $(-2,2)$ ۳) $\mathbb{R}-(-2,2)$ ۴) $\mathbb{R}-[-3,3)$

۵۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=ax^2+2(x+a)-1$ در ربع سوم قرار دارد؟

۱) $-1<a<\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<a<1$ ۳) $0<a<1$ ۴) $a>0$

۶۰. اگر در معادله‌ی $ax^2-bx+c=0$ رابطه‌ی $25a+5b+c=0$ بین ضرایب برقرار باشد، یکی از ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{c}{5a}$ ۲) $-\frac{c}{25a}$ ۳) $-\frac{c}{125a}$ ۴) $-\frac{c}{a}$

۶۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $13x^2-7x-1=0$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $13\alpha^2-8\alpha-1$ و $13\beta^2-8\beta-1$ باشد، کدام است؟

۱) $13x^2+7x-1=0$ ۲) $-x^2-7x+13=0$

۳) $-x^2+7x+13=0$ ۴) $13x^2-7x-2=0$

۶۲. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل $x_1x_2^6+x_2x_1^6$ کدام است؟

۱) ۱۲۹ ۲) ۱۲۷ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۲۳

۶۳. به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-mx+m=0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است؟

۱) $m<4$ ۲) $m<0$ ۳) $0<m<4$ ۴) $\varnothing$

۶۴. به ازای کدام مقدار m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - m - x = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

۱) هیچ مقدار ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۶۵. به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - mx + m - 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

۱) $m > 2$ ۲) R ۳) $\varnothing$ ۴) $m \neq 2$

۶۶. حدود m کدام باشد تا هیچ نقطه‌ای از تابع $y = x^2 - 4x + m$ دارای فاصله‌ی ۵ از محور xها نباشد؟

۱) $m > 9$ ۲) $m < -2$ ۳) $-2 < m < 3$ ۴) $-5 < m < -2$

۶۷. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 7x - 5 = 0$ مجموعات مربعات ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۴۳ ۳) ۵۴ ۴) ۳۹

۶۸. به ازای کدام مقدار m، مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - x - m = 0$ برابر ۴ است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶۹. اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $4a + 2b = -c$ و $9a + 3b + c = 0$ ، مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

۷۰. اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 2ax + 3a + 1 = 0$ ، حاصل ضرب ریشه‌ها از مجموع ریشه‌ها، ۴ واحد کمتر باشد، مجموع مربعات ریشه ها چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۱

۷۱. به ازای کدام مقدار m، مجموع معکوس ریشه‌های متمایز معادله‌ی $x^2 - m^2x + (m+2) = 0$ برابر ۱ است؟

۱) ۱- و ۲ ۲) فقط ۱- ۳) فقط ۲ ۴) هیچ مقدار m

۷۲. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - bx + c = 0$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ هستند. b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۷۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن دو برابر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ است، کدام است؟

۱) $x^2 - 4x + 6 = 0$ ۲) $x^2 - 6x + 4 = 0$

۳) $x^2 + 6x + 4 = 0$ ۴) $x^2 - 6x - 4 = 0$

۷۴. اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 4x - 1 = 0$ نصف ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 + 8x + m - 1 = 0$ باشند، m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

۷۵. اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-7x+c=0$ از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+bx+2=0$ ، به اندازه‌ی یک واحد بیشتر باشند، $b-c$ کدام است؟

۱) ۵-　۲) ۱۵　۳) ۱۵-　۴) ۵

۷۶. اگر α , β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+kx+1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار k، ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ به صورت $(\sqrt{\alpha}\ ,\ \sqrt{\beta})$ است؟

۱) -12　۲) -14　۳) -10　۴) -8

۷۷. اگر α , β جواب های معادله‌ی $x^2-3x-1=0$ بوده و داشته باشیم ، $P=\alpha\beta$ و $S=\alpha+\beta$ به ازای کدام مقدار k جواب های معادله‌ی $25x^2-5kx-1=0$ برابر $\frac{\beta}{3S+4P}$, $\frac{\alpha}{2S+P}$ است؟

۱) ۱-　۲) ۳　۳) ۳-　۴) ۱

۷۸. محور تقارن نمودار تابع $y=(x-1)(x-3)-x$ کدام خط است؟

۱) $x=2$　۲) $x=\frac{5}{2}$　۳) $x=3$　۴) $x=\frac{7}{2}$

۷۹. بیشترین مقدار y در عبارت $y+x^2=3x-2$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$　۲) $\frac{-3}{2}$　۳) $\frac{1}{4}$　۴) $\frac{-1}{4}$

۸۰. اگر $f(2x-1)=4x^2-4x$ باشد. رأس سهمی $y=f(1+2x)$ کدام نقطه است؟

۱) $S(\frac{1}{2}\ ,\ 1)$　۲) $S(-\frac{1}{2}\ ,\ 1)$　۳) $S(\frac{1}{2}\ ,\ -1)$　۴) $S(-\frac{1}{2}\ ,\ -1)$

۸۱. بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+4x+5$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

۱) $x=-1$　۲) $x=2$　۳) $x=3$　۴) $x=4$

۸۲. به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k، خط $y=-2$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی $f(x)=kx^2+2\sqrt{2}x+k-1$ بر سهمی مماس است؟

۱) $\{-1\}$　۲) $\{-2\}$　۳) $\{-2\ ,\ 1\}$　۴) $\varnothing$

۸۳. منحنی نمودار تابع $y=2x^2+bx+6$ بر قسمت مثبت محور xها، مماس است. مقدار b کدام است؟

۱) $-4\sqrt{3}$　۲) $\pm 2\sqrt{3}$　۳) $\pm 4\sqrt{3}$　۴) $-\sqrt{3}$

۸۴. اگر قدر مطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x)=-x^2+x-m$ برابر ۳ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است.
۲) کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{4}$ است.
۳) بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{2}$ است.
۴) کم‌ترین مقدار تابع $\frac{9}{2}$ است.

۸۵. محور تقارن سهمی $y=x^2+4x+k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (۲-) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۸۶. اگر عبارت $y=ax(x+1)+1$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۸۷. اگر مساحت مثلثی که راس‌های آن نقاط برخورد منحنی به معادله‌ی $y=x^2-kx+1$ با محورهای مختصات است، برابر یک واحد مربع باشد، k کدام است؟

۱) ± 2 ۲) ± 4 ۳) $\pm 2\sqrt{2}$ ۴) $\pm\sqrt{2}$

۸۸. حاصل جمع دو عدد برابر ۲۰ است. ماکسیمم حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۰۰

۸۹. معادله‌ی سهمی که محور طول‌ها را در ۵ و ۲− و محور عرض‌ها را در ۱− قطع کند کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{1}{10}(x-5)(x+2)$ ۲) $f(x)=\frac{1}{10}(x+5)(x-2)$

۳) $f(x)=10(x-5)(x+2)$ ۴) $f(x)=-\frac{1}{10}(x-5)(x+2)$

۹۰. اگر نمودار f با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-3x+2m-5$ خط $y=1$ را دقیقاً در یک نقطه قطع کند، مقدار m کدام است؟

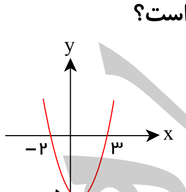
۱) $\frac{33}{8}$ ۲) $\frac{33}{4}$ ۳) $\frac{33}{16}$ ۴) $\frac{33}{32}$

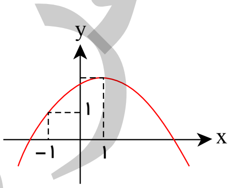
۹۱. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$، محور xها را در نقاطی به طول‌های صفر و ۲ قطع می‌کند. اگر عرض ماکسیمم این تابع برابر ۳ باشد a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳− ۳) ۶− ۴) ۹−

۹۲. شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵−
۳) ۶ ۴) ۶−

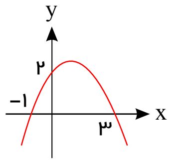




۹۳. در سهمی شکل مقابل به معادله‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ ، اگر $a-b=-3$ آنگاه $f(1)$ کدام است؟

۱) ۴− ۲) ۰
۳) ۴ ۴) ۵

۹۴. نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت مقابل بوده و مختصات رأس سهمی $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ است. $\alpha\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۹۵. به ازای کدام مقادیر m، نمودار $y=(m-2)x^2+3x+m+2$ پایین محور x ها و مماس بر آن است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

۹۶. به ازای کدام مقادیر m، هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(m-1)x^2+m+2mx$ در زیر محور xها قرار دارد؟

۱) $m<1$ ۲) $m<0$ ۳) $0<m<1$ ۴) $m<-1$

۹۷. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^2-2x-8$ را حداقل چند واحد به سمت راست منتقل کنیم تا هر دو نقطه‌ی تلاقی آن با محور طول‌ها، در x های نامنفی باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۹۸. به ازای چه حدودی از a، نمودار $y=ax^2+2x+a$ همواره بالای محورxها قرار دارد؟

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $\varnothing$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

۹۹. در صورتی که منحنی تابع $y=2x^2+ax+a-\frac{3}{2}$ ، محور xها را در طرفین محور yها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات a چگونه است؟

۱) $a<2$ یا $a>6$ ۲) $2<a<6$ ۳) $a<\frac{3}{2}$ ۴) $a>\frac{3}{2}$

۱۰۰. به ازای چه حدودی از a، نمودار تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2-(a-4)x+\frac{9}{4}$ فقط از ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-1<a<0$ ۲) $-2<a<-1$ ۳) $1<a<2$ ۴) $0<a<1$

۱۰۱. به هر یک از جواب‌های معادله $x^2+2x-5=0$ دو واحد اضافه می‌کنیم. به حاصل‌ضرب آنها چند واحد اضافه می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) مقداری اضافه نمی‌شود.

۱۰۲. به ازای چه حدودی از a تابع درجه‌ی دوم $f(x)=(a-1)x^2-2\sqrt{3}x+(a+1)$، از ناحیه‌ی سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

۱) $a\geq 2$ ۲) $1\leq a\leq 2$ ۳) R ۴) $a>1$

۱۰۳. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+(k+1)x+k+4=0$، اگر حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۲ برابر مجموع ریشه‌ها باشد، آن‌گاه تابع $f(x)=kx^2-4x+1$ چگونه است؟

۱) ماکسیممی برابر ۳ دارد. ۲) مینیممی برابر ۳ دارد.
۳) ماکسیممی برابر -1 دارد. ۴) مینیممی برابر -1 دارد.

۱۰۴. ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $ax^2+5x+a^2=6$ معکوس یکدیگرند. اختلاف این دو ریشه کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۰۵. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-5x+2=0$ باشند، حاصل $A=(\alpha+\frac{2}{\beta})^2+(\beta+\frac{2}{\alpha})^2$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۸۴

۱۰۶. مجموع جواب‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+3x+1)^2+x^2+3x=1$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) ۶ ۴) صفر

۱۰۷. اگر در معادله‌ی $x^2-12x+8m^3=0$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

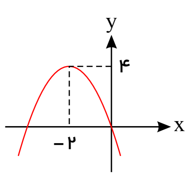
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۱۰۸. اگر $2\alpha+1$ و $2\beta+1$ ریشه‌های معادله‌ی $2x(x+2)=3$ باشند، کدام معادله ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است؟

۱) $8x^2+x-3=0$ ۲) $8x^2-x-3=0$

۳) $3x^2+16x+8=0$ ۴) $3x^2-16x+8=0$

۱۰۹. با توجه به نمودار تابع $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$، مقدار a کدام است؟

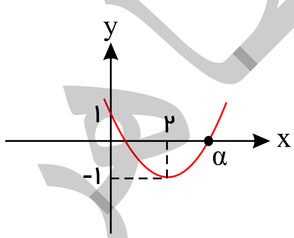


۱) ۱
۲) -1
۳) -2
۴) ۲

۱۱۰. به ازای کدام مقدار m، در معادله‌ی $x^2+8mx+4m+8=0$، یکی از جواب‌ها، ۳ برابر جواب دیگر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۱۱. با توجه به شکل روبه‌رو که نمودار یک تابع درجه‌ی دو را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟



۱) ۳
۲) $\frac{5}{2}$
۳) $2+\sqrt{2}$
۴) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

۱۱۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x-5=0$ باشند، حاصل $\alpha^3+14\beta$ کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۴۲ ۳) ۷۲ ۴) -27

۱۱۳. اگر رأس سهمی $y=2x^2-ax+b$ نقطه‌ی $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ باشد، حاصل a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۵ ۳) ۱۸ ۴) ۳۲

۱۱۴. تابع درجه‌ی دوم f، محور طول‌ها را در ۳ و ۲− و محور عرض‌ها را در ۱ قطع می‌کند. مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{1}{12}$

۱۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^3+\beta\alpha^3$ کدام است؟

۱) ۶− ۲) ۶ ۳) ۲− ۴) ۲

۱۱۶. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن ۳ برابر معکوس ریشه‌های معادله $x^2-3x+1=0$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2-9x+9=0$ ۲) $x^2-9x+3=0$ ۳) $x^2+9x-3=0$ ۴) $x^2-9x-9=0$

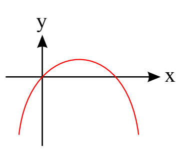
۱۱۷. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ باشند، حاصل $\alpha^2+\alpha^3+\beta^2+\beta^3$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۱۱۸. اگر عدد ۳، بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(2,4)$ ۲) $(3,4)$ ۳) $(2,3)$ ۴) $(2/5,+\infty)$

۱۱۹. کدام گزینه می‌تواند ضابطه‌ی تابع زیر باشد؟



۱) $y=x^2+2x$

۲) $y=-x^2+2x$

۳) $y=x^2-2x$

۴) $y=-x^2-2x$

۱۲۰. اگر ریشه‌های معادله‌ی $9x^2+ax+b=0$، از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-9=0$، دو واحد کم‌تر باشد، a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۱ ۳) ۴۲ ۴) ۱۷

۱۲۱. اگر α,β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-7x-1=0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^{-2}+\beta\alpha^{-2}$ کدام است؟

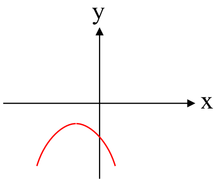
۱) ۳۶۲ ۲) ۳۶۴ ۳) ۳۶۶ ۴) ۳۶۸

۱۲۲. اگر α,β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-1=0$ باشند، در کدام یک از معادلات زیر، ریشه‌ها برابر $\frac{\alpha^2-2\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta^2-2\beta}{\alpha}$ می‌باشد؟

۱) $x^2-3x-1=0$ ۲) $x^2-4x-2=0$

۳) $x^2+2x-1=0$ ۴) $x^2-5x-7=0$

۱۲۳. به ازای چه حدودی از m، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = mx^{۲} + ۴\sqrt{۲}x + m - ۲$ به صورت مقابل است؟



۱) $(-\infty, -۲)$
۲) $(-\infty, -۱)$
۳) $(۴, +\infty)$
۴) $\varnothing$

۱.گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه های معادله باشند داریم:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{m+3}{m}\ ,\ x'x''=\frac{c}{a}=\frac{5}{m}$$

فرض مسأله: $x'^2+x''^2=6 \Rightarrow (x'+x'')^2-2x'x''=6 \Rightarrow (\frac{m+3}{m})^2-\frac{10}{m}-6=0$

$$\Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}-6=0 \xrightarrow{\times m^2} m^2+6m+9-10m-6m^2=0$$

$$\Rightarrow 5m^2+4m-9=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases} m=1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2-4x+5=0\ :\quad \Delta=16-20<0\ \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{9}{5} \rightarrow \text{با توجه به گزینه ها } \Delta>0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۲.گزینه ۱

$$x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4=0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x=1$ است و معادله بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} x^3+(a-1)x^2+(4-a)x-4 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+ax+4 \\ \hline ax^2+(4-a)x-4 & \\ -ax^2+ax & \\ \hline 4x-4 & \\ -4x+4 & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-1)(x^2+ax+4)=0$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x=1$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta>0 \rightarrow b^2-4ac>0 \rightarrow a^2-16>0 \rightarrow a^2>16 \rightarrow a>4 \ \text{یا}\ a<-4 \quad (I)$$

$$S>0 \rightarrow -\frac{b}{a}>0 \rightarrow -a>0 \rightarrow a<0 \quad (II)$$

$$P>0 \rightarrow \frac{c}{a}>0 \rightarrow 4>0 \ \text{همواره برقرار است}\ (III)$$

از اشتراک $I\ ,\ II\ ,\ III$ به جواب $a<-4$ می‌رسیم.

۳.گزینه ۴ می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$2x^2-3x-1=0 \xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^2-3x+2=0 \xrightarrow[x\to x+1]{\text{یک واحد کمتر}} -(x+1)^2-3(x+1)+2=0$$

$$\rightarrow -x^2-2x-1-3x-3+2=0 \rightarrow x^2+5x+2=0$$

۴.گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ باشد.

$\Delta > \circ \to b^{۲} - ۴ac > \circ \to ۴(a-۲)^{۲} - ۴(۱۴-a) > \circ \to (a-۲)^{۲} - (۱۴-a) > \circ$

$\to a^{۲} + ۴ - ۴a - ۱۴ + a > \circ \to a^{۲} - ۳a - ۱۰ > \circ \to (a-۵)(a+۲) > \circ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -۲$ یا $a > ۵ : I$

$\frac{c}{a} > \circ \to ۱۴ - a > \circ \to a < ۱۴ \quad : II$

$-\frac{b}{a} > \circ \to ۲(a-۲) > \circ \to a - ۲ > \circ \to a > ۲ \quad : III$

از اشتراک I و II و III به جواب $۵ < a < ۱۴$ می‌رسیم.

۵.گزینه ۲ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد (بالای محور xها باشد) آن است که $a > \circ$ و $\Delta < \circ$ باشد.

$a > \circ \to ۱ - a > \circ \to a < ۱ \ : \ I$

$\Delta < \circ \ \to b^{۲} - ۴ac < \circ \to ۲۴ - ۴(۱-a)(-a) < \circ \to ۲۴ + ۴a - ۴a^{۲} < \circ$

$\xrightarrow{\div(-۴)} a^{۲} - a - ۶ > \circ \to (a-۳)(a+۲) > \circ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -۲$ یا $a > ۳ \ : \ II$

از اشتراک I و II به جواب $a < -۲$ می‌رسیم.

۶.گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^{۲} + bx + c = \circ$ را α و β بنامیم در این صورت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + ۲\sqrt{p}}$ است. $(\alpha, \beta > \circ)$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+۱}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱۶} \end{cases} \to \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = ۲ \to \sqrt{S + ۲\sqrt{P}} = ۲ \xrightarrow{\text{توان۲}} S + ۲\sqrt{P} = ۴$$

$$\to \frac{m+۱}{۲} + ۲(\frac{۱}{۴}) = ۴ \to \frac{m+۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۴ \to \frac{m+۲}{۲} = ۴ \to m + ۲ = ۸ \to m = ۶$$

۷.گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲} - x - ۲ = \circ$ را α و β در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $۸x^{۲} - mx - ۸ = \circ$ برابر $\alpha^{۳}$ و $\beta^{۳}$ هستند.

$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱$

داریم : $\alpha^{۳} + \beta^{۳} = (\alpha+\beta)^{۳} - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{۸}$

$\alpha^{۳} \cdot \beta^{۳} = (\alpha \cdot \beta)^{۳} = (-۱)^{۳} = -۱$

معادله‌ی درجه‌ی دوم : $x^{۲} - Sx + P = \circ \to x^{۲} - \frac{۱۳}{۸}x - ۱ = \circ \to ۸x^{۲} - ۱۳x - ۸ = \circ$

$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۸x^{۲} - mx - ۸ = \circ} m = ۱۳$

۸.گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > \circ$، $S < \circ$ و $P > \circ$ باشد.

$$\Delta > ۰ \xrightarrow{b^۲-۴ac>۰} ۴m^۲ - ۴(m-۶)(-۳) > ۰ \to m^۲ + ۳m - ۱۸ > ۰ \to (m+۶)(m-۳) > ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۶ \quad \text{یا} \quad m > ۳ \quad (I)$$

$$S < ۰ \to \frac{-b}{a} < ۰ \to \frac{۲m}{m-۶} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < m < ۶ \qquad (II)$$

$$P > ۰ \to \frac{c}{a} > ۰ \to \frac{-۳}{m-۶} > ۰ \to m-۶ < ۰ \to m < ۶ \qquad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $۳ < m < ۶$ می‌رسیم.

۹. **گزینه ۱** شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > ۰$ و $S > ۰$ و $P > ۰$ باشد.

$$S > ۰ \to \frac{-b}{a} > ۰ \to -(m-۲) > ۰ \to m-۲ < ۰ \to m < ۲$$

بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند.

$$P > ۰ \to \frac{c}{a} > ۰ \to m+۱ > ۰ \to m > -۱ \to \text{گزینه‌ی دوم حذف می‌شود}$$

بنابراین بدون اینکه شرط $\Delta > ۰$ را اعمال کنیم گزینه‌ی اول انتخاب می‌شود.

۱۰. **گزینه ۴** برای وجود دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت باید $\Delta > ۰$ و $P < ۰$ باشد. در مورد S نمی‌توان اظهارنظر کرد. ضمناً توجه داشته باشید که شرط $P < ۰$ شرط $\Delta > ۰$ را تأمین می‌نماید.

$$(m-۲)x^۲ - ۲x + (m-۳) = ۰$$

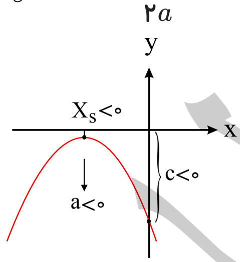
$$P < ۰ \to \frac{c}{a} < ۰ \to \frac{m-۳}{m-۲} < ۰$$

جواب: $۲ < m < ۳$

m		۲		۳	
m - ۳	−		−	۰	+
m - ۲	−	۰	+	۰	+
P	+	∞	− ج		+

۱۱. **گزینه ۴** باتوجه به تصویر می‌توان گفت: سهمی max دارد و رو به پایین است پس $a < ۰$ و

$$x_S < ۰ \to -\frac{b}{۲a} < ۰ \to \frac{b}{a} > ۰ \xrightarrow{a<۰} b < ۰$$



نتیجه: $bc > ۰ \, , \, a < ۰$

۱۲. **گزینه ۱** باتوجه به متن سؤال می‌توان نوشت: $۴x^۲ - ۸x + c = ۰$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} \quad S = \frac{-b}{a} = -\frac{-۸}{۴} = ۲$$

$$\alpha = \beta + ۳$$

$$S = \alpha + \beta = \beta + ۳ + \beta = ۲\beta + ۳ = ۲ \to ۲\beta = -۱ \to \boxed{\beta = -\frac{۱}{۲}}$$

$$\alpha = \beta + ۳ = -\frac{۱}{۲} + ۳ = \frac{۵}{۲} \to \boxed{\alpha = \frac{۵}{۲}}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \to \frac{۵}{۲} \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{c}{۴} \to \frac{c}{۴} = -\frac{۵}{۴} \to \boxed{c = -۵}$$

$$۲x^۲ - x + c = ۰ \xrightarrow{c=-۵} ۲x^۲ - x - ۵ = ۰ \to P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = -\frac{۵}{۲}$$

۱۳. **گزینه ۱** راه اول:

$$(x^۲-۱)^۲-۴x^۲+۷=۰$$

$$\Rightarrow (x^۴+۱-۲x^۲)-۴x^۲+۷=۰ \Rightarrow x^۴-۶x^۲+۸=۰$$

$$\xrightarrow{x^۲=t} t^۲-۶t+۸=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۲ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ t=۴ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۲}-\sqrt{۲}+۲-۲=۰ \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۰$$

نکته: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ در صورت وجود صفر است.

راه دوم: می‌توان با تغییر متغیر معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کرد.

$$(x^۲-۱)^۲-۴x^۲+۷=۰ \rightarrow (x^۲-۱)^۲-۴x^۲+۴+۳=۰$$

$$\rightarrow (x^۲-۱)^۲-۴(x^۲-۱)+۳=۰$$

$$\xrightarrow{x^۲-۱=t} t^۲-۴t+۳=۰ \rightarrow (t-۱)(t-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=۳ \end{cases}$$

$$x^۲-۱=۱ \rightarrow x^۲=۲ \rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

$$x^۲-۱=۳ \rightarrow x^۲=۴ \rightarrow x=\pm ۲$$

مجموع ریشه‌های حاصل صفر می‌باشد.

۱۴.گزینه ۳   مرحلهٔ اول حل مسئله محاسبهٔ شیب خط گذرنده از A و B می‌باشد.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{b-a}{a-b}=-۱$$

خط مورد نظر بر خط AB عمود است پس حاصلضرب شیب‌ها برابر -۱ است. پس شیب خط مورد نظر باید برابر ۱ باشد که فقط گزینهٔ سوم این ویژگی را دارد.

$$m=۱ \rightarrow y-x=۰ \rightarrow y=x$$

۱۵.گزینه ۳

$$a(x^۲-۴x+۴)=x \Rightarrow ax^۲-(۴a+۱)x+۴a=۰$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{۴a+۱}{a} \\ \alpha\beta=۴ \end{cases}$$

$$\alpha=۱۰\beta-۳ \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۲=۱۰\alpha\beta-۳\alpha \xrightarrow{\alpha\beta=۴} \alpha^۲=۴۰-۳\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+۳\alpha-۴۰=۰ \Rightarrow (\alpha+۸)(\alpha-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-۸ \\ \alpha=۵ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=-۸ \Rightarrow a(-۸-۲)^۲=-۸ \Rightarrow ۱۰۰a=-۸ \Rightarrow a=-\frac{۲}{۲۵} \\ \alpha=۵ \Rightarrow a(۵-۲)^۲=۵ \Rightarrow ۹a=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۹} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت } a} a=\frac{۵}{۹}$$

۱۶.گزینه ۲   روش اول: با توجه به معادله، با یک معادلهٔ درجهٔ ۴ برخورد کرده‌ایم؛ می‌توان با یک تغییر متغیر آن را به یک معادلهٔ درجه ۲ تبدیل کرد.

$$(x^۲+۳)^۲-۵x^۲-۱۱=۰ \xrightarrow[x^۲=t-۳]{x^۲+۳=t} t^۲-۵(t-۳)-۱۱=۰$$

$$t^2-5t+15-11=0\rightarrow t^2-5t+4=0\rightarrow (t-1)(t-4)=0$$

$$\begin{cases} t=1\rightarrow x^2+3=1\rightarrow x^2=-2 & \text{غیر قابل قبول} \\ t=4\rightarrow x^2+3=4\rightarrow x^2=1\rightarrow x\pm 1\rightarrow x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}$$

روش دوم:

$$\left(x^2+3\right)^2-5x^2-11=0\rightarrow x^4+6x^2+9-5x^2-11=0$$

$$\rightarrow x^4+x^2-2=0\xrightarrow{x^2=t} t^2+t-2=0$$

$$\rightarrow (t-1)(t+2)=0\begin{cases} t=1\rightarrow x^2=1\rightarrow x_1=1\ ,\ x_2=-1 \\ t=-2\rightarrow x^2=-2\rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\rightarrow x_1\cdot x_2=-1$$

۱۷.گزینه ۳ راه‌حل اول: نکته: در مورد سهمی $y=ax^2+bx+c$ داریم:

■ اگر $a>0$ ($a<0$)، آن‌گاه دهانهٔ سهمی رو به بالا (پایین) است و برعکس.

■ رأس سهمی نقطهٔ $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ است.

■ عرض نقطهٔ تقاطع نمودار سهمی با محور yها برابر c است.

نمودار سهمی رو به بالا است، پس: $a>0$

طول رأس سهمی منفی است، پس داریم: $-\frac{b}{2a}<0$، با توجه به اینکه $a>0$ نتیجه می‌گیریم: $b>0$

عرض نقطهٔ تقاطع نمودار سهمی با محور yها منفی است، پس: $c<0$

در نتیجه:

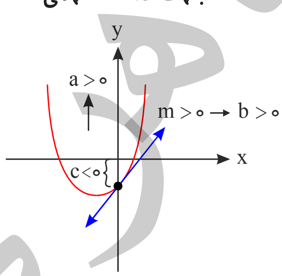
$$ab>0\ ,\ ac<0\ ,\ bc<0\ ,\ abc<0$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

راه‌حل دوم: در یک سهمی می‌توان از پارامترهای زیر برای تحلیل علامت c,b,a استفاده کرد:

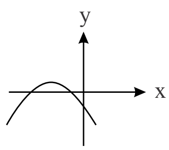
$$f(x)=\underbrace{a}_{\text{جهت دهانهٔ سهمی}}x^2+\overbrace{b}^{\text{شیب خط مماس در } x=0}x+\underbrace{c}_{\text{عرض از مبدأ}}\rightarrow a>0, b>0, c<0$$

نتیجه : b و c هم‌علامت نیستند پس: $bc<0$

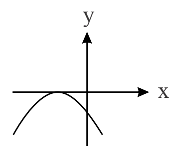


۱۸.گزینه ۴ برای آن‌که نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند باید دارای ماکزیمم و به صورت باشد، یعنی باید ضریب x^2 منفی باشد. $(a<0)$

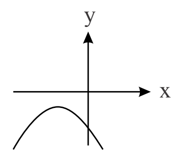
حال به بررسی حالت‌های احتمالی می‌پردازیم:



$\Delta > ۰$



$\Delta = ۰$



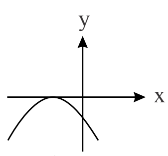
$\Delta < ۰$

در حالت اول که $\Delta > ۰$ است: (β و α ریشه‌های تابع موردنظر هستند.)

$$\alpha + \beta < ۰ \Rightarrow \frac{-b}{a} < ۰ \xrightarrow{a<۰} b < ۰$$

$$\alpha \cdot \beta \geq ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} \geq ۰ \xrightarrow{a<۰} c \leq ۰$$

و حالت‌های $\Delta = ۰$ و $\Delta < ۰$ قابل‌قبول نیستند، زیرا در این حالت از ناحیه دوم نیز نمودار عبور نمی‌کند. اما باید توجه داشت که اگر $a < ۰$ و $b = ۰$ و $c = ۰$ باشند، نمودار به صورت شکل زیر خواهد بود که قابل قبول نیست:



۱۹.گزینه ۱ روش اول: اگر ریشه های معادلهٔ $x(۵x+۳) = ۴$ را با α و β نمایش دهیم، ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲ + kx - ۵ = ۰$ برابر با $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ هستند. بنابراین:

$$x(۵x+۳) = ۴ \Rightarrow ۵x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{۳}{۵} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۴}{۵} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S' = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = +\frac{۳}{۴} \\ P' = \frac{۱}{\alpha} \times \frac{۱}{\beta} = \frac{۱}{\alpha\beta} = \frac{۱}{P} = -\frac{۵}{۴} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{تشکیل}} x^۲ - S'x + P' = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - \frac{۳}{۴}x - \frac{۵}{۴} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۳x - ۵ = ۰ \Rightarrow k = -۳$$

روش دوم: اگر ریشه‌های معادله $۴x^۲ + kx - ۵ = ۰$ را به صورت X نشان دهیم داریم:

$$x\,(۵x+۳) = ۴ \rightarrow ۵x^۲ + ۳x - ۴ = ۰ \rightarrow X = \frac{۱}{x} \text{ یا } x = \frac{۱}{X}$$

$$\rightarrow ۵\left(\frac{۱}{x}\right)^۲ + ۳\left(\frac{۱}{x}\right) - ۴ = ۰ \rightarrow \frac{۵}{X^۲} + \frac{۳}{X} - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\times X^۲} ۵ + ۳X - ۴X^۲ = ۰ \rightarrow ۴X^۲ - ۳X - ۵ = ۰$$

$$\rightarrow \boxed{k = -۳}$$

۲۰.گزینه ۲ برای حل باید ابتدا S و P معادله درجه دو حاضر را محاسبه نماییم.

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$۳x^۲-۲۱x+۸=۰$$

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۲۱}{۳}=۷ \qquad P=\frac{c}{a}=\frac{۸}{۳}$$

در این مرحله باید عبارت مطرح شده را برحسب S و P بازنویسی نماییم:

$$\alpha^۲+\beta^۲-۲\beta\alpha=(\alpha+\beta)^۲=S^۲=۷^۲=۴۹$$

۲۱.گزینه ۴ ابتدا باید مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه دو مطرح شده را محاسبه نماییم.

$$ax^۲+bx+c=۰\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

$$x^۲-۵x+۲=۰\begin{cases}S=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-۵}{۱}=۵\\ P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۲}{۱}=۲\end{cases}$$

حال باید عبارت مطرح شده را به S و P تبدیل کرد:

$$(\alpha+۲)(\beta+۲)=۴+(\alpha+\beta)\times ۲+\alpha\beta=۴+۲S+P=۴+۲(۵)+۲=۱۶$$

۲۲.گزینه ۱ برای حل مسئله ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ اول را محاسبه می‌نماییم.

$$۲x^۲+(c+۲)x+۸=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(c+۲)}{۲} \quad (I)\\ P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۸}{۲}=۴\end{cases}$$

حال سراغ معادلهٔ دوم برویم: $\begin{cases}x_۱=\sqrt{\alpha\beta}\\ x_۲=۲\sqrt{\alpha\beta}\end{cases}$, $x^۲+bx+c=۰$

جدید $S=x_۱+x_۲=\sqrt{\alpha\beta}+۲\sqrt{\alpha\beta}=۳\sqrt{\alpha\beta}=۳\sqrt{P}=۳\sqrt{۴}=۶$

جدید $P=x_۱\cdot x_۲=\sqrt{\alpha\beta}\times ۲\sqrt{\alpha\beta}=۲\alpha\beta=۲(۴)=۸$

حال می‌توان با فرمول زیر معادله را بازنویسی کرد: $x^۲-Sx+P=۰$.

$$\left.\begin{matrix}x^۲-۶x+۸=۰\\ x^۲+bx+c=۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=۸\xrightarrow{(I)}\alpha+\beta=\frac{-(c+۲)}{۲}=\frac{-۱۰}{۲}=-۵$$

۲۳.گزینه ۳ برای مشخص کردن وضعیت معادله ابتدا باید وضعیت S و P و Δ را معین نمود:

$۵x^۲+۱۳x-۷=۰\xrightarrow{\text{مختلف العلامت } c \text{ و } a}\Delta=b^۲-۴ac>۰$ پس تا اینجا معادله دو ریشه متمایز دارد.

$$P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۷}{۵}\rightarrow$$

حاصل‌ضرب ریشه منفی است، پس دو ریشه مختلف‌العلامت می‌باشند. با توجه به گزینه‌ها نیاز به بررسی پارامتر S نمی‌باشد.

۲۴.گزینه ۳ برای محاسبه معادلهٔ جدید ابتدا S و P معادلهٔ اولیه را محاسبه می‌کنیم.

$$-۳x^۲-۴x+۶=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{-(-۴)}{-۳}=-\dfrac{۴}{۳}\\ P=\alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{۶}{-۳}=-۲\end{cases}$$

حال S و P معادلهٔ مجهول را بررسی می‌نماییم.

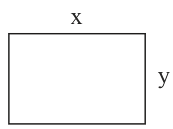
جدید $S=(۳\alpha-۱)+(۳\beta-۱)=۳(\alpha+\beta)-۲=۳(-\frac{۴}{۳})-۲=-۶$

جدید $P=(۳\alpha-۱)(۳\beta-۱)=۹\alpha\beta-۳(\alpha+\beta)+۱=۹(-۲)-۳(-\frac{۴}{۳})+۱=-۱۳$

حال با رابطهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ معادله را می‌نویسیم:

$x^2-(-6)x+(-13)=0 \to x^2+6x-13=0$

۲۵.گزینه ۲ **با توجه به توضیح مستطیل طلایی می‌توان رابطهٔ زیر را نوشت:**



$$\to \frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}\to 1+\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$$

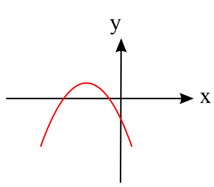
برای محاسبهٔ نسبت حاصل $\frac{x}{y}=t$ **فرض می‌کنیم:**

$$1+\frac{1}{t}=t\xrightarrow[t\neq 0]{\times t}t+1=t^2\to t^2-t-1=0$$
$$\to \Delta=(-1)^2-4(1)(-1)\to\Delta=5$$
$$\begin{cases} t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

x **و** y **اضلاع مستطیل هستند، پس مقدار** $\frac{x}{y}$ **منفی نمی‌باشد و فقط** $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **قابل قبول است.**

۲۶.گزینه ۴

روش اول: شکل تقریبی سهمی به صورت زیر است:



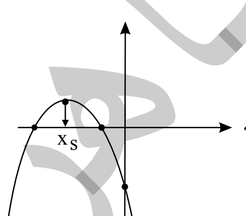
باید معادلهٔ $f(x)=0$ **دو ریشهٔ منفی داشته باشد:**

$$\Delta>0\Rightarrow 4-4(-m)(m-1)>0\Rightarrow 4+4m^2-4m>0\Rightarrow \underbrace{m^2-m+1>0}_{\Delta<0}\Rightarrow$$ **همواره برقرار است**

$$\left.\begin{array}{l} P>0\Rightarrow \dfrac{m-1}{-m}>0\Rightarrow 0<m<1\\ S<0\Rightarrow \dfrac{2}{m}<0\Rightarrow m<0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\varnothing$$

روش دوم: ابتدا یک تصویر کلی از نمودار رسم می‌نماییم:

با توجه به نمودار داریم:



$$\begin{cases} a<0\\ b<0\\ c<0\end{cases}$$

با توجه به معادلهٔ $y=-mx^2+2x+m+1$ **پارامتر** $b=2$ **بوده و به هیچ وجه با شرایط** $b<0$ **سازگار نیست.**

توجه: می‌توان علامت a **و** b **و** c **را به صورت زیر تعیین نمود:**

$$f(x)=\overset{\text{تقعر}}{\overset{\uparrow}{a}}\,x^2+\underset{\substack{\downarrow\\ \text{شیب خط مماس}\\ \text{در } x=0}}{b}x+\overset{\text{عرض از مبدأ}}{\overset{\uparrow}{c}}$$

۲۷.گزینه ۲ **برای حل معادله کافیست تغییر متغیر انجام دهیم:**

$$4x^6+1=5x^3 \to 4x^6-5x^3+1=0 \xrightarrow{x^3=t} 4t^2-5t+1=0$$

روش اول: مجموع ضرایب معادلهٔ حاصل صفر می‌باشد پس داریم:

$$\begin{cases} t=1 \to x^3=1 \to x=1 \\ t=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{4} \to x^3=\dfrac{1}{4} \to x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

لذا معادلهٔ اولیه دو ریشه دارد.

روش دوم:

$$4t^2-5t+1=0 \to \Delta=(-5)^2-4(4)(1)=25-16=9$$

$$t=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2(4)}=\frac{5\pm 3}{8}\begin{cases} t=\dfrac{1}{4} \to x^3=\dfrac{1}{4} \to x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ t=1 \to x^3=1 \to x=1 \end{cases}$$

۲۸.گزینه ۲ در یک معادلهٔ درجه ۲ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲ از رابطه‌های زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-(m^2-3m+3)}{1}=m^2-3m+3$$

$$P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=\frac{m^3-3}{1}=m^3-3$$

طبق متن سوال $S=1$ می‌باشد، بنابراین داریم:

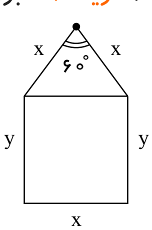
$$m^2-3m+3=1 \to m^2-3m+2=0 \to (m-1)(m-2)=0 \to \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$$

حال باید با جایگذاری از قابل قبول بودن اطمینان حاصل نماییم:

$m=2 \to x^2-x+5=0 \to \Delta=1-20<0 \to$ غیر قابل قبول

$$m=1 \to x^2-x-2=0 \to \Delta=1+8>0 \to P=\frac{c}{a}=\frac{-2}{1}=-2$$

۲۹.گزینه ۲ برای حداکثر نوردهی باید مساحت $\max$ باشد. لذا ابتدا باید معادله‌ای بسازیم که بیانگر مساحت بر حسب x یا y باشد.



محیط پنجره $=6 \to 3x+2y=6 \to y=-\dfrac{3}{2}x+3$

مساحت کل پنجره $S=S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{مثلث}}$

$$S=x\cdot y+\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$S=x\cdot(-\frac{3}{2}x+3)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \xrightarrow{\frac{\sqrt{3}}{4}=0/5} S=-\frac{3}{2}x^2+3x+0/5x^2$$

$$\Rightarrow S=-x^2+3x$$

با توجه به معادلهٔ مساحت که تابع درجهٔ ۲ شده است، کافیست رأس سهمی را تعیین نماییم.

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$$

$$y=-\frac{3}{2}x+3=-\frac{3}{2}(\frac{3}{2})+3=\frac{3}{4}$$

۳۰.گزینه ۲ برای یافتن گزینه‌ی صحیح ابتدا با استفاده از تغییر متغیر هر چهار معادله را حل می‌نماییم.

گزینهٔ «۱»: با فرض $x^2=t$ داریم:

$$x^4-7x^2+12=0$$
$$\Rightarrow t^2-7t+12=0\Rightarrow (t-4)(t-3)=0\Rightarrow \begin{cases} t=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ t=4\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

چهار جواب دارد.

گزینهٔ «۲»: با فرض $x^2=t$ داریم:

$$t^2+8t+7=0\Rightarrow (t+1)(t+7)=0\Rightarrow \left\{\begin{matrix} t=-7\Rightarrow x^2=-7 \\ t=-1\Rightarrow x^2=-1\end{matrix}\right\}$$ **جواب ندارد.**

گزینهٔ «۳»: با فرض $x^2+x=t$ داریم:

$$t^2-14t+24=0\Rightarrow (t-2)(t-12)=0 \left\{\begin{matrix} t=2\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=1 \text{ یا } -2 \\ t=12\Rightarrow x^2+x-12=0\Rightarrow x=3 \text{ یا } -4\end{matrix}\right\}$$ **۴ جواب دارد.**

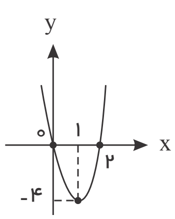
گزینهٔ «۴»: با فرض $x^3=t$ داریم:

$$4x^6+1=5x^3\Rightarrow 4t^2-5t+1=0\Rightarrow \begin{cases} t=1\Rightarrow x=1 \\ t=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\end{cases}$$

دو جواب دارد.

۳۱.گزینه ۱

باید توجه داشت که طول رأس سهمی وسط ریشه‌ها قرار می‌گیرد. پس می‌توان تصویر سهمی را به صورت زیر کامل کرد.



در این سوال معادلهٔ کلی سهمی را می‌توان به‌صورت $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ تعریف کرد که x_1 و x_2 ریشه‌های سهمی $(x_1=0, x_2=2)$ هستند پس داریم:

$$f(x)=a(x-0)(x-2)$$

حال نقطهٔ $S(1,-4)$ رأس سهمی است که مختصاتش در معادلهٔ سهمی صدق می‌نماید

$$-4=a(1-0)(1-2)\to -a=-4\to a=4$$

پس معادلهٔ کامل به شکل مقابل است $f(x)=4(x^2-2x)$

$$f(3)=4(3^2-2(3))=4\times 3=12$$

۳۲.گزینه ۲ برای محاسبهٔ مقدار m کافیست مقدار S و P را محاسبه کرده و جایگذاری کنیم. در معادلهٔ درجه دو مقدار S و P برابر است با:

$$ax^2+bx+c=0\to \begin{cases} S=-\frac{b}{a} \\ P=\frac{c}{a}\end{cases}$$

$$x^2-(4m-1)x+m^2+1=0\to \begin{cases} S=4m-1 \\ P=m^2+1\end{cases}$$

طبق فرض سوال داریم: $S=P+1$

$$4m-1=m^2+1+1\to m^2-4m+3=0\to (m-1)(m-3)=0 \begin{cases} m=1 \\ m=3\end{cases}$$

حال باید هر دو مقدار را در معادله جایگذاری نماییم. مقادیری قابل قبول هستند که باعث شوند $\Delta\geq 0$ باشد.

$$m=1\to x^2-3x+2=0\to \Delta>0$$

$$m=3\to x^2-11x+10=0\to \Delta>0$$

پس هر دو مقدار قابل قبول می‌باشند.

۳۳.گزینه ۳ قدم اول محاسبه مختصات رأس سهمی S می‌باشد.

$f(x)=x^{۲}-mx+m+۱$

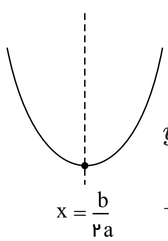
$$S=\begin{vmatrix} x_S=-\dfrac{b}{۲a}=-\dfrac{-m}{۲(۱)}=\dfrac{m}{۲} \\ y_S=f(-\dfrac{b}{۲a})=f(\dfrac{m}{۲})=(\dfrac{m}{۲})^{۲}-m(\dfrac{m}{۲})+m+۱=\dfrac{m^{۲}}{۴}-\dfrac{m^{۲}}{۲}+m+۱=\dfrac{-m^{۲}+۴m+۴}{۴}\end{vmatrix}$$

با توجه به اینکه رأس سهمی روی خط $y=x+۱$ قرار دارد، مختصات رأس در معادله خط صدق می‌نماید.

$$\frac{-m^{۲}+۴m+۴}{۴}=\frac{m}{۲}+۱\xrightarrow{\times ۴}-m^{۲}+۴m+۴=۲m+۴$$

$$\to m^{۲}-۲m=۰\to m(m-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\ m=۲\end{cases}$$

۳۴.گزینه ۱ **با توجه به تصویر معادله محور تقارن سهمی برابر است با:** $x=-\dfrac{b}{۲a}$.



$$y=x^{۲}-kx+۱\to \text{محور تقارن}: x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-k}{۲(۱)}=\frac{k}{۲}$$

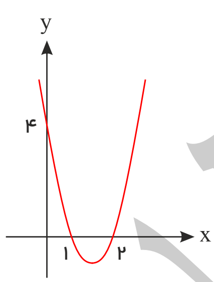
$$\to x=\frac{k}{۲}=-۲\to k=-۴$$

پس معادله سهمی به شکل مقابل است: $y=x^{۲}+۴x+۱$

برای محاسبه $\min$ مختصات راس را به طور کامل تعیین می‌نماییم:

$$\text{رأس}\begin{vmatrix} x_S=-\dfrac{b}{۲a}=-۲ \\ y_S=f(-\dfrac{b}{۲a})=f(-۲)=(-۲)^{۲}+۴(-۲)+۱=-۳\end{vmatrix}$$

۳۵.گزینه ۴ **راه حل اول:**



با توجه به نمودار، ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ به‌صورت $x=۱$ و $x=۲$ است، پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=a(x-۱)(x-۲)$$

از طرفی نمودار تابع f از نقطه $(۰,۴)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$f(۰)=۴\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f، به‌صورت $f(x)=۲(x-۱)(x-۲)$ است، پس:

$$f(۴)=۲(۳)(۲)=۱۲$$

راه حل دوم:

با توجه به تصویر سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است که همان ریشه‌های سهمی می‌باشند، یعنی باعث صفر شدن عبارت درجه دومی باشند. از طرفی عرض از مبدأ سهمی یعنی $f(۰)$ برابر ۴ است. لذا داریم:

$f(x)=ax^{۲}+bx+c$

$f(۰)=۴\to c=۴$

$$\to f(۱)=۰\to a+b+۴=۰\to a+b=-۴$$

$$\to f(۲)=۰\to ۴a+۲b+۴=۰\xrightarrow{\div ۲}۲a+b=-۲$$

حال با حل دستگاه زیر a و b را محاسبه می‌نماییم:

$$-\begin{cases}a+b=-۴\\ ۲a+b=-۲\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}-a-b=۴\\ ۲a+b=-۲\end{cases}$$

$$\boxed{a=۲}\to a+b=-۴\to ۲+b=-۴\to\boxed{b=-۶}$$

پس عبارت درجه دو به فرم زیر است:

$$f(x)=2x^2-6x+4 \to f(4)=2(16)-6(4)+4=32-24+4=12$$

۳۶.گزینه ۳ راه اول:

$$x^4-20x^2+36=0 \xrightarrow{t=x^2} t^2-20t+36=0$$

$$\Rightarrow (t-18)(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=18 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x=\pm 3\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین ریشه برابر $3\sqrt{2}$ و کوچک‌ترین ریشه برابر $-3\sqrt{2}$ می‌باشد که اختلاف این دو مقدار برابر $6\sqrt{2}$ است.

راه دوم: برای حل این معادله دو مجذوری می‌توان عبارت را تجزیه نمود:

$$x^4-20x^2+36=0 \to (x^2-18)(x^2-2)=0$$

$$\begin{cases} x^2-18=0 \to x^2=18 \to x=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2} \\ x^2-2=0 \to x^2=2 \to x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

با توجه به ریشه‌های حاصل max ریشه $3\sqrt{2}$, $\min$ ریشه $-3\sqrt{2}$ می‌باشد.

$$x\max - x\min = 3\sqrt{2}-(-3\sqrt{2})=6\sqrt{2}$$

پس ۶ برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد.

۳۷.گزینه ۳ محل تلاقی سهمی با محور xها، همان صفرهای تابع درجهٔ دوم‌اند.

یعنی $x_1=1$, $x_2=2$ صفرهای تابع درجه دوم‌اند، از طرفی معادلهٔ سهمی در این حالت به صورت $y=a(x-1)(x-2)$ در می‌آید.

نقطهٔ $(0,4)$ روی سهمی است.

حال عرض از مبدأ سهمی ۴ است پس داریم $f(0)=4$

$$y=a(x-1)(x-2) \Rightarrow 4=a(0-1)(0-2) \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow y=2(x-1)(x-2)=2x^2-6x+4$$

طول رأس سهمی: $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-6)}{2(2)}=\dfrac{3}{2}$

راه حل دوم: فرم کلی تابع درجهٔ ۲ به‌صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ می‌باشد. مبدأ همان $f(0)$ است پس داریم:

$$f(0)=4 \to c=4$$

ریشه‌های سهمی اعداد $x=1$, $x=2$ می‌باشد پس داریم:

$$f(1)=0 \to a(1)^2+b(1)+4=0 \to a+b=-4$$

$$f(2)=0 \to a(2)^2+b(2)+4=0 \to 4a+2b=-4 \to 2a+b=-2$$

$$\begin{cases} 2a+b=-2 \\ -a-b=+4 \end{cases}$$

$$a=2 \to 2+b=-4 \to b=-6 \to f(x)=2x^2-6x+4$$

طول رأس $x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-6}{2(2)}=+\dfrac{3}{2}$

روش سوم:

اگر نقطه $A\,(x_1\,,\,0)$ و $B\,(x_2\,,\,0)$ محل تلاقی نمودار سهمی با محورxها باشند، طول رأس سهمی (x_S) به صورت زیر بدست می آید.

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\to x_S=\frac{1+2}{2} \to x_S=\frac{3}{2}$$

۳۸.گزینه ۱ برای محاسبهٔ max و min ابتدا باید ضابطه‌ای بسازیم که حاصل‌ضرب xy را به یکی از دو متغیر مرتبط نماید، برای این کار حاصل‌ضرب را P در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y+3x=12 \to y=-3x+12 \\ P=x\cdot y \to P=x(-3x+12) \to p(x)=-3x^2+12x \end{cases}$$

برای محاسبهٔ بیشترین مقدار P کافیست ارتفاع رأس سهمی را محاسبه نماییم

$$S\text{رأس سهمی}\begin{cases} x_S=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-12}{2(-3)}=2 \\ y_S=P(2)=-3(2)^2+12(2)=12 \end{cases}$$

پس $P_{\max}=12$

۳۹.گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده را α و β بنامیم باید معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسیم که ریشه هایش α^2 و β^2 باشند.

$$S_{\text{قدیم}}=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=5 \quad , \quad P_{\text{قدیم}}=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-2$$

$$S_{\text{جدید}}=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25-2(-2)=29$$

$$P_{\text{جدید}}=\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\cdot\beta)^2=(-2)^2=4$$

می‌دانیم که اگر مجموع (S) و حاصل‌ضرب دو ریشه (P) را داشته باشیم معادله‌ی درجه‌ی دوم مطلوب به صورت $x^2-Sx+P=0$ است پس معادله‌ی مطلوب به صورت $x^2-29x+4=0$ است.

۴۰.گزینه ۱ نکته: تابع درجه دوم $y=ax^2+bc+c$ با شرط $a<0$ $(a>0)$ دارای ماکسیمم (مینیمم) است که در رأس آن، یعنی نقطه‌ای به طول $x=\dfrac{-b}{2a}$ اتفاق می‌افتد.

طول کل نرده برابر ۱۰۰ متر است، پس:

$$2x+y=100 \Rightarrow y=100-2x$$

حال ماکسیمم xy را محاسبه می‌کنیم:

$$S=xy=x(100-2x)=-2x^2+100x$$

ماکسیمم عبارت $S=-2x^2+100x$ به‌ازای $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-100}{2(-2)}=\dfrac{-100}{-4}=25$ به‌دست می‌آید.

۴۱.گزینه ۳ با توجه به نمودار معادله تابع f دارای دو ریشه مثبت می‌باشد. لذا می‌توان شرط‌های زیر را بیان کرد:

$$f(x)=x^2-mx+m+\frac{5}{4}$$

$$(I)\ \ \Delta>0 \to \Delta=m^2-4(1)(m+\frac{5}{4})$$

$$\to \Delta=m^2-4m-5>0 \to (m-5)(m+1)>0$$

$$(II)\ \ S>0 \to -\frac{b}{a}>0 \to \frac{m}{1}>0 \to m>0$$

$$(III) P>0 \to \frac{c}{a}>0 \to m+\frac{5}{4}>0 \to m>-\frac{5}{4}$$

m	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

$m\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

حال بین این سه شرط اشتراک می‌گیریم:

$$(I)\cap(II)\cap(III) \to m>5$$

۴۲.گزینه ۱ چون رأس سهمی روی نیمساز ربع اول $(y=x)$ قرار دارد. بنابراین مختصات آن به صورت $S\left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right.$ است و چون سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول -1 و 3 قطع کرده است طول رأس سهمی دقیقاً وسط -1 و 3 است.

$$x_S=\frac{-1+3}{2}=1 \to S\left|\begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right.$$

$$\text{معادله‌ی سهمی}: y=a(x-3)(x+1) \xrightarrow[\text{صدق}]{S|_1^1} 1=a(-2)(2) \to -4a=1 \to a=\frac{-1}{4}$$

$$\text{معادله‌ی سهمی}: y=\frac{-1}{4}(x-3)(x+1) \xrightarrow{x=0} y=\frac{-1}{4}(-3)(1)=\frac{3}{4}$$

توجه کنید اگر یک سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ نشان داد.

۴۳. گزینه ۲ چون نمودار سهمی، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند پس $\Delta>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ (جمع ۲ ریشه) و $\frac{c}{a}>0$ (ضرب دو ریشه) است.

$$I)\Delta>0\to b^2-4ac>0\to 16-4a(a-3)>0\to 16-4a^2+12a>0$$

$$\to 4a^2-12a-16<0\to a^2-3a-4<0\to (a-4)(a+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<a<4$$

$$II)\frac{-b}{a}>0\to \frac{-4}{a}>0\to a<0$$

$$III)\frac{c}{a}>0\to\frac{a-3}{a}>0\to \begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & 0 & & 3 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت}>0 & & + & \text{ن} & - & 0 & + & \end{array} \to a<0 \ \text{یا}\ a>3$$

از اشتراک این سه جواب به $-1<a<0$ می‌رسیم، چون رأس سهمی زیر محور xها قرار دارد بنابراین عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac-b^2}{4a}$ باید منفی باشد.

$$\frac{4ac-b^2}{4a}<0\to \frac{\overbrace{b^2-4ac}^{+}}{4a}>0\to 4a>0\to a>0$$

و توجه کنید که $a>0$ و $-1<a<0$ اشتراکی با هم ندارند.

۴۴. گزینه ۳ برای محاسبهٔ اختلاف m و n می‌توان از پارامترهای S و P استفاده کرد:

$$f(x)=x^2-2mx+12=0\begin{cases} x_1=\frac{m}{2}\\ x_2=\frac{n}{2}\end{cases}$$

$$S=\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=2m\to m+n=4m\to n=3m \quad (I)$$

$$P=\frac{m}{2}\times\frac{n}{2}=12\to mn=48 \quad (II)$$

$$(I),(II)\to(3m)(m)=48\to 3m^2=48\to m^2=16\to m=\pm 4$$

$$\begin{cases} m=4\to n=12\\ m=-4\to n=-12\end{cases}\to |m-n|=8$$

۴۵. گزینه ۲ نکته: در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، مجموع ریشه‌ها برابر $S=\frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $P=\frac{c}{a}$ است.

نکته: اگر x_1 و x_2 دو عدد حقیقی باشند، $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$. آنگاه معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن x_1 و x_2 باشد عبارت است از: $x^2-Sx+P=0$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+4m-2=0$ برابر است با:

$$S=3m\quad,\quad P=4m-2$$

با جایگذاری این مقدار در رابطهٔ $S+P=5$، داریم:

$$3m+4m-2=5\Rightarrow 7m=7\Rightarrow \boxed{m=1}$$

با جایگذاری $m=1$ در معادله، به معادلهٔ $x^2-3x+2=0$ خواهیم رسید.

$$x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=1,2\xrightarrow{x_1<x_2} x_1=1\quad,\quad x_2=2$$

معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $x_1+1=2$ و $x_2+2=4$ باشد عبارت است از:

$(x-2)(x-4)=0 \to x^2-6x+8=0$

۴۶.گزینه ۳ برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های مطرح شده ابتدا باید این تابع را محاسبه نمود:

$$f(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$$

$$f(x+3)=(x+3-2)(x+3-4)=(x+1)(x-1)=0 \to \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$$x_1 \cdot x_2=(1)\times(-1)=-1$$

۴۷.گزینه ۲ طول نقطه‌ی B یا همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم عرض A و C است.

$$x_B=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+0}{2}=-1$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=ax^2+bx+c$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{array}{l}-2\\-2\end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2=4a-2b+c \\ B\left|\begin{array}{l}-1\\-4\end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -4=a-b+c \end{array}\right\} \xrightarrow{c=-2} \begin{cases} 4a-2b=0 \\ a-b=-2 \end{cases} \to a=2\ ,\ b=4$$

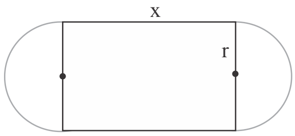
$$C\left|\begin{array}{l}0\\-2\end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -2=c$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=2x^2+4x-2$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه های معادله‌ی $2x^2+4x-2=0$ بدین صورت عمل می کنیم.

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{4}{2}=-2 \quad , \quad x'x''=\frac{c}{a}=-1$$

مجموع مربعات ریشه ها: $x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=4-2(-1)=6$

۴۸.گزینه ۲



محیط استادیوم$=2x+2\pi r=1500 \to x+\pi r=750 \to r=\dfrac{750-x}{\pi}$

$$S=2xr=2x\left(\frac{750-x}{\pi}\right)=\frac{1500x-2x^2}{\pi}=-\frac{2}{\pi}x^2+\frac{1500}{\pi}x$$

$$xMax=\frac{-b}{2a}=\frac{-\frac{1500}{\pi}}{-\frac{4}{\pi}}=\frac{1500}{4}=375$$

۴۹.گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی داده شده را مرتب می کنیم.

$$x^3+mx^2+m+2x-m=0 \to x^3+mx^2+2x=0$$

$$\to x(x^2+mx+2)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x^2+mx+2=0 \end{cases}$$

چون یک ریشه‌ی معادله برابر صفر است، بنابراین مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $x^2+mx+2=0$ برابر ۱۲ است پس اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق باشند. داریم:

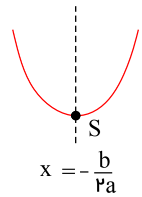
$$x'+x''=\frac{-b}{a}=-m\ ,\ x'x''=\frac{c}{a}=2$$

مجموع مربعات ریشه ها $=12 \to x'^2+x''^2=12 \to (x'+x'')^2-2x'x''=2$

$$\to m^2-4=12 \to m^2=16 \to m=\pm 4$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند زیرا دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم را منفی نمی‌کنند.

۵۰.گزینه ۲ تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a > 0$



در $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ اکیداً نزولی و در $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

اکیداً صعودی : $[\frac{-b}{2a}, +\infty) \to [-1, +\infty) \to$ حداقل مقدار a برابر ۱− است.

۵۱.گزینه ۳ کافی است معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده بیشتر باشد برای این کار کافی است که x را به $x-1$ تبدیل کنیم.

$$2x^2-4x-1=0 \xrightarrow{x\to x-1} 2(x-1)^2-4(x-1)-1=0 \to 2(x^2+1-2x)-4x+4-1=0$$

$$\to 2x^2+2-4x-4x+3=0 \to 2x^2-8x+5=0 \to x^2-4x+\frac{5}{2}=0$$

توجه کنید که ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$ ، k واحد از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ بیشتر هستند.

۵۲.گزینه ۳ توجه کنید که: $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=1$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$ است.

$$\alpha\beta^{-1}+\beta\alpha^{-1}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{1-2(-1)}{-1}=-3$$

توجه کنید که $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ است.

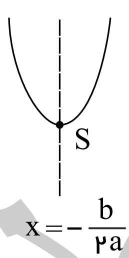
۵۳.گزینه ۴

$$x^2+x-3=0 \xrightarrow[\text{در } b\ 3\text{ , در } c\ 3^2]{\text{۳برابر}} x^2+3x-27=0 \xrightarrow[x\to x+1]{\text{یک واحد کمتر}} (x+1)^2+3(x+1)-27=0$$

$$\to x^2+1+2x+3x+3-27=0 \to x^2+5x-23=0$$

ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bkx+ck^2=0$ ، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ است و ریشه‌های معادله‌ی $a(x+k)^2+b(x+k)+c=0$ ، k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ است.

۵۴.گزینه ۲ تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ وقتی $a>0$ است یعنی تابع دارای Min است در بازه $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.



$$\longrightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2 \to a=2$$

۵۵.گزینه ۴

α,β :ریشه‌های قدیم و α^2,β^2 :ریشه‌ های جدید

$$S_{\text{قدیم}}=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-4 \quad \text{و} \quad P_{\text{قدیم}}=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-1$$

$$S_{\text{جدید}}=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-4)^2-2(-1)=16+2=18$$

$$P_{\text{جدید}}=\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\cdot\beta)^2=(-1)^2=1$$

$$x^2-Sx+P=0\rightarrow x^2-18x+1=0$$

۵۶.گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشد (برای این کار جای a و c را عوض می‌کنیم) و سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش ۳ واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله‌ی نوشته شده باشد و برای این کار x را به $x-3$ تبدیل می‌کنیم.

$$2x^2-3x-1=0\xrightarrow[\text{جای } c,a \text{ عوض}]{\text{معکوس}}-x^2-3x+2=0\xrightarrow[x\to x-3]{\text{۳ واحد بیش تر}}-(x-3)^2-3(x-3)+2=0$$

$$\rightarrow-(x^2+9-6x)-3x+9+2=0\rightarrow-x^2-9+6x-3x+9+2=0$$

$$\rightarrow-x^2+3x+2=0\rightarrow x^2-3x-2=0$$

ریشه‌های معادله‌ی $cx^2+bx+a=0$، معکوس ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ هستند و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$، k واحد بیش‌تر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ هستند.

۵۷.گزینه ۲

$$(x-2)(x^2+mx+m+3)=0\rightarrow\begin{cases}x=2\\x^2+mx+m+3=0\end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x=2$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+mx+m+3=0$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $13=\underbrace{\alpha^2+\beta^2+2^2}_{\text{مجموع مجذورات ریشه ها}}$ است.

$$\alpha^2+\beta^2+4=13\rightarrow\alpha^2+\beta^2=9\rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9\xrightarrow[\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+3]{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m}$$

$$m^2-2(m+3)=9\rightarrow m^2-2m-15=0\rightarrow(m-5)(m+3)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}m=5\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^2+5x+8=0\rightarrow\Delta=b^2-4ac=25-32<0\rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}\\m=-3\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^2-3x=0\rightarrow x(x-3)=0\rightarrow x=0,x=3\end{cases}$$

بنابراین فقط $m=-3$ قابل قبول است.

۵۸.گزینه ۲ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ از هر ۴ ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور کند آن است که $\frac{c}{a}<0$ باشد.

$$\frac{c}{a}<0\rightarrow\frac{1}{a^2-4}<0\rightarrow a^2-4<0\rightarrow a^2<4\rightarrow-2<a<2$$

۵۹.گزینه ۳ ابتدا تابع درجه‌ی دوم داده شده را به‌صورت $f(x)=ax^2+2x+2a-1$ مرتب می‌کنیم. چون تابع درجه‌ی دوم دارای Min است بنابراین ضریب x^2 باید مثبت باشد یعنی $a>0$ است (I). چون تابع دارای Min است و در ربع سوم قرار دارد پس محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند یعنی $\Delta>0$ است.

$\Delta > ۰ \to b^۲ - ۴ac > ۰ \to ۴ - ۴a(۲a-۱) > ۰ \to ۴ - ۸a^۲ + ۴a > ۰$

$\to ۸a^۲ - ۴a - ۴ < ۰ \to$

x	$-\infty$	$-\frac{۱}{۲}$		۱	$+\infty$
عبارت < ۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$\to \frac{-۱}{۲} < a < ۱ \;:\; II$

از اشتراک I و II به جواب $۰ < a < ۱$ می‌رسیم.

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $-\frac{b}{۲a}$ نیز باید منفی باشد.

$\frac{-b}{۲a} < ۰ \to \frac{-۲}{۲a} < ۰ \to$ برقرار است چون $۰ < a < ۱$ است.

۶۰.گزینه ۱ از رابطه‌ی $۲۵a + ۵b + c = ۰$ متوجه می‌شویم که یک ریشه‌ی معادله $x' = -۵$ است.

$(x' = -۵ \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} ۲۵a + ۵b + c = ۰)$ و می‌دانیم حاصل دو ریشه برابر $\frac{c}{a}$ است.

$x'x'' = \frac{c}{a} \to -۵x'' = \frac{c}{a} \to x'' = -\frac{c}{۵a}$

۶۱.گزینه ۱ β و α ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۱۳x^۲ - ۷x - ۱ = ۰$ هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} ۱۳\alpha^۲ - ۷\alpha - ۱ = ۰ \;,\; \beta \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} ۱۳\beta^۲ - ۷\beta - ۱ = ۰$

$$\begin{cases} ۱۳\alpha^۲ - ۸\alpha - ۱ = \underbrace{۱۳\alpha^۲ - ۷\alpha - ۱}_{۰} - \alpha = -\alpha \\ ۱۳\beta^۲ - ۸\beta - ۱ = \underbrace{۱۳\beta^۲ - ۷\beta - ۱}_{۰} - \beta = -\beta \end{cases}$$

در حقیقت سوال گفته معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسید که ریشه‌هایش قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی فوق باشد که کافی است علامت b را قرینه کنید یعنی معادله به صورت $۱۳x^۲ + ۷x - ۱ = ۰$ می‌باشد.

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ - bx + c = ۰$، قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ می‌باشند.

۶۲.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b) \;,\; a^۵ + b^۵ = (a^۲+b^۲)(a^۳+b^۳) - a^۲b^۳ - a^۳b^۲}$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده $x_۱x_۲ = \frac{c}{a} = ۱$ و $x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = ۳$ است.

$x_۱x_۲^۶ + x_۲x_۱^۶ = \underbrace{x_۱x_۲}_{۱}(x_۲^۵ + x_۱^۵) = x_۱^۵ + x_۲^۵ = (x_۱^۲ + x_۲^۲)(x_۱^۳ + x_۲^۳) - x_۱^۲x_۲^۳ - x_۱^۳x_۲^۲$

$= ((x_۱+x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲)((x_۱+x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)) - x_۱^۲x_۲^۲(x_۲+x_۱)$

$= (۹-۲)(۲۷-۹) - ۱(۹) = (۷)(۱۸) - ۳ = ۱۲۶ - ۳ = ۱۲۳$

۶۳.گزینه ۳ باید $\Delta < ۰$ باشد:

$\Delta = b^۲ - ۴ac = m^۲ - ۴(۱)(m) = m^۲ - ۴m < ۰$

حال عبارت $m^۲ - ۴m$ را تعیین علامت کرده و نواحی مورد نظر را مشخص می‌کنیم:

m	$-\infty$	۰		۴	$+\infty$
$m^۲ - ۴m < ۰$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$\Rightarrow ۰ < m < ۴$

۶۴.گزینه ۲ زمانی یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف دارد که در آن $\Delta = ۰$ باشد.

$x^۲ - x - m = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac} \Delta = (-۱)^۲ - ۴(۱)(-m) = ۱ + ۴m = ۰ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۴}$

۶۵.گزینه ۴ باید $\Delta > ۰$ باشد:$(b^۲ - ۴ac > ۰)$

$\Delta = (-m)^۲ - ۴(m-۱) > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ > ۰$

این نامساوی همواره برقرار است به غیر از حالتی که $m = ۲$ باشد.

۶۶.گزینه ۱

$x^۲ - ۴x + m = ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x + m - ۵ = ۰$

این معادله‌ی درجه‌ی دوم نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\Delta < ۰ \to b^۲ - ۴ac < ۰ \to \Delta = ۱۶ - ۴(m-۵) < ۰ \Rightarrow ۴m > ۳۶ \Rightarrow m > ۹$$

۶۷.گزینه ۱

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=7 \quad , \quad x_1x_2=\frac{c}{a}=-5$$
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7^2-2(-5)=49+10=59$$

۶۸.گزینه ۳

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=1 \quad , \quad x_1x_2=\frac{c}{a}=-m$$

$$\text{مجموع معکوس ریشه ها}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{-m}\xlongequal{\text{طبق فرض}}4\Rightarrow m=-\frac{1}{4}$$

۶۹.گزینه ۱ از رابطه‌ی $4a+2b+c=0$ می‌توان فهمید که $x_1=2$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ است. (توجه کنید که اگر $x=2$ ریشه‌ی معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشد، باید در معادله صدق کند. یعنی باید پس از جایگذاری $x=2$ در معادله،تساوی برقرار باشد. یعنی $4a+2b+c=0$) به همین ترتیب، از تساوی $9a+3b+c=0$ می‌توان فهمید ریشه‌ی دیگر این معادله، $x_2=3$ است. مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با: $x_1+x_2=2+3=5$

۷۰.گزینه ۲

$$x^2+2ax+3a+1=0\Rightarrow\begin{cases}S=x'+x''=-\dfrac{b}{a}=-2a\\ P=x'\cdot x''=\dfrac{c}{a}=3a+1\end{cases}$$

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها}=\text{مجموع ریشه‌ها}-4\Rightarrow x'\cdot x''=(x'+x'')-4\Rightarrow P=S-4\Rightarrow 3a+1=-2a-4$$

$$\Rightarrow 5a=-5\Rightarrow a=-1\Rightarrow\begin{cases}S=-2a=2\\ P=3a+1=-2\end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}: x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=2^2-2(-2)=8$$

۷۱.گزینه ۴

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-(-m^2)}{m+2}=1$$

$$\Rightarrow m^2=m+2\Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow(m-2)(m+1)=0\Rightarrow m=-1,2$$

$$m=2\to x^2-4x+4=0\to(x-2)^2=0\to x=2$$

بنابراین $m=2$ غیر قابل قبول است زیرا دو ریشه ی متمایز بدست نمی آید.

$$m=1\to x^2-x+1=0\to\Delta=1-4=-3<0$$

بنابراین $m=-1$ غیر قابل قبول است زیرا معادله، ریشه حقیقی ندارد.

۷۲.گزینه ۳ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$$

پس کافی است x را به $x-2$ تبدیل کنیم.

$$x^۲-x-۱=۰ \xrightarrow{x\to x-۲} (x-۲)^۲-(x-۲)-۱=۰$$
$$\to x^۲-۴x+۴-x+۲-۱=۰ \to x^۲-۵x+۵=۰ \xrightarrow{\text{مقایسه با } x^۲-bx+c=۰} b=۵$$

۷۳.گزینه ۲ روش اول: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده باشد سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد.

$$x^۲-۳x+۱=۰ \xrightarrow[\text{جای } c,a \text{ عوض}]{\text{معکوس}} x^۲-۳x+۱=۰ \xrightarrow[\substack{b \text{ در } ۲\\ c \text{ در } ۲^۲}]{\text{دو برابر}} x^۲-۶x+۴=۰$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲+bx+a=۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bkx+ck^۲=۰$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشند.

روش دوم: اگر y ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم قدیم باشد داریم:

$$y=\frac{۲}{x} \to x=\frac{۲}{y} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{۴}{y^۲}-\frac{۶}{y}+۱=۰ \to ۴-۶y+y^۲=۰ \to y^۲-۶y+۴=۰$$

۷۴.گزینه ۱ معادله‌ی $x^۲+۴x-۱=۰$ مفروض است، می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش نصف ریشه های این معادله باشند. اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه ی معادله‌ی قدیم باشد داریم:

$$y=\frac{x}{۲} \to x=۲y \xrightarrow{\text{معادله}} (۲y)^۲+۴(۲y)-۱=۰ \to ۴y^۲+۸y-۱=۰ \to ۴x^۲+۸x-۱=۰$$

که اگر این معادله را با $۴x^۲+۸x+m-۱=۰$ مقایسه کنیم داریم:

$$m-۱=-۱ \to m=۰$$

۷۵.گزینه ۳ ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bkx+ck^۲=۰$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشند.
و ریشه‌های معادله‌ی $a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$، k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشند.
روش اول:

$$۲x^۲+bx+۲=۰ \xrightarrow[b \text{ در } ۲ \text{ و } c \text{ در } ۲^۲]{\text{دو برابر}} ۲x^۲+۲bx+۸=۰ \Rightarrow x^۲+bx+۴=۰$$

$$\xrightarrow[x\to x-۱]{\text{یک واحد بیشتر}} (x-۱)^۲+b(x-۱)+۴=۰ \Rightarrow x^۲+۱-۲x+bx-b+۴=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+(b-۲)x-b+۵=۰ \quad \text{مقایسه با} \quad x^۲-۷x+c=۰$$
$$\text{پس:} \quad b-۲=-۷ \Rightarrow b=-۵ \ , \ -b+۵=c \Rightarrow c=۱۰ \to b-c=-۱۵$$

روش دوم:
اگر y، ریشه‌ی جدید و x ریشه‌ی قدیم باشد داریم:

$$y=۲x+۱ \Rightarrow x=\frac{y-۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار می دهیم}} ۲\left(\frac{(y-۱)^۲}{۴}\right)+b\left(\frac{y-۱}{۲}\right)+۲=۰ \to \frac{y^۲-۲y+۱}{۲}+\frac{by-b}{۲}+۲=۰$$
$$y^۲-۲y+۱+by-b+۴=۰ \to y^۲+(b-۲)y-b+۵=۰$$

ادامه‌ی حل مسئله عین روش اول است.

۷۶.گزینه ۲ با توجه به معادله‌ی $x^۲+kx+۱=۰$ داریم:

حاصل‌جمع ریشه‌ها : $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-k$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها : $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$

چون ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$، به صورت $\{\sqrt{\alpha}\ ,\ \sqrt{\beta}\}$ است.

بنابراین:

$$S'=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\frac{-b}{a}=4\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=16$$

$$\to -k+2\sqrt{1}=16\Rightarrow -k=14\Rightarrow k=-14$$

۷۷.گزینه ۲ برای تشکیل معادله جدید به حاصل جمع (S') و حاصل ضرب (P') نیاز داریم بنابراین :

$$S'=\frac{\alpha}{2S+P}+\frac{\beta}{3S+4P}\xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-1]{S=-\frac{b}{a}=3}\frac{\alpha}{2(3)-1}+\frac{\beta}{3(3)+4(-1)}=\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{5}=\frac{\alpha+\beta}{5}=\frac{S}{5}=\frac{3}{5}$$

$$P'=\frac{\alpha}{2S+P}\times\frac{\beta}{3S+4P}=\frac{\alpha}{5}\times\frac{\beta}{5}=\frac{\alpha\beta}{25}=\frac{P}{25}=\frac{-1}{25}$$

حال با داشتن (S') و (P') معادله‌ی جدید را مینویسیم:

$$x^2-S'x+P'=0\to x^2-\frac{3}{5}x-\frac{1}{25}=0\xrightarrow{\times 25}25x^2-15x-1=0$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی حاصل با معادله‌ی $25x^2-5kx-1=0$ داریم:

$$-5k=-15\to k=3$$

۷۸.گزینه ۲ این تابع به شکل $y=x^2-4x+3-x=x^2-5x+3$ در می‌آید و معادله‌ی محور تقارن آن $x=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{2}$ است.

۷۹.گزینه ۳ تابع داده شده به صورت $y=-x^2+3x-2$ می‌باشد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، عرض رأس سهمی (نقطه S) می‌باشد.

$$y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(-1)(-2)-3^2}{4(-1)}=\frac{8-9}{-4}=\frac{1}{4}$$

۸۰.گزینه ۴

ابتدا باید تابع $f(x)$ را پیدا کنیم.

$$f(2x-1)=4x^2-4x\to f(2x-1)=4x^2-4x+1-1\to f(2x-1)=(2x-1)^2-1$$

$$\xrightarrow{2x-1=t}f(t)=t^2-1\to f(x)=x^2-1$$

$$f(1+2x)=(1+2x)^2-1=4x^2+4x$$

$$S\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{array}\right.\to S\left|\begin{array}{l}-\frac{4}{8}\\ \frac{0-16}{16}\end{array}\right.\to S\left|\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\\ -1\end{array}\right.$$

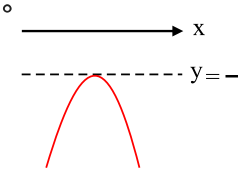
۸۱.گزینه ۲ می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم ($a<0$) برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$$y_s=\frac{4ac-b^2}{4a}=9\to\frac{20a-16}{4a}=9\to 36a=20a-16\to 16a=-16\to a=-1$$

پس خط به معادله‌ی $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(4)}{2(-1)}=2$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

۸۲.گزینه ۲ با توجه به شکل زیر بالاترین نقطه‌ی سهمی یا همان عرض ماکسیمم تابع برابر ۲− است. در نتیجه:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=-2 \to \frac{4(k)(k-1)-8}{4k}=-2 \to 4k^2-4k-8=-8k \Rightarrow 4k^2+4k-8=0$$
$$\to k^2+k-2=0 \Rightarrow (k+2)(k-1)=0 \Rightarrow k=1 \ , \ k=-2$$



اما چون تابع ماکسیمم دارد، باید ضریب x^2 منفی باشد، یعنی: $k<0$. پس تنها $k=-2$ قابل قبول است.

۸۳.گزینه ۱ معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و مقدار این ریشه (طول نقطه‌ی تماس) برابر $x=-\frac{b}{2a}$ است.

معادله‌ی $y=0$ باید ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشد:

$$2x^2+bx+6=0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2-4(2)(6)=0 \Rightarrow b^2=48 \Rightarrow b=\pm 4\sqrt{3}$$

باید $\frac{-b}{2a}>0$ باشد یعنی $\frac{-b}{4}>0$ پس $b=-4\sqrt{3}$.

۸۴.گزینه ۱ اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، آنگاه:

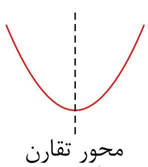
$$\text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها}=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{1-4(-1)(-m)}}{|-1|}=3$$
$$\Rightarrow \sqrt{1-4m}=3 \Rightarrow 1-4m=9 \Rightarrow 4m=-8 \Rightarrow m=-2$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $f(x)=-x^2+x+2$ است.

چون ضریب x^2 ، (a) منفی است بنابراین تابع ماکسیمم دارد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، همان عرض راس سهمی یعنی $\frac{4ac-b^2}{4a}$ می‌باشد.

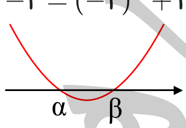
$$\text{عرض ماکسیمم}=\frac{4(-1)(2)-1}{4(-1)}=\frac{9}{4}$$

۸۵.گزینه ۳



مطابق شکل مقابل محور تقارن یک سهمی، سهمی را در نقطه‌ی رأس سهمی قطع می‌کند. از آنجا که $x=-\frac{b}{2a}=-2$ محور تقارن سهمی است و سهمی را در نقطه‌ای به عرض $y=-2$ قطع کرده، بنابراین نقطه‌ی $(-2\ ,\ -2)$ روی منحنی است، در نتیجه در تابع صدق می کند.

$$-2=(-2)^2+4(-2)+k \Rightarrow k=2$$



پس معادله‌ی تابع به صورت $y=x^2+4x+2$ است. همچنین با توجه به شکل مقابل، طول پاره‌خطی که منحنی روی محور xها ایجاد می‌کند برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع است. یعنی:

$$\text{طول پاره‌خط}=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{16-4(2)}}{|1|}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۸۶.گزینه ۲ برای آن که عبارت درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره مثبت یا بالای محور xها باشد، باید دو شرط مقابل همواره برقرار باشد:

$$1)\ \Delta<0 \qquad 2)\ a>0$$

ابتدا عبارت داده شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y=ax(x+1)+1 \Rightarrow y=ax^2+ax+1$$

حال برای آن که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow a^2-4a<0 \Rightarrow a(a-4)<0 \Rightarrow 0<a<4\\ a>0 \Rightarrow a>0\end{cases}$$

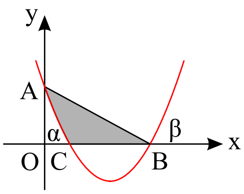
اشتراک دو شرط فوق برابر $0<a<4$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجه‌ی دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a=0$ باشد نیز عبارت $y=ax^2+ax+1$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a=0$ نیز درست است:

$$y=ax^2+ax+1 \xrightarrow{a=0} y=0+0+1=1$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با: $(0<a<4)\cup\{0\}=0\le a<4$

که در بازه‌ی فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

۸۷.گزینه ۳ به نمودار فرضی زیر توجه کنید: باتوجه به شکل در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور yها، $x=0$ است.



$$x=0 \xrightarrow{\text{تابع}} y_A=1$$

نقاط برخورد منحنی با محور xها هم، همان ریشه‌های تابع هستند. حال برای محاسبه‌ی مساحت مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S=\frac{(BC)(OA)}{2}\xrightarrow[BC=|\alpha-\beta|]{OA=1} S=\frac{|\alpha-\beta|(1)}{2}=\frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

چون مساحت مثلث برابر یک است و قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها در تابع درجه‌ی دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است بنابراین:

$$1=\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{2}\Rightarrow 2|a|=\sqrt{\Delta}\Rightarrow 2=\sqrt{k^2-4}\Rightarrow 4=k^2-4\Rightarrow k=\pm 2\sqrt{2}$$

۸۸.گزینه ۴

دو عدد مورد نظر را x و y می نامیم پس $x+y=20$ و ما بیشترین مقدار xy را می خواهیم:

$$x+y=20\to y=20-x\to xy=x(20-x)=-x^2+20x$$

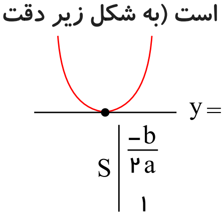
با توجه به این‌که $xy=-x^2+20x$ ، پس کافی است بیش‌ترین مقدار عبارت $f(x)=-x^2+20x$ را بیابیم که برابر است با:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{0-400}{-4}=100$$

۸۹.گزینه ۱ با توجه به صورت مسئله،اگر به y صفر دهیم باید دو جواب $x=-2$, $x=5$ به دست آید و اگر به x، صفر دهیم y باید (-1) شود که این شرایط فقط در گزینه‌ی اول صدق می‌کند.

۹۰.گزینه ۱

با توجه به این که خط $y=1$ (خطی افقی) نمودار سهمی را در تنها در یک نقطه قطع می‌کند، می‌توان دریافت عرض رأس سهمی برابر ۱ است (به شکل زیر دقت کنید).



$$\frac{4ac-b^2}{4a}=1\to\frac{8m-20-9}{4}=1\to 8m=33\to m=\frac{33}{8}$$

۹۱.گزینه ۲ چون طول نقاط برخورد تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با محور xها، $x_1=0$ و $x_2=2$ است، لذا ضابطه‌ی این تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-0)(x-2)$$

حال چون عرض نقطه‌ی ماکسیمم تابع f برابر ۳ است و از طرفی طول آن وسط $x_1=0$ و $x_2=2$ می‌باشد، لذا نقطه‌ی ماکسیمم به مختصات $(1,3)$ خواهد بود. پس داریم:

$$Max(1,3)\in f\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}3=a(1-0)(1-2)\Rightarrow a=-3$$

۹۲.گزینه ۲ چون تابع درجه‌ی دوم محور طول‌ها را در $x=3$ و $x=-2$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x+2)(x-3)$ نشان داد و چون این تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\-5\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$\left|\begin{matrix}۰\\-۵\end{matrix}\right. \to -۵ = a(۲)(-۳) \Rightarrow -۵ = -۶a \Rightarrow a = \frac{۵}{۶}$

$y=\frac{۵}{۶}(x+۲)(x-۳)=\frac{۵}{۶}(x^۲-x-۶)=\frac{۵}{۶}x^۲-\frac{۵}{۶}x-۵$

$\Rightarrow a=\frac{۵}{۶}\ ,\ b=-\frac{۵}{۶}\ ,\ c=-۵ \to a+b+c=-۵$

۹۳.گزینه ۴ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right.$ روی تابع قرار دارد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$\left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱=a-b+c \Rightarrow ۱=-۳+c\Rightarrow c=۴$

طول رأس سهمی $=۱ \to \frac{-b}{۲a}=۱\Rightarrow ۲a+b=۰ \xrightarrow{a-b=-۳} a=-۱\ ,\ b=۲$

$f(x)=-x^۲+۲x+۴\Rightarrow f(۱)=-۱+۲+۴=۵$

۹۴.گزینه ۳

چون تابع درجه‌ی دوم محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۳ و -۱ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $f(x)=k(x+۱)(x-۳)$ نوشت.

سهمی از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

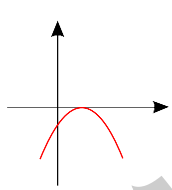
$\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۲=k(۱)(-۳)\to k=-\frac{۲}{۳}\to f(x)=-\frac{۲}{۳}(x+۱)(x-۳)$

طول رأس سهمی حتماً وسط -۱ و ۳ قرار دارد پس حتماً طول رأس سهمی برابر یک می‌باشد.

$x_A=۱ \xrightarrow{\text{صدق در معادله‌ی سهمی}} y=-\frac{۲}{۳}(۲)(-۲)=\frac{۸}{۳}\to A\left|\begin{matrix}۱:\alpha\\ \frac{۸}{۳}:\beta\end{matrix}\right. \to \alpha\beta=\frac{۸}{۳}$

۹۵.گزینه ۴

شرط مماس شدن سهمی بر محور از پایین، $\Delta=۰$ و $a<۰$ است.



$\Delta=۳^۲-۴(m-۲)(m+۲)=۹-۴(m^۲-۴)=-۴m^۲+۲۵=۰\to m^۲=\frac{۲۵}{۴}$

$\Rightarrow m=\pm\frac{۵}{۲}\xrightarrow{m-۲<۰} m=-\frac{۵}{۲}$

۹۶.گزینه ۲ شرط انکه عبارت درجه دوم منفی باشد آن است که $a<۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

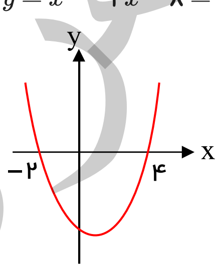
$(m-۱)x^۲+۲mx+m<۰$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} a<۰\Rightarrow m-۱<۰\Rightarrow m<۱ \\ \Delta<۰\Rightarrow (۲m)^۲-۴(m-۱)m<۰\Rightarrow ۴m^۲-۴m^۲+۴m<۰\Rightarrow m<۰\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m<۰$

۹۷.گزینه ۲

$y=x^۲-۲x-۸=(x-۴)(x+۲)$

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نقاط تلاقی این منحنی با محور طول‌ها، $x=-۲$ و $x=۴$ است. برای اینکه نقاط تلاقی در xهای نامنفی باشد، باید نمودار را حداقل ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم.

۹۸.گزینه ۱ برای این که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد، باید:

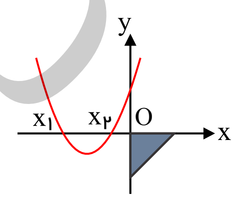
$$\begin{cases} \Delta < ۰ & \Rightarrow ۲^۲ - ۴(a)(a) < ۰ \Rightarrow ۴a^۲ > ۴ \Rightarrow a^۲ > ۱ \Rightarrow a < -۱ \text{ یا } a > ۱ (*) \\ x^۲ \text{ ضریب } & > ۰ \Rightarrow a > ۰ \quad (**) \end{cases}$$

از اشتراک : $(*)$, $(**)$ داریم: $a \in (۱, +\infty)$

۹۹.گزینه ۳ باید معادله‌ی $۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲} = ۰$، دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد تا نمودار تابع $y = ۲x^۲ + ax + a - \frac{۳}{۲}$، محور xها را در طرفین محور yها قطع کند. برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\frac{c}{a} < ۰$ ، پس:

$$\frac{a - \frac{۳}{۲}}{۲} < ۰ \Rightarrow a - \frac{۳}{۲} < ۰ \Rightarrow a < \frac{۳}{۲}$$

۱۰۰.گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم نگذرد باید حالت مقابل رخ دهد، با توجه به این حالت:



$f(۰) = \frac{۹}{۴} \Rightarrow$ تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

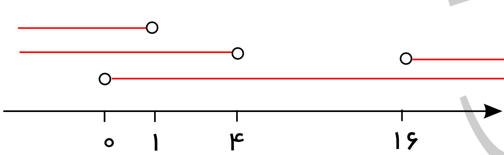
تابع باید مینیمم داشته باشد. $\Rightarrow a > ۰ \quad (I)$

$$S = x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} < ۰ \xrightarrow{a>۰} a - ۴ < ۰ \Rightarrow a < ۴ \quad (II)$$

$$P = x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} > ۰ \xrightarrow{a>۰} c > ۰ \Rightarrow \frac{۹}{۴} > ۰ \quad \text{همواره برقرار است}$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow \Delta = (a-۴)^۲ - ۹a = a^۲ - ۱۷a + ۱۶ > ۰$$

$$(a-۱)(a-۱۶) > ۰ \Rightarrow a < ۱ \text{ یا } a > ۱۶ \quad (III)$$



$$(I) \cap (II) \cap (III) \longrightarrow ۰ < a < ۱$$

۱۰۱.گزینه ۴

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + ۲x - ۵ = ۰$ باشند، در این صورت:

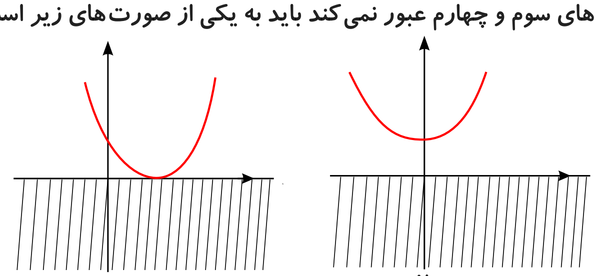
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -۲ \ , \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۵$$

سوال، حاصلضرب $(\alpha+۲)(\beta+۲)$ را خواسته است بنابراین:

$$(\alpha+۲)(\beta+۲) = \alpha\beta + ۲\alpha + ۲\beta + ۴ = \alpha\beta + ۲(\alpha+\beta) + ۴ = \alpha\beta - ۴ + ۴ = \alpha\beta$$

پس به حاصلضرب مقداری اضافه نمی‌شود.

۱۰۲.گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر است.



برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta \leq ۰$ باشد.

$$Min \Rightarrow x^۲ \text{ ضریب } > ۰ \Rightarrow a - ۱ > ۰ \to a > ۱ \qquad (I)$$

$$\Delta \leq \circ \to \Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۲\sqrt{۳})^{۲} - ۴(a-۱)(a+۱) \leq \circ$$
$$\Rightarrow ۱۲ - ۴a^{۲} + ۴ \leq \circ \Rightarrow ۴a^{۲} \geq ۱۶ \Rightarrow a^{۲} \geq ۴$$
$$\Rightarrow a \leq -۲ \text{ یا } a \geq ۲ \qquad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $a \geq ۲$ می‌رسیم.

۱۰۳.گزینه ۱

$$x'x'' = ۲(x' + x'') \to \frac{c}{a} = ۲(-\frac{b}{a}) \to c = -۲b \to k + ۴ = -۲k - ۲$$
$$\to ۳k = -۶ \to k = -۲ \to f(x) = -۲x^{۲} - ۴x + ۱$$

چون ضریب درجه‌ی دوم، منفی است تابع دارای Max است و Max تابع همان عرض نقطه‌ی S است.

$$\frac{۴ac - b^{۲}}{۴a} = \frac{۴(-۲)(۱) - ۱۶}{۴(-۲)} = \frac{-۲۴}{-۸} = ۳$$

۱۰۴.گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دوم را به صورت $ax^{۲} + ۵x + a^{۲} - ۶ = \circ$ می‌نویسیم (ریشه‌های معادله‌ی داده شده را β, α در نظر می‌گیریم)

$$\text{فرض مسأله}: \alpha = \frac{۱}{\beta} \to \alpha\beta = ۱ \to \frac{c}{a} = ۱ \to \frac{a^{۲} - ۶}{a} = ۱ \to a^{۲} - a - ۶ = \circ$$

$$\Rightarrow (a-۳)(a+۲) = \circ \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \xrightarrow{\text{معادله}} ۳x^{۲} + ۵x + ۳ = \circ \Rightarrow \Delta < \circ \ : \ \text{غ ق ق} \\ a = -۲ \xrightarrow{\text{معادله}} -۲x^{۲} + ۵x - ۲ = \circ \Rightarrow \Delta > \circ \ : \ \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{۲۵ - ۱۶}}{|-۲|} = \frac{۳}{۲}$$

۱۰۵.گزینه ۴

می‌دانیم $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۱} = ۲$ و $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۵$ است.

$$A = (\alpha + \frac{۲}{\beta})^{۲} + (\beta + \frac{۲}{\alpha})^{۲} = (\frac{\alpha\beta + ۲}{\beta})^{۲} + (\frac{\alpha\beta + ۲}{\alpha})^{۲}$$
$$\Rightarrow A = (\frac{۲+۲}{\beta})^{۲} + (\frac{۲+۲}{\alpha})^{۲} = \frac{۱۶}{\beta^{۲}} + \frac{۱۶}{\alpha^{۲}} = \frac{۱۶(\alpha^{۲} + \beta^{۲})}{(\alpha\beta)^{۲}} = \frac{۱۶((\alpha+\beta)^{۲} - ۲\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^{۲}} = \frac{۱۶(۲۵ - ۴)}{۴} = ۸۴$$

۱۰۶.گزینه ۱

$$(x^{۲} + ۳x + ۱)^{۲} + x^{۲} + ۳x - ۱ = \circ \to (x^{۲} + ۳x + ۱)^{۲} + x^{۲} + ۳x + ۱ - ۲ = \circ$$
$$\xrightarrow{x^{۲} + ۳x + ۱ = A} A^{۲} + A - ۲ = \circ \to (A+۲)(A-۱) = \circ$$

$$A = -۲ \to x^{۲} + ۳x + ۱ = -۲ \to x^{۲} + ۳x + ۳ = \circ \to \Delta = b^{۲} - ۴ac = ۹ - ۱۲ < \circ : \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$
$$A = ۱ \to x^{۲} + ۳x + ۱ = ۱ \to x^{۲} + ۳x = \circ \to x(x+۳) = \circ \to x = \circ \ , \ x = -۳ \ \to \text{مجموع ریشه‌ها} = -۳$$

۱۰۷.گزینه ۲

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۱۲ \ , \ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = ۸m^{۲}$$

$$\text{فرض}: \alpha = \beta^{۲} \xrightarrow{\alpha + \beta = ۱۲} \beta^{۲} + \beta = ۱۲ \Rightarrow \beta^{۲} + \beta - ۱۲ = \circ \Rightarrow (\beta + ۴)(\beta - ۳) = \circ$$

$$\to \begin{cases} \beta = -۴ \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} ۱۶ + ۴۸ + ۸m^{۳} = \circ \to ۸m^{۳} = -۶۴ \to m^{۳} = -۸ \to m = -۲ \\ \beta = ۳ \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} ۹ - ۳۶ + ۸m^{۳} = \circ \to ۸m^{۳} = ۲۷ \to m^{۳} = \frac{۲۷}{۸} \to m = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

هر دو m بدست آمده، باعث منفی شدن Δ نمی‌شوند و هر دوی آنها قابل قبول هستند بنابراین:

$$-۲+\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۰۸.گزینه ۳ $2\alpha+1$ و $2\beta+1$ ریشه‌های معادله $2x^2+4x-3=0$ می‌باشند، پس:

$$\begin{cases}(2\alpha+1)+(2\beta+1)=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{4}{2}=-2\Rightarrow \alpha+\beta=-2\\[2mm] (2\alpha+1)(2\beta+1)=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow 4\alpha\beta+2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-2}+1=-\dfrac{3}{2}\rightarrow \alpha\beta=\dfrac{3}{8}\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-2}{\frac{3}{8}}=\dfrac{-16}{3}\\[2mm] P=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

$$x^2-Sx+P=0\rightarrow x^2-(-\frac{16}{3})x+\frac{8}{3}=0\xrightarrow{\times 3}3x^2+16x+8=0$$

۱۰۹.گزینه ۲ طول رأس سهمی برابر $x_S=-2$ است و چون تابع درجه‌ی دوم از مبدأ مختصات گذشته پس یکی از نقاط برخورد تابع با محور xها $x_1=0$ است بنابراین محل دیگر برخورد تابع با محور xها $x_2=-4$ است $(x_S=\dfrac{x_1+x_2}{2})$

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\xrightarrow[x_2=-4]{x_1=0}f(x)=a(x-0)(x+4)\rightarrow f(x)=ax(x+4)$$

چون نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}\right.$ روی سهمی قرار دارد پس مختصاتش در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}4=-2a(-2+4)\rightarrow 4=-4a\rightarrow a=-1$$

۱۱۰.گزینه ۴ شرط آنکه در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، یک ریشه‌ی معادله، k برابر ریشه‌ی دیگر باشد آن است که داشته باشیم:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{64m^2}{4m+8}=\frac{16}{3}\rightarrow\frac{4m^2}{4m+8}=\frac{1}{3}\rightarrow 12m^2=4m+8\rightarrow 12m^2-4m-8=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}m=1\\[1mm] m=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-8}{12}=\dfrac{-2}{3}\end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند چون به ازای آنها $\Delta>0$ است.

۱۱۱.گزینه ۳ صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد و نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$ رأس سهمی است که در تابع صدق می‌کند و طولش از رابطه‌ی $x_S=\frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید در ضمن نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ نیز روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.

$$x_S=\frac{-b}{2a}\to 2=\frac{-b}{2a}\to 4a=-b \text{ و } \left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -1=4a+2b+c \text{ و } \left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1=c$$

$$-1=4a+2b+c\xrightarrow[c=1]{4a=-b}-1=-b+2b+1\to b=-2\ ,\ a=\frac{1}{2}$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ است و با توجه به شکل، $x=\alpha$ ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $y=0$ است.

$$y=0\xrightarrow{\times 2}x^2-4x+2=0\to\Delta=b^2-4ac=16-8=8$$

$$\text{ریشه‌ی بزرگتر}=\frac{4+\sqrt{8}}{2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$$

۱۱۲.گزینه ۱ α ریشه‌ی معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}\alpha^2-3\alpha-5=0\to\alpha^2=3\alpha+5\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^3=3\alpha^2+5\alpha$$

$$\to\alpha^3=3(3\alpha+5)+5\alpha\to\alpha^3=14\alpha+15$$

$$\alpha^3+14\beta=14\alpha+15+14\beta=14(\alpha+\beta)+15=14(-\frac{b}{a})+15=14(3)+15=57$$

۱۱۳.گزینه ۲ طول رأس سهمی از رابطه‌ی $x_S=\frac{-b}{2a}$ بدست می‌آید.

$$x_S=1\to\frac{-b}{2a}=1\to\frac{a}{2(2)}=1\to a=4$$

از طرفی مختصات رأس سهمی در معادله‌ی سهمی، صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}1=2-a+b\to 1=2-4+b\to b=3\to a^2+b^2=16+9=25$$

۱۱۴.گزینه ۳ ضابطه‌ی یک تابع درجه‌ی دوم که محور xها را در نقاط x_1 و x_2 قطع می‌کند را می‌توان به صورت $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ نشان داد. پس ضابطه‌ی این تابع را می‌توان به صورت $f(x)=a(x-3)(x+2)$ نشان داد و چون تابع، محور عرض را در نقطه‌ای به عرض یک قطع می‌کند پس نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}1=a(-3)(2)\to a=-\frac{1}{6}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم به این صورت است.

$$f(x)=-\frac{1}{6}(x-3)(x+2)\to f(1)=-\frac{1}{6}(-2)(3)=1$$

۱۱۵.گزینه ۱

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=2\ ,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$$

$$\alpha\beta^3+\beta\alpha^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=-1(4-2(-1))=-6$$

۱۱۶.گزینه ۱ روش اول: توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^2+bx+a=0$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bkx+ck^2=0$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می باشند.

$$x^2-3x+1=0\xrightarrow{\text{معکوس(جای } c,a \text{ عوض شود)}}x^2-3x+1=0\xrightarrow{\text{۳برابر(} b \text{ در ۳ و } c \text{ در } 3^2 \text{ضرب شود)}}x^2-9x+9=0$$

روش دوم: اگر Y را ریشه‌ی جدید بنامیم داریم: $Y=\frac{3}{x}$ که از آن $x=\frac{3}{Y}$ حاصل می‌شود.

$$\xrightarrow{\text{معادله}}(\frac{۳}{Y})^۲-۳(\frac{۳}{Y})+۱=۰\to\frac{۹}{Y^۲}-\frac{۹}{Y}+۱=۰\xrightarrow{\times Y^۲}\to ۹-۹Y+Y^۲=۰\to Y^۲-۹Y+۹=۰$$

۱۱۷.گزینه ۲

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲\ ,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲}+\underbrace{\alpha^۳+\beta^۳}=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۴+۲+۸+۶=۲۰$$

۱۱۸.گزینه ۳

$$x^۲-(۲m+۱)x+m(m+۱)=۰\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x-m)(x-(m+۱))=۰\to x=m\ ,\ x=m+۱$$

باتوجه به صورت سوال داریم:

$$m<۳<m+۱\to\begin{cases}m<۳\\ ۳<m+۱\to ۲<m\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}۲<m<۳\ \text{یا}\ m\in(۲,۳)$$

۱۱۹.گزینه ۲ چون شکل دارای Max است پس ضریب $x^۲$ باید منفی باشد بنابراین گزینه‌های اول و سوم حذف می‌شوند و چون طول رأس سهمی مثبت است باید $\frac{-b}{۲a}$ مثبت باشد بنابراین گزینه‌ی چهارم نیز حذف می‌شود.

۱۲۰.گزینه ۲

کافی است ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۳x-۹=۰$ را به دست آوریم.

$$\Delta=b^۲-۴ac=۹-۴(۲)(-۹)=۹+۷۲=۸۱\to x_۱,x_۲=\frac{۳\pm۹}{۴}=۳,-\frac{۳}{۲}$$

$$x'_۱=\frac{۱}{x_۱^۲}-۲=\frac{۱}{۹}-۲=-\frac{۱۷}{۹}\quad\text{و}\quad x'_۲=\frac{۱}{x_۲^۲}-۲=\frac{۱}{\frac{۹}{۴}}-۲=\frac{۴}{۹}-۲=-\frac{۱۴}{۹}$$

$$x^۲-Sx+P=۰\to x^۲-(-\frac{۱۷}{۹}-\frac{۱۴}{۹})x+\underbrace{(-\frac{۱۷}{۹})(-\frac{۱۴}{۹})}_{P}=۰\to x^۲+\frac{۳۱}{۹}x+P=۰$$

$$\xrightarrow{\times۹}۹x^۲+۳۱x+۹P=۰\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۹x^۲+ax+b=۰}a=۳۱$$

۱۲۱.گزینه ۲

دقت کنید که $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۷$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$ می‌باشند.

$$\alpha\beta^{-۲}+\beta\alpha^{-۲}=\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{۳۴۳-۳(-۱)(۷)}{(-۱)^۲}=۳۴۳+۲۱=۳۶۴$$

۱۲۲.گزینه ۳

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۲\quad\text{و}\quad P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

چون α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۲x-۱=۰$ می‌باشند بنابراین در معادله صدق می‌کنند. پس داریم:

$$\alpha\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}\alpha^۲-۲\alpha-۱=۰\to\alpha^۲-۲\alpha=۱\to\frac{\alpha^۲-۲\alpha}{\beta}=\frac{۱}{\beta}$$

$$\beta\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}\beta^۲-۲\beta-۱=۰\to\beta^۲-۲\beta=۱\to\frac{\beta^۲-۲\beta}{\alpha}=\frac{۱}{\alpha}$$

یعنی باید معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشد. برای این منظور کافی است جای c و a را عوض کنید.

$$x^۲-۲x-۱=۰\xrightarrow{\text{جای } a,c \text{ عوض}}-x^۲-۲x+۱=۰\to x^۲+۲x-۱=۰$$

۱۲۳.گزینه ۴

$$Max\to x^۲\ \text{ضریب}<۰\to m<۰:I$$

$$\text{تابع، محورطول را قطع نمی کند}\to\Delta<۰\to b^۲-۴ac<۰\to ۳۲-۴m(m-۲)<۰\to ۳۲-۴m^۲+۸m<۰$$

$\rightarrow ۴m^{۲} - ۸m - ۳۲ > ۰ \rightarrow m^{۲} - ۲m - ۸ > ۰ \rightarrow (m-۴)(m+۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۲$ یا $m > ۴ : II$

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $\frac{-b}{۲a}$ منفی می‌باشد.

$$\frac{-b}{۲a} < ۰ \rightarrow \frac{-۴\sqrt{۲}}{۲m} < ۰ \rightarrow m > ۰ : III$$

که اشتراک جواب‌های I و II و III تهی می‌باشد.

۱- ۱	۲- ۱	۳- ۴	۴- ۴	۵- ۲
۶- ۴	۷- ۳	۸- ۴	۹- ۱	۱۰- ۴
۱۱- ۴	۱۲- ۱	۱۳- ۱	۱۴- ۳	۱۵- ۳
۱۶- ۲	۱۷- ۳	۱۸- ۴	۱۹- ۱	۲۰- ۲
۲۱- ۴	۲۲- ۱	۲۳- ۳	۲۴- ۳	۲۵- ۲
۲۶- ۴	۲۷- ۲	۲۸- ۲	۲۹- ۲	۳۰- ۲
۳۱- ۱	۳۲- ۲	۳۳- ۳	۳۴- ۱	۳۵- ۴
۳۶- ۳	۳۷- ۳	۳۸- ۱	۳۹- ۴	۴۰- ۱
۴۱- ۳	۴۲- ۱	۴۳- ۲	۴۴- ۳	۴۵- ۲
۴۶- ۳	۴۷- ۲	۴۸- ۲	۴۹- ۳	۵۰- ۲
۵۱- ۳	۵۲- ۳	۵۳- ۴	۵۴- ۲	۵۵- ۴
۵۶- ۱	۵۷- ۲	۵۸- ۲	۵۹- ۳	۶۰- ۱
۶۱- ۱	۶۲- ۴	۶۳- ۳	۶۴- ۲	۶۵- ۴
۶۶- ۱	۶۷- ۱	۶۸- ۳	۶۹- ۱	۷۰- ۲
۷۱- ۴	۷۲- ۳	۷۳- ۲	۷۴- ۱	۷۵- ۳
۷۶- ۲	۷۷- ۲	۷۸- ۲	۷۹- ۳	۸۰- ۴
۸۱- ۲	۸۲- ۲	۸۳- ۱	۸۴- ۱	۸۵- ۳
۸۶- ۲	۸۷- ۳	۸۸- ۴	۸۹- ۱	۹۰- ۱
۹۱- ۲	۹۲- ۲	۹۳- ۴	۹۴- ۳	۹۵- ۴
۹۶- ۲	۹۷- ۲	۹۸- ۱	۹۹- ۳	۱۰۰- ۴
۱۰۱- ۴	۱۰۲- ۱	۱۰۳- ۱	۱۰۴- ۱	۱۰۵- ۴
۱۰۶- ۱	۱۰۷- ۲	۱۰۸- ۳	۱۰۹- ۲	۱۱۰- ۴
۱۱۱- ۳	۱۱۲- ۱	۱۱۳- ۲	۱۱۴- ۳	۱۱۵- ۱
۱۱۶- ۱	۱۱۷- ۲	۱۱۸- ۳	۱۱۹- ۲	۱۲۰- ۲
۱۲۱- ۲	۱۲۲- ۳	۱۲۳- ۴		