

۱. در تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & x \geq 2 \\ 2x + 1 & x < 2 \end{cases}$  حاصل  $f(f(4))$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۲. اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \frac{x}{1-x}$  باشد، حاصل  $f(g(3))$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۳. اگر  $f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+1} & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$  مقدار  $f \circ f(8)$  کدام است؟

۱ (۱)  $f(15)$       ۲ (۲)  $f(35)$       ۳ (۳)  $f(24)$       ۴ (۴)  $f(17)$

۴. اگر  $f(x) = x^2 - 1$  و  $(f-g)(x) = (x-1)^2$  حاصل  $g \circ f(2)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۵. اگر به ازای  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  دامنه‌ی تابع  $f(1-3x)$  به صورت  $[a, b]$  باشد،  $b-a$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)  $\frac{1}{3}$       ۳ (۳)  $\frac{2}{3}$       ۴ (۴) ۳

۶. اگر  $f(x) = x^2 - 2$  و  $f(g(x)) = x^2 - 2x - 1$  آن گاه  $g(x)$  کدام می‌تواند باشد؟

۱ (۱)  $x - 2$       ۲ (۲)  $2 - x$       ۳ (۳)  $x + 1$       ۴ (۴)  $1 - x$

۷. اگر  $f(x) = 3x - 1$  و  $f \circ g(x) = x + 2$  باشد، مقدار  $g(1)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)  $\frac{4}{3}$

۸. اگر  $f(x) = 3x - 1$  و  $f(g(x)) = x^2 - x - 1$  باشد، مقدار  $g(3)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۹. اگر  $f(x) = x^2 - 1$  و  $g(x) = x - 3$  باشد، عرض نقطه‌ی تقاطع نمودارهای توابع  $f$  و  $f \circ g$  کدام است؟

۱ (۱)  $\frac{3}{2}$       ۲ (۲)  $\frac{9}{4}$       ۳ (۳)  $\frac{7}{4}$       ۴ (۴)  $\frac{5}{4}$

۱۰. اگر  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$  و  $g(x) = \tan x$  مقدار  $f \circ g(\frac{\pi}{8})$  کدام است؟

۱ (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       ۲ (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۳ (۳) ۱      ۴ (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۱. اگر در تابع خطی  $f$  با شیب منفی داشته باشیم  $f(f(x+1)) = 9x - 3$  مقدار  $f(3) - f(1)$  کدام است؟

۱ (۱) -۶      ۲ (۲) -۹      ۳ (۳) -۱۲      ۴ (۴) -۱۸

۱۲. اگر  $f = \{(x, 2x+1) | x \in A\}$  و  $g = \{(x, x-1) | x \in A\}$  دو تابع با دامنه‌ی  $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  باشند، تابع  $f \circ g$

چند عضو دوتایی دارد؟

۱ (۱) ۵      ۲ (۲) ۴      ۳ (۳) ۳      ۴ (۴) ۲

۱۳. اگر  $f(x) = |2x| + |x+1|$  و  $g(x) = [x]$  مقدار  $g \circ f(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

۱ (۱) -۱      ۲ (۲) ۲      ۳ (۳) ۱      ۴ (۴) صفر

۱۴. اگر  $f(x) = \sqrt{(1-x^2)(x^2+5)}$  و  $g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$  باشد، دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  کدام است؟  
 (۱)  $-1 \leq x \leq 1$  (۲)  $-\sqrt{5} \leq x \leq 1$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $-1 \leq x \leq \sqrt{5}$

۱۵. اگر  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  حاصل  $f(x) - f(\frac{1}{x})$  کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

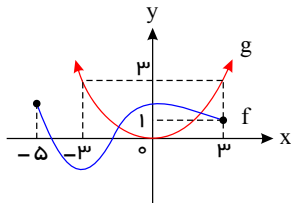
۱۶. با فرض آن که  $f = \{(-1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$  و  $g = \{(2, 4), (3, 0), (-1, 2)\}$  حاصل  $f + (f \circ g)$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(-1, 5)\}$  (۲)  $\{(1, 4)\}$  (۳)  $\{(-1, 5), (3, 4)\}$  (۴)  $\{(-1, 4), (3, 2)\}$

۱۷. در تابع  $f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi x}{4} & , x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+1} & , x > 1 \end{cases}$  مقدار  $f \circ f(\frac{2}{3})$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{\sqrt{22}}{3}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (۴) ۴

۱۸. اگر  $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ ، آن گاه دامنه‌ی تابع  $f \circ f$  شامل چند عدد صحیح است؟  
 (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۱۹. اگر  $f(2-x) + f(x-2) = 4x+1$  باشد، آنگاه  $f(3)$  کدام است؟  
 (۱) ۴ (۲) ۴٫۵ (۳) ۵ (۴) ۵٫۵

۲۰. اگر  $f(x+3) = x + \frac{5}{x}$ ، نمودار تابع  $y = 3 - f(2x)$  از کدام نقطه می‌گذرد؟  
 (۱)  $(2, 5)$  (۲)  $(2, 2)$  (۳)  $(4, -3)$  (۴)  $(8, -3)$



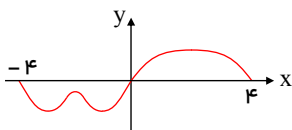
۲۱. اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  کدام است؟  
 (۱)  $[-3, 3]$  (۲)  $[1, 3]$  (۳)  $[-5, 3]$  (۴)  $\mathbb{R}$

۲۲. با توجه به شکل مقابل، حاصل  $f(\frac{1}{p})$  کدام است؟

$$x \rightarrow \frac{x}{x^2+1} \rightarrow f \rightarrow \frac{2x+1}{x^2+1}$$

(۱) ۱ (۲)  $-\frac{8}{3}$  (۳) صفر (۴)  $\frac{3}{2}$

۲۳. اگر  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \leq 0 \\ x+3 & x > 0 \end{cases}$  باشد،  $f \circ g(\sqrt{2}-1) - g \circ f(1-\sqrt{2})$  کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲



۲۴. نمودار تابع  $y = f(2x)$  به شکل مقابل است. دامنه‌ی تعریف تابع  $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$  کدام است؟  
 (۱)  $[4, 16]$  (۲)  $[0, 64]$  (۳)  $[0, 4]$  (۴)  $[4, 64]$

۲۵. اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  و  $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $g(f(x))$  کدام است؟  
 (۱)  $x-1$  (۲)  $x+1$  (۳)  $x$  (۴)  $2x$
۲۶. اگر  $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$  باشد، ضابطه‌ی  $f(x)$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $x^2 - x + 3$  (۲)  $x^2 - 2x - 1$  (۳)  $x^2 - 2x + 1$  (۴)  $x^2 - x + 1$
۲۷. اگر  $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$  و  $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $g(f(x))$  کدام است؟  
 (۱)  $x$  (۲)  $-x$  (۳)  $-x-1$  (۴)  $x+1$
۲۸. اگر  $f(x) = \frac{4x-1}{2x+1}$  و  $g(x) = \frac{4x+4}{2-x}$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $y = g(f(x))$  کدام است؟  
 (۱)  $8x$  (۲)  $4+4x$  (۳)  $6+2x$  (۴)  $x$
۲۹. اگر  $g(x) = 2x+1$  و  $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$  باشند، تابع  $f(x)$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $2x^2 + 3x + 1$  (۲)  $2x^2 - 2x + 3$  (۳)  $2x^2 - x + 4$  (۴)  $2x^2 + x + 3$
۳۰. اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  و  $g(x) = x+4$  باشند، جواب معادله‌ی  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  کدام است؟  
 (۱)  $-1, -7$  (۲)  $1, -7$  (۳)  $-1, 7$  (۴)  $1, 7$
۳۱. هرگاه  $x \rightarrow (1 + \sqrt[3]{x}) \xrightarrow{g} x$  باشد، حاصل عبارت  $f(8) + g(2)$  کدام است؟  
 (۱)  $5$  (۲)  $4$  (۳)  $3$  (۴)  $2$
۳۲. اگر  $f(g(x)) = x^2 + 1$  و  $f(x) = x^3 + 2$  مقدار  $g(2)$  کدام است؟  
 (۱)  $1$  (۲)  $\sqrt[3]{2}$  (۳)  $\sqrt[3]{3}$  (۴)  $\sqrt[3]{4}$
۳۳. اگر  $g(f(x)) = \frac{2x^2+1}{5x^2+4}$  و  $g(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$  حاصل  $f(2)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{2}{9}$  (۲)  $\frac{13}{8}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{1}{18}$
۳۴. اگر  $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$  و  $f(g(x)) = \frac{x^3+2}{2x^3-3}$  مقدار  $f(-4)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{3}{5}$  (۲)  $\frac{10}{3}$  (۳)  $-3$  (۴)  $-4$
۳۵. اگر در تابع خطی  $f$  داشته باشیم  $f(1) + 2f(3x) = 7x + 1$ ،  $f(2x-1)$ ،  $f(1)$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{7}{8}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{5}{8}$

۳۶. اگر  $f(x) = 12x - 2$  و  $f \circ g(x) = \frac{5x}{6} + 1$  ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  کدام است؟

(۱)  $g(x) = \frac{23}{72}x$  (۲)  $g(x) = \frac{5}{82}x + \frac{1}{3}$

(۳)  $g(x) = \frac{5}{72}x + \frac{1}{4}$  (۴)  $g(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{25}$

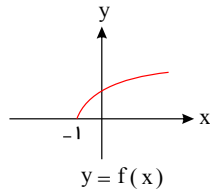
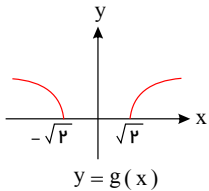
۳۷. اگر  $f(x) = \sqrt{x+7}$  و دامنه‌ی تابع  $y = g \circ f(x)$  به صورت  $[a, b]$  باشد،  $b - a$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۸. اگر  $f(x) = \sqrt{\log_2(x-1)}$  و  $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$  باشند، برد تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(۱)  $\{0, 2\}$  (۲)  $\{0, 1, 2\}$  (۳)  $\{ \}$  (۴)  $\{0\}$

۳۹. اگر نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشد، آنگاه دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g$  کدام است؟



(۱)  $[\sqrt{2}, +\infty)$

(۲)  $R - [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

(۳)  $[0, +\infty)$

(۴)  $R - (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

۴۰. اگر  $f(x) = x + 1$  و  $g(2f(x)) = \frac{x^2}{3}$  ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  کدام است؟

(۱)  $g(x) = \frac{(x-2)^2}{2}$  (۲)  $g(x) = \frac{(x-2)^2}{3}$  (۳)  $g(x) = \frac{(x-2)^2}{6}$  (۴)  $g(x) = \frac{(x-2)^2}{12}$

۴۱. اگر  $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$  و مقدار  $f(g(0)) = \frac{x^3+5}{3+x}$  مقدار  $g(0)$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{11}{4}$  (۲)  $-3$  (۳)  $-\frac{13}{4}$  (۴)  $-\frac{7}{2}$

۴۲. اگر  $f(x) = x^2 - 3x - 1$  و  $g(x) = 3x + 1$  مجموع ریشه‌های معادله‌ی  $2 = (f \circ g)(x) + 4x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{9}$  (۲)  $-\frac{1}{9}$  (۳)  $-\frac{5}{9}$  (۴)  $-\frac{4}{9}$

۴۳. اگر  $f(x) = \frac{1-3x}{x+2}$  و حاصل  $f(g(x)) = \frac{x^3}{x^5+1}$  حاصل  $g(1)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) صفر (۳)  $-\frac{2}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{3}$

۴۴. اگر  $f(x) = 2^x + 3$  و  $g(x) = \sqrt{2x - 22}$  دامنه‌ی تعریف تابع  $y = (g \circ f)(x)$  کدام است؟

(۱)  $[1, +\infty)$  (۲)  $[0, 11)$  (۳)  $[3, +\infty)$  (۴)  $[-11, +\infty)$

۴۵. اگر  $f(x) = 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \cos 2x$  دامنه‌ی تابع  $y = f(g(x))$  کدام است؟

(۱) فقط  $[1, 2]$  (۲) فقط  $[-1, 1]$  (۳)  $\{ \}$  (۴)  $\mathbb{R}$

۴۶. اگر  $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$  و  $g = \{(1, 4), (4, 2), (3, 2)\}$  تابع  $(f \circ g) + (g \circ f)$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(4, 2), (3, 2)\}$   
 (۲)  $\{(4, 2), (3, 2), (2, 4)\}$   
 (۳)  $\{(4, 4)\}$   
 (۴)  $\{\}$

۴۷. اگر  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{3}$  و ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت  $x \rightarrow [g] \rightarrow [f] \rightarrow 3x + 1$  باشد، مقدار  $g(2)$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt[3]{19}$  (۲)  $\sqrt[3]{7}$  (۳)  $\sqrt[3]{\frac{10}{3}}$  (۴) ۷

۴۸. اگر  $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$  و  $g = \{(1, 1), (2, 2), (4, 0), (0, 3)\}$  برد تابع  $(f + g) \circ (f - g)$  شامل چند عدد حقیقی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۹. اگر  $f(x) = \log_3^{x-1}$  و  $g(x) = \sqrt{3-x}$  دامنه‌ی تابع  $f(x)$  کدام بازه باشد تا ترکیب  $g \circ f(x)$  تعریف شود؟  
 (۱)  $(1, +\infty)$  (۲)  $(1, 9]$  (۳)  $(-\infty, 3]$  (۴)  $[9, +\infty)$

۵۰.  $Df \circ g = (-\infty, 1]$  ضابطه‌ی تابع  $g$  کدام یک از موارد زیر می‌تواند باشد؟  
 (۱)  $g(x) = 3 \log x$  (۲)  $g(x) = \sqrt{x}$  (۳)  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  (۴)  $g(x) = \sin x$

۵۱. توابع  $f(x) = x^3 - 7$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 2 \\ \frac{x-1}{x+1} & ; x < 2 \end{cases}$  مفروض‌اند. معادله‌ی  $(f \circ g)(x) = 1$  چند جواب حقیقی دارد؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۲. اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (5, 4)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, -1), (7, 5)\}$  تابع  $2f + (f \circ g)$  کدام است؟  
 (۱)  $\{(1, 4), (7, 4)\}$   
 (۲)  $\{(1, 4), (2, 10), (5, 8), (7, 4)\}$   
 (۳)  $\{\}$   
 (۴)  $\{(7, 4)\}$

۵۳. تابع با ضابطه‌ی  $g(x) = x^3 + 2x$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f(x)$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های ۱۲ و ۳- قطع کند، نمودار تابع  $f \circ g$  محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) ۲ و ۱- (۲) ۱ و ۲- (۳) ۲ و ۳- (۴) ۲ و ۳-

۵۴. اگر  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(f(x)) = x^2 + x - 2$  آن‌گاه حاصل  $(f \circ g)(3)$  کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲- (۴) ۳

۵۵. اگر  $g(x) = 2\sqrt[4]{8-x}$  و  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[2]{\frac{1}{2} + 6x}$  دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$  شامل چند عدد صحیح است؟  
 (۱) بی‌شمار (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۶. اگر  $f(x) = \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$  باشند، دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g$  کدام است؟  
 (۱)  $[-4, 2]$  (۲)  $[-2, 0]$  (۳)  $[-4, -1] \cup (1, 2]$  (۴)  $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۵۷. اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$  و  $g(x) = (\frac{1}{4})^x$  باشند. دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- (۱)  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$  (۲)  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  (۳)  $(-2, 0)$  (۴)  $(-1, \frac{1}{2})$

۵۸. اگر  $f(x+1) = 3x - 2$  و  $g(x-2) = 5x$ ، جواب معادله‌ی  $f(x) - 1 = g(f(3))$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۵۹. اگر  $g(x) = x^2 - 2x$ ،  $f(x) = x^2 + 1$ ، نمودار  $f$  و محور عرض‌ها در کدام عرض متقاطع‌اند؟  $(f(x) > 1)$

- (۱)  $\sqrt{2} - 1$  (۲)  $\sqrt{2} + 1$  (۳)  $1 - \sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2}$

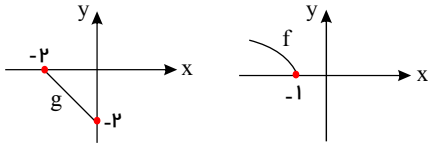
۶۰. با فرض آن که  $f(g(x)) = x^2 - 2x$  و  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ، ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  با فرض  $g(x) \geq 2$  کدام است؟

- (۱)  $g(x) = x + 1$  (۲)  $g(x) = 2 - |x|$  (۳)  $g(x) = 2 + |x - 1|$  (۴)  $g(x) = 2 - |x + 1|$

۶۱. اگر  $f(x) = 2x + 1$  و  $g \circ f(x) = 4x^2 + 12x + 5$  باشد، حاصل  $(f + g) \circ g(-2)$  کدام است؟

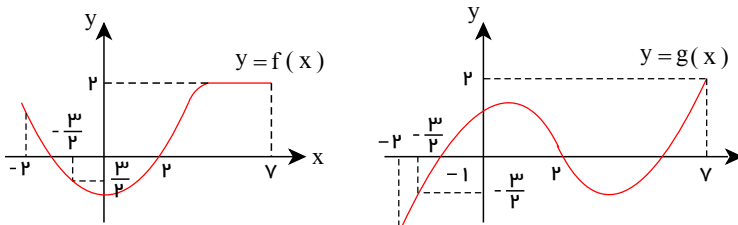
- (۱) ۹ (۲) ۲۵ (۳) -۷ (۴) -۹

۶۲. نمودارهای زیر مربوط به توابع  $f$ ،  $g$  هستند. اگر دامنه‌ی تابع  $f \circ g$  به صورت  $[a, b]$  باشد،  $b - a$  کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) ۱٫۵ (۳) ۲ (۴) ۲٫۵

۶۳. نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر هستند. عبارت  $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف شده است؟



- (۱)  $(-2, 2) \cup (2, 7)$   
 (۲)  $[-2, -\frac{3}{2}] \cup [2, 7]$   
 (۳)  $(-2, 7) - \{-\frac{3}{2}, 2\}$   
 (۴)  $[-2, -\frac{3}{2}] \cup (2, 7)$

۶۴. اگر  $f(x - \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} + 6$ ، آنگاه  $f(\sqrt{2})$  کدام می‌تواند باشد؟  $(x \neq 0)$

- (۱)  $6 - \sqrt{6}$  (۲)  $\sqrt{2} + 6$  (۳)  $4 - \sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{2} - 4$

۶۵. اگر  $g(x) = 2x + 1$  و  $f \circ g(x) = 4x^2 - x - 1$ ، آن‌گاه  $(f - g)(1)$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۴

۶۶. اگر  $f(x) = [\frac{1}{x}]$  و  $g(x) = |x|$  حاصل  $g(f(1 - \sqrt{2})) - g(f(1 + \sqrt{2}))$  کدام است؟  $([ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۵ (۳) -۱ (۴)  $-\frac{1}{2}$

صادق طاهری  
سوالیات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۷۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

۶۷. دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$  و  $g = \{(2, -1), (-1, 4), (-2, 3), (-4, -3)\}$  مفروض‌اند. اگر  $g(f(a)) = 3$  باشد، کدام است  $a$ ؟

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۸. اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \frac{x-1}{2}$ ، آن‌گاه مجموع طول نقاط برخورد تابع  $f \circ g$  با محور  $x$ ها کدام است؟

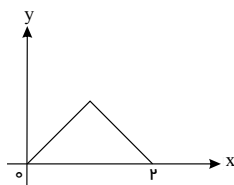
- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۲

۶۹. اگر  $f(x) = \sqrt{6+x-x^2}$ ، دامنه‌ی تعریف تابع  $y = f(1-2x)$  کدام است؟

- (۱)  $[-5, 5]$  (۲)  $[-3, 2]$  (۳)  $[-2, 3]$  (۴)  $[-1, \frac{3}{2}]$

۷۰. تابع  $f(x) = 4x - 3$ ، با دامنه‌ی  $[-2, 1]$  مفروض است. اگر دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ f$  بازه‌ی  $[a, b]$  باشد،  $b - a$  کدام است؟

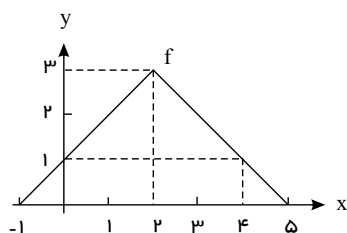
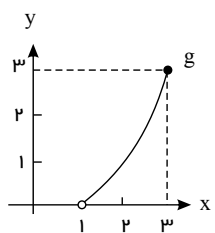
- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳) ۲ (۴) ۳



۷۱. اگر نمودار  $f$  به شکل زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع  $g$  با ضابطه‌ی  $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(x)}$  کدام است؟

- (۱)  $(-1, 1) - \{0\}$  (۲)  $[0, 1]$  (۳)  $[-1, 1] - \{0\}$  (۴)  $(0, 1]$

۷۲. اگر نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشند، دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  کدام است؟



- (۱)  $[-1, 5]$  (۲)  $(0, 4]$  (۳)  $(1, 3]$  (۴)  $(0, 4)$

۷۳. در کدام محدوده از دامنه‌ی تابع  $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ، تابع  $f \circ f$  قابل تعریف است؟

- (۱)  $x \geq -1$  (۲)  $x \geq 1$  (۳)  $x \leq 3$  (۴)  $-1 \leq x \leq 3$

۷۴. اگر  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱)  $[0, 1)$  (۲)  $\{0\}$  (۳)  $(-1, 1)$  (۴)  $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

۷۵. اگر  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱)  $[0, 1]$  (۲)  $[-1, 1]$  (۳)  $\mathbb{R}$  (۴)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۱.۷۶ اگر  $g(x) = \frac{x+1}{x}$  و به ازای هر  $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  داشته باشیم  $(f \circ g)(x) + g(x) = x$ ، آن گاه ضابطه‌ی تابع  $f$  کدام است؟

$$f(x) = \frac{1+x-x^2}{x-1} \quad (۲)$$

$$f(x) = \frac{1-x-x^2}{x-1} \quad (۱)$$

$$f(x) = -\frac{1}{x-1} \quad (۴)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (۳)$$

۱.۷۷ اگر  $f = \{(-1, -2), (0, 2), (2, 1)\}$ ،  $g = \{(1, -1), (2, a^2 + a), (0, 1)\}$  و  $(2, 2) \in f \circ g$  باشد، مجموعه مقادیر  $a$  کدام است؟

$$\{0, -1\} \quad (۴)$$

$$\{0, 1\} \quad (۳)$$

$$\{1, -2\} \quad (۲)$$

$$\{1, 2\} \quad (۱)$$

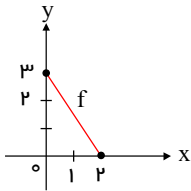
۱.۷۸ اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع  $y = f \circ f(x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$





۱.گزینه ۳

$$f(۴) \stackrel{\text{ضابطه ی بالا}}{=} \sqrt{۴} - ۱ = ۱ \rightarrow f(f(۴)) = f(۱) \stackrel{\text{ضابطه ی پایین}}{=} ۲(۱) + ۱ = ۳$$

۲.گزینه ۲

$$f \circ g(۳) = f(g(۳)) = f\left(\frac{۳}{۱-۳}\right) = f\left(-\frac{۳}{۲}\right) = \left[\frac{-۳}{۲}\right] = [-۱, ۵] = -۲$$

۳.گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} ۲ - \sqrt{x+۱} & x > ۰ \\ ۲x - ۱ & x < ۰ \end{cases}$$

$$f(۸) \stackrel{\text{ضابطه ی بالا}}{=} ۲ - \sqrt{۸+۱} = ۲ - ۳ = -۱$$

$$f \circ f(۸) = f(f(۸)) = f(-۱) \stackrel{\text{ضابطه ی پایین}}{=} ۲(-۱) - ۱ = -۳ = f(۲۴)$$

دقت کنید:

$$f(۱۵) = ۲ - \sqrt{۱۶} = -۲, \quad f(۳۵) = ۲ - \sqrt{۳۶} = -۴$$

$$f(۲۴) = ۲ - \sqrt{۲۵} = -۳, \quad f(۱۷) = ۲ - \sqrt{۱۸}$$

۴.گزینه ۲

$$(f - g)(x) = (x - ۱)^۲ \rightarrow f(x) - g(x) = (x - ۱)^۲ \rightarrow x^۲ - ۱ - g(x) = (x - ۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱ - g(x) = x^۲ + ۱ - ۲x \Rightarrow g(x) = -۲ + ۲x$$

$$g(f(۲)) = g(۲^۲ - ۱) = g(۳) = -۲ + ۲(۳) = ۴$$

۵.گزینه ۳ روش اول:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^۲} \rightarrow f(1 - ۳x) = \sqrt{1 - (1 - ۳x)^۲}$$

$$\underbrace{1 - (1 - ۳x)^۲}_{\text{مزدوج}} \geq ۰ \Rightarrow (1 - (1 - ۳x))(1 + (1 - ۳x)) \geq ۰ \Rightarrow ۳x(۲ - ۳x) \geq ۰$$

مزدوج

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in \left[0, \frac{۲}{۳}\right] \Rightarrow b - a = \frac{۲}{۳}$$

روش دوم:

$$Df(x) : 1 - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$Df(1 - ۳x) : -1 \leq 1 - ۳x \leq 1 \Rightarrow -۲ \leq -۳x \leq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq \frac{۲}{۳}$$

۶.گزینه ۴

$$f(g(x)) = x^۲ - ۲x - ۱ \rightarrow (g(x))^۲ - ۲ = x^۲ - ۲x - ۱ \Rightarrow g^۲(x) = x^۲ - ۲x + ۱ = (x - ۱)^۲$$

$$\Rightarrow g(x) = \pm(x - ۱) \Rightarrow g(x) = x - ۱ \text{ یا } g(x) = ۱ - x$$

۷.گزینه ۴

$$f \circ g(x) = x + ۲ \rightarrow f(g(x)) = x + ۲$$

$$f(x) = ۳x - ۱ \rightarrow f(g(x)) = ۳g(x) - ۱$$

$$\text{پس: } ۳g(x) - ۱ = x + ۲ \xrightarrow{x=1} ۳g(1) - ۱ = ۳ \rightarrow ۳g(1) = ۴ \rightarrow g(1) = \frac{۴}{۳}$$

۸. گزینه ۲

روش اول:

$$f(x) = 3x - 1 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 1$$

$$\text{پس: } 3g(x) - 1 = x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=3} 3g(3) - 1 = 9 - 3 - 1 \rightarrow 3g(3) = 6 \rightarrow g(3) = 2$$

روش دوم:

می توان از روابط داده شده، ضابطه‌ی  $g(x)$  را به دست آورد:

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 3g(x) - 1 \\ f(g(x)) = x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3g(x) - 1 = x^2 - x - 1 \Rightarrow 3g(x) = x^2 - x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - x}{3} \Rightarrow g(3) = \frac{3^2 - 3}{3} = 2$$

۹. گزینه ۴ برای به دست آوردن طول نقطه‌ی تقاطع دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  کافی است معادله‌ی  $f(x) = g(x)$  را حل کنیم.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x - 3)^2 - 1 \xrightarrow{f \circ g(x) = f(x)} (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2$$

$$\Rightarrow 6x = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \Rightarrow y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{می دانیم: } ۱۰. \text{ گزینه ۴}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2} \tan 2x \Rightarrow f \circ g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۱. گزینه ۱ تابع مورد نظر را به فرم  $f(x) = ax + b$  در نظر می گیریم، اکنون می توان نوشت:

$$f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b \Rightarrow f(f(x+1)) = a(ax + a + b) + b = a^2x + a^2 + ab + b$$

اکنون از تساوی  $a^2x + a^2 + ab + b = 9x - 3$  می توان دریافت:

$$a^2 = 9 \xrightarrow{a < 0} a = -3 \Rightarrow f(x) = -3x + b \Rightarrow f(3) - f(1) = (-9 + b) - (-3 + b) = -6$$

۱۲. گزینه ۲ اول توابع  $f, g$  را می نویسیم:

$$f = \{(-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$

$$g = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-2) = \emptyset \\ f \circ g(0) = f(g(0)) = f(-1) = -1 \\ f \circ g(1) = f(g(1)) = f(0) = 1 \\ f \circ g(2) = f(g(2)) = f(1) = 3 \\ f \circ g(3) = f(g(3)) = f(2) = 5 \end{cases}$$

پس  $f \circ g = \{(0, -1), (1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$  است که دارای ۴ عضو دوتایی است.

۱۳. گزینه ۳

$$f(1 - \sqrt{2}) = \underbrace{|2(1 - \sqrt{2})|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|1 - \sqrt{2} + 1|}_{\text{مثبت}} = 2(\sqrt{2} - 1) + 2 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow g \circ f(1 - \sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = [1, 4] = 1$$

۱۰ سوالات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴ - صادق طاهری

۱۴. گزینه ۳

توجه کنید که  $\cos^2 a = \cos^2 a \sin^2 a$  است.

$$Df: (1-x^2)(x^2+5) \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

همواره مثبت

$$g(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow Dg = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Dfog = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos 2x \leq 1\} = \mathbb{R}$$

همواره برقرار است

۱۵. گزینه ۳

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x^2) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} + x\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 + x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 - x^2 - \frac{1}{x^2} = 2$$

۱۶. گزینه ۱ ابتدا تابع  $fog$  را مشخص می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} fog(2) &= f(g(2)) = f(4) = \emptyset \\ fog(3) &= f(g(3)) = f(0) = \emptyset \\ fog(-1) &= f(g(-1)) = f(2) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow fog = \{(-1, 3)\}$$

باتوجه به این که دامنه‌ی تعریف توابع  $fog$  و  $f$  فقط شامل  $x$  مشترک ۱- است، می‌توان نوشت:

$$f + (fog) = \{(-1, 5)\}$$

۱۷. گزینه ۲

$$f \circ f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = f\left(\cot\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3}\right)\right) = f\left(\cot\frac{\pi}{6}\right) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

۱۸. گزینه ۴

$$Df \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Df\}$$

باتوجه به دامنه‌ی ترکیب توابع داریم:

مشخص است که دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$  برابر است با  $Df = [-1, +\infty)$ . پس داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} Df: x &\geq -1 \\ f(x) \in Df: 3 - \sqrt{x+1} &\geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 4 \Rightarrow x+1 \leq 16 \Rightarrow x \leq 15 \end{aligned} \right.$$

از اشتراک این دو جواب، دامنه‌ی  $f \circ f$  برابر با  $[-1, 15]$  می‌شود که شامل ۱۷ عدد صحیح است.

۱۹. گزینه ۲ چون در صورت سؤال  $f(3)$  را خواسته، ابتدا هر یک از عبارت‌های  $x-2$  و  $2-x$  را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:

$$x-2=3 \rightarrow x=5, \quad 2-x=3 \rightarrow x=-1$$

$$\left. \begin{aligned} x=5 &\rightarrow 5f(3) + f(-3) = 21 \\ x=-1 &\rightarrow 5f(-3) + f(3) = -3 \end{aligned} \right\} \times (-5) \rightarrow -24f(3) = -108 \rightarrow f(3) = 4,5$$

۲۰. گزینه ۳ ابتدا ضابطه‌ی  $f(x)$  و از روی آن ضابطه‌ی  $f(2x)$  را بدست می‌آوریم.

$$x+3=t \rightarrow x=t-3 \rightarrow f(t) = t-3 + \frac{5}{t-3} \rightarrow f(x) = x-3 + \frac{5}{x-3}$$

$$\rightarrow f(2x) = 2x-3 + \frac{5}{2x-3}$$

$$y = 3 - f(2x) = 3 - 2x + 3 - \frac{5}{2x-3} \rightarrow y = 6 - 2x - \frac{5}{2x-3}$$

گزینه‌ی سوم در این رابطه صدق می‌کند.

۲۱. گزینه ۱ باتوجه به نمودار داده شده دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را مشخص می‌کنیم.

$$Df = [-5, 3], \quad Dg = \mathbb{R}$$

$$Dfog = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in \mathbb{R}, g(x) \in [-5, 3]\} = \{x \in \mathbb{R}, x \in [-3, 3]\} = [-3, 3]$$

۲۲. گزینه ۴ با توجه به شکل داده شده  $f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{2x+1}{x^2+1}$  است. برای محاسبه ی  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  باید  $\frac{x}{x^2+1}$  را برابر  $\frac{1}{2}$  قرار دهید.

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2+1 = 2x \rightarrow x^2-2x+1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{2x+1}{x^2+1} \xrightarrow{x=1} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

گزینه ۳

$$f \circ g(\sqrt{2}-1) = f\left(\underbrace{g(\sqrt{2}-1)}_{\text{ضابطه ی پایین } g}\right) = f(\sqrt{2}-1+3) = f(2+\sqrt{2}) = \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 1$$

$$g \circ f(1-\sqrt{2}) = g(f(1-\sqrt{2})) = g\left(\frac{|1-\sqrt{2}|}{1-\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{-(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}\right) = g(-1) \stackrel{\text{ضابطه ی بالا}}{=} (-1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{پس: } f \circ g(\sqrt{2}-1) - g \circ f(1-\sqrt{2}) = 1 - 0 = 1$$

۲۴. گزینه ۲ با توجه به شکل داده شده، دامنه‌ی تعریف تابع  $y = f(2x)$  به صورت  $[-4, 4]$  است. بنابراین دامنه‌ی تعریف تابع  $f(x)$  برابر  $[-8, 8]$  است. حال دامنه‌ی تعریف تابع  $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$  را به دست می‌آوریم.

$$Dy = \{x \geq 0, \sqrt{x} \in [-8, 8]\} = \{x \geq 0, -8 \leq \sqrt{x} \leq 8\} \\ = \{x \geq 0, 0 \leq \sqrt{x} \leq 8\} = \{x \geq 0, 0 \leq x \leq 64\} = [0, 64]$$

گزینه ۴

$$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{4x-2+2x+2}{2x+2-2x+1} = \frac{6x}{3} = 2x$$

گزینه ۴ روش اول:

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند  $x = 2$  را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای  $x$  آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

گزینه ۳ روش اول:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x} + 2} = \frac{2-x-6x-9}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = \frac{-7(x+1)}{2-x} = -x-1$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 1$  را انتخاب می‌کنیم.

$$g(f(1)) = g(5) = \frac{1-15}{5+2} = \frac{-14}{7} = -2$$

فقط در گزینه‌ی سوم به ازای  $x = -1$  عدد  $-2$  به دست می‌آید.

## ۱۲ سوالات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴ صادق طاهری

۲۸. گزینه ۱ در ضابطه‌ی  $g(x)$  به جای  $x$  ضابطه‌ی  $f(x)$  را قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \frac{4f(x) + 4}{2 - f(x)} = \frac{4\left(\frac{4x-1}{2x+1}\right) + 4}{2 - \frac{4x-1}{2x+1}} = \frac{16x - 4 + 8x + 4}{2x+1} = \frac{24x}{2x+1} = \frac{24x}{3} = 8x$$

۲۹. گزینه ۳ روش اول:

$$f \circ g(x) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

برای پیدا کردن  $f(x)$  باید  $2x+1$  را مساوی  $t$  قرار دهیم.

$$2x+1 = t \rightarrow 2x = t-1 \rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t^2 + 1 - 2t}{4}\right) + 3(t-1) + 5$$

$$\rightarrow f(t) = 2t^2 + 2 - 4t + 3t - 3 + 5 \rightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4$$

$$\rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

روش دوم:  $f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$  است. به جای  $x$  یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می‌دهیم:

$$x = 0 \rightarrow f(1) = 5$$

گزینه‌ای درست است که اگر در آن  $x = 1$  را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه‌ی سوم است.

۳۰. گزینه ۱

$$\begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4) - 1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6} \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2} \end{cases}$$

$$\text{پس: } \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \rightarrow 6x^2 + 36x + 7x + 42 = 2x^2 + 4x + 7x + 14$$

$$\rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

۳۱. گزینه ۲ از روی ماشین داده شده متوجه می‌شویم که  $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$  و  $g(f(x)) = x$  است.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 1 + \sqrt[3]{x} \rightarrow f(8) = 1 + \sqrt[3]{8} = 1 + 2 = 3 \\ g(f(x)) &= x \rightarrow g(1 + \sqrt[3]{x}) = x \xrightarrow{x=1} g(2) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(8) + g(2) = 3 + 1 = 4$$

۳۲. گزینه ۳

$$f(x) = x^3 + 2 \rightarrow f(g(x)) = (g(x))^3 + 2$$

$$\text{پس: } (g(x))^3 + 2 = x^2 + 1 \rightarrow (g(x))^3 = x^2 - 1 \rightarrow g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \rightarrow g(2) = \sqrt[3]{3}$$

سوالیات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۱۳۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴ صادق طاهری

۳۳. گزینه ۱

$$g(x) = \frac{3x+1}{2x+4} \rightarrow g(f(x)) = \frac{3f(x)+1}{2f(x)+4}$$

از طرفی  $g(f(x)) = \frac{2x^2+1}{5x^2+4}$  است. بنابراین داریم:

$$\frac{3f(x)+1}{2f(x)+4} = \frac{2x^2+1}{5x^2+4} \xrightarrow{x=2} \frac{3f(2)+1}{2f(2)+4} = \frac{8+1}{20+4} \rightarrow \frac{3f(2)+1}{2f(2)+4} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow 24f(2)+8 = 6f(2)+12 \rightarrow 18f(2) = 4 \rightarrow f(2) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

۳۴. گزینه ۳

$$f(g(x)) = \frac{x^3+2}{2x^3-3} \rightarrow f\left(\frac{x+3}{x-2}\right) = \frac{x^3+2}{2x^3-3}$$

برای محاسبه ی  $f(-4)$  کافی است که  $\frac{x+3}{x-2}$  را برابر  $-4$  قرار دهیم.

$$\frac{x+3}{x-2} = -4 \rightarrow x+3 = -4x+8 \rightarrow 5x = 5 \rightarrow x = 1$$

$$f\left(\frac{x+3}{x-2}\right) = \frac{x^3+2}{2x^3-3} \xrightarrow{x=1} f(-4) = \frac{3}{-1} = -3$$

۳۵. گزینه ۳ تابع خطی را به صورت  $f(x) = ax + b$  نشان می دهند.

$$f(2x-1) + 2f(3x) = 7x+1 \rightarrow a(2x-1) + b + 2(3ax+b) = 7x+1$$

$$\rightarrow 2ax - a + b + 6ax + 2b = 7x + 1 \rightarrow 8ax - a + 3b = 7x + 1$$

$$8a = 7 \rightarrow a = \frac{7}{8}, \quad -a + 3b = 1 \rightarrow -\frac{7}{8} + 3b = 1 \rightarrow b = \frac{5}{8}$$

$$\text{پس: } f(x) = \frac{7}{8}x + \frac{5}{8} \rightarrow f(1) = \frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۳۶. گزینه ۳

$$f \circ g(x) = \frac{5x}{6} + 1 \rightarrow f(g(x)) = \frac{5x}{6} + 1$$

$$f(x) = 12x - 2 \rightarrow f(g(x)) = 12g(x) - 2$$

$$\text{پس: } 12g(x) - 2 = \frac{5x}{6} + 1 \rightarrow 12g(x) = \frac{5x}{6} + 3 \rightarrow g(x) = \frac{5}{72}x + \frac{1}{4}$$

۳۷. گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt{x+7} \rightarrow Df: x+7 \geq 0 \rightarrow x \geq -7$$

$$g(x) = \sqrt{2-x} \rightarrow Dg: 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \{x \geq -7, \sqrt{x+7} \leq 2\}$$

$$= \{x \geq -7, x+7 \leq 4\} = \{x \geq -7, x \leq -3\} = \{-7 \leq x \leq -3\}$$

یعنی  $x \in [-7, -3]$  است یعنی  $a = -7$  و  $b = -3$  می باشند پس  $b - a = 4$  است



۱۴ سوالات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴ صادق طاهری

گزینه ۴.۳۸

$$g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4} = \sqrt{-(x^2 - 4x + 4)} = \sqrt{-(x-2)^2} \rightarrow Dg = \{2\}$$

تابع  $gof(x)$  یعنی  $g(f(x))$  و چون دامنه‌ی تابع  $g(x)$  فقط  $x=2$  می‌باشد، پس فقط مقادیری را قبول می‌کند که به ازای آن  $f(x)=2$  شود از طرفی چون  $g(2)=0$  است پس برد تابع  $gof(x)$  برابر  $\{0\}$  خواهد شد.

گزینه ۴.۳۹ با توجه به نمودارهای داده شده، دامنه‌ی تعریف توابع  $f$  و  $g$  را می‌نویسیم.

$$Df: x \geq -1, \quad Dg = x \leq -\sqrt{2} \quad \text{یا} \quad x \geq \sqrt{2} = R - (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$Df \circ g = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in R - (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \underbrace{g(x) \geq -1}_{\text{همواره برقرار است}}\}$$

همواره برقرار است  
( $g(x) > 0$  است)

$$= R - (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

گزینه ۴.۴۰

$$f(x) = x + 1 \rightarrow 2f(x) = 2x + 2$$

$$g(2f(x)) = \frac{x^2}{3} \rightarrow g(2x+2) = \frac{x^2}{3} \quad 2x+2 = t \rightarrow x = \frac{t-2}{2}$$

$$\rightarrow g(t) = \frac{1}{3} \left( \frac{t-2}{2} \right)^2 = \frac{(t-2)^2}{12} \rightarrow g(x) = \frac{(x-2)^2}{12}$$

گزینه ۳.۴۱

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \rightarrow f(g(x)) = \frac{3g(x)+1}{g(x)-2}$$

$$\text{پس: } \frac{3g(x)+1}{g(x)-2} = \frac{x^3+5}{3+x} \xrightarrow{x=0} \frac{3g(0)+1}{g(0)-2} = \frac{5}{3} \rightarrow 9g(0)+3 = 5g(0)-10$$

$$\rightarrow 4g(0) = -13 \rightarrow g(0) = -\frac{13}{4}$$

گزینه ۲.۴۲

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (3x+1)^2 - 3(3x+1) - 1 = 9x^2 + 1 + 6x - 9x - 3 - 1 = 9x^2 - 3x - 3$$

$$4x + f \circ g(x) = 2 \rightarrow 4x + 9x^2 - 3x - 3 = 2 \rightarrow 9x^2 + x - 5 = 0$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{9}$$

گزینه ۲.۴۳

$$f(x) = \frac{1-3x}{x+2} \rightarrow f(g(x)) = \frac{1-3g(x)}{g(x)+2}$$

از طرفی  $f(g(x)) = \frac{x^3}{x^5+1}$  است. بنابراین داریم:

$$\frac{1-3g(x)}{g(x)+2} = \frac{x^3}{x^5+1} \xrightarrow{x=1} \frac{1-3g(1)}{g(1)+2} = \frac{1}{1+1} \rightarrow \frac{1-3g(1)}{g(1)+2} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow g(1)+2 = 2-6g(1) \rightarrow 7g(1) = 0 \rightarrow g(1) = 0$$

سوالیات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۱۵۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴ صادق طاهری

گزینه ۳.۴۴

$$f(x) = 2^x + 3 \rightarrow Df = R$$

$$g(x) = \sqrt{2x - 22} \rightarrow Dg: 2x - 22 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 22 \rightarrow x \geq 11$$

$$Dgof = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \{x \in R, 2^x + 3 \geq 11\} = \{x \in R, 2^x \geq 8\}$$

$$= \{x \in R, 2^x \geq 2^3\} = \{x \in R, x \geq 3\} = x \geq 3 \rightarrow x \in [3, +\infty)$$

گزینه ۴.۴۵

$$f(x) = 2\sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x} \rightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} Df = -1 \leq x \leq 1$$

$$g(x) = \cos 2x \rightarrow Dg = R$$

$$Dfog = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in R, \underbrace{-1 \leq \cos 2x \leq 1}_{\text{همواره برقرار است}}\} = R$$

گزینه ۴.۴۶

$$fog(x) = f(g(x)) = f(g(1)) = f(4) = \emptyset$$

$$f(g(4)) = f(2) = 1$$

$$f(g(3)) = f(2) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} fog(x) = f(g(x)) = f(g(1)) = f(4) = \emptyset \\ f(g(4)) = f(2) = 1 \\ f(g(3)) = f(2) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow fog(x) = \{(4, 1), (3, 1)\}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(f(1)) = g(2) = \emptyset$$

$$g(f(2)) = g(1) = 4$$

$$g(f(3)) = g(2) = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} gof(x) = g(f(x)) = g(f(1)) = g(2) = \emptyset \\ g(f(2)) = g(1) = 4 \\ g(f(3)) = g(2) = \emptyset \end{array} \right\} \rightarrow gof(x) = \{(2, 4)\}$$

چون  $fog(x)$  و  $gof(x)$  دامنه‌ی مشترک ندارند با یکدیگر جمع نمی‌شوند.

$$fog(x) + gof(x) = \{ \}$$

گزینه ۱.۴۷ از نمودار داده شده نتیجه می‌شود که  $f(g(x)) = 3x + 1$  است.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{3} \rightarrow f(g(x)) = \frac{g^3(x) + 2}{3}$$

$$\text{پس: } \frac{g^3(x) + 2}{3} = 3x + 1 \xrightarrow{x=2} \frac{g^3(2) + 2}{3} = 6 + 1 \rightarrow g^3(2) + 2 = 21 \Rightarrow g^3(2) = 19 \rightarrow g(2) = \sqrt[3]{19}$$

گزینه ۱.۴۸ برای مشخص کردن  $f+g$  و  $f-g$  زوج‌های مرتبی از  $f$  و  $g$  را که دارای دامنه‌های مشترک هستند را پیدا کرده به دامنه‌هایشان دست نزنید و عملیات را روی مولفه‌ی دومشان انجام می‌دهیم.

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

$$g = \{(1, 1), (2, 2), (4, 0), (0, 3)\}$$

$$\rightarrow f+g = \{(1, 3), (2, 3)\} = F, f-g = \{(1, 1), (2, -1)\} = G$$

$$\text{پس: } (f+g) \circ (f-g) = FOG = F(G(1)) = F(1) = 3$$

$$F(G(2)) = F(-1) = \emptyset \rightarrow (f+g) \circ (g-f) = \{(1, 3)\}$$

بنابراین برد تابع تنها شامل عدد ۳ می‌باشد.

گزینه ۲.۴۹

$$\log_a A \leq m \xrightarrow{a>1} A \leq a^m \text{ می‌دانیم}$$

$$f(x) = \log_3 x^{-1} \rightarrow Df: x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$g(x) = \sqrt{3-x} \rightarrow Dg: 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$Dgof(x) = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \{x > 1, \log_3 x^{-1} \leq 3\} = \{x > 1, x-1 \leq 2^3\}$$

$$= \{x > 1, x \leq 9\} = 1 < x \leq 9 \rightarrow x \in (1, 9]$$

۵۰. گزینه ۳ ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع  $f$  را به دست می‌آوریم:

$$Df: 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$$

و با توجه به این که  $Dfog = \{x \in Dg, g(x) \in Df\}$  به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینه ۱ اول: } Dfog = \{x > 0, \log x^3 \leq 1\} = \{x > 0, x^3 \leq 10\} = \{x > 0, x \leq \sqrt[3]{10}\} = (0, \sqrt[3]{10}] \rightarrow \text{نادرست}$$

$$\text{گزینه ۲ دوم: } Dfog = \{x \geq 0, \sqrt{x} \leq 1\} = \{x \geq 0, x \leq 1\} = [0, 1] \rightarrow \text{نادرست}$$

$$\text{گزینه ۳ سوم: } Dfog = \{x \in R, \sqrt[3]{x} \leq 1\} = \{x \in R, x \leq 1\} = (-\infty, 1] \rightarrow \text{درست}$$

$$\text{گزینه ۴ چهارم: } Dfog = \{x \in R, \sin x \leq 1\} = R \rightarrow \text{نادرست}$$

۵۱. گزینه ۲ چون  $fog(x) = 1$  است در ابتدا باید بیابیم که تابع  $f(x)$  به ازای چه مقادیری از  $x$  برابر یک است پس باید معادله‌ی  $f(x) = 1$  را حل کنیم.

$$f(x) = 1 \rightarrow x^3 - 7 = 1 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

پس برای محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی  $f(g(x)) = 1$  باید معادله‌ی  $g(x) = 2$  را حل کنیم.

$$g(x) = 2 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 2 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}, x \geq 2 \rightarrow \text{جواب‌ها غیرقابل قبول اند} \\ \frac{x-1}{x+1} = 2 \rightarrow 2x+2 = x-1 \rightarrow x = -3, x < 2 \rightarrow \text{قابل قبول است} \end{cases}$$

بنابراین معادله یک جواب حقیقی دارد.

۵۲. گزینه ۳

$$fog(x) = f(g(x)) = f(g(2)) = f(3) = \emptyset$$

$$f(g(4)) = f(-1) = \emptyset$$

$$f(g(7)) = f(5) = 4 \rightarrow fog(x) = \{(7, 4)\}$$

از طرفی  $2f = \{(1, 4), (2, 10), (5, 8)\}$  است و چون  $fog(x)$  و  $2f$  دامنه‌ی مشترکی ندارند پس  $2f + fog(x) = \{\}$  است.

۵۳. گزینه ۱

کافی است که معادله‌ی  $fog(x) = 0$  را حل کنیم.

$$f(g(x)) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌های معادله‌ی } f(x) = 12 \\ \text{برابر } 3, 12 \text{ هستند} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 + 2x = 12 \rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \\ x^3 + 2x = -3 \rightarrow x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

اکنون هر یک از این معادلات را حل می‌کنیم.

$$x^3 + 2x - 12 = 0 \rightarrow x^3 - 8 + 2x - 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 + 4 + 2x) + 2(x-2) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(x-2)}_{\text{فاکتور}}(x^2 + 4 + 2x + 2) = 0 \rightarrow (x-2)\underbrace{(x^2 + 2x + 6)}_{\Delta < 0} = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x^3 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x^3 + 1 + 2x + 2 = 0 \rightarrow (x+1)(x^2 + 1 - x) + 2(x+1) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(x+1)}_{\text{فاکتور}}(x^2 + 1 - x + 2) = 0 \rightarrow (x+1)\underbrace{(x^2 - x + 3)}_{\Delta < 0} = 0 \rightarrow x = -1$$

البته می توانستیم معادلات را حل نکنیم و با جایگذاری گزینه ها در معادلات به جواب برسیم.

صادق طاهری      سوالات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۱۷۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

۵۴. گزینه ۲

$$g(f(x)) = x^2 + x - 2 \rightarrow g(2x+1) = x^2 + x - 2$$

$$f \circ g(3) = f(g(3)) \xrightarrow[2x+1=3 \rightarrow x=1]{g(3)=0} f(0) = 1$$

۵۵. گزینه ۴

$$\log_a A \leq m \xrightarrow{a>1} A \leq a^m \quad \text{می دانیم:}$$

ابتدا دامنه‌ی تعریف توابع  $f$  و  $g$  را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \log \sqrt{x^2 + 6x} \rightarrow Df : x^2 + 6x > 0 \rightarrow x(x+6) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -6 \text{ یا } x > 0$$

$$g(x) = 2\sqrt[4]{8-x} \rightarrow Dg : 8-x \geq 0 \rightarrow x \leq 8$$

$$Dg \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \{x < -6 \text{ یا } x > 0, \log \sqrt{x^2 + 6x} \leq 8\}$$

$$= \{x < -6 \text{ یا } x > 0, x^2 + 6x \leq (\sqrt{2})^8\} = \{x < -6 \text{ یا } x > 0, x^2 + 6x - 16 \leq 0\}$$

$$= \{x < -6 \text{ یا } x > 0, (x+8)(x-2) \leq 0\} = \{x < -6 \text{ یا } x > 0, -8 \leq x \leq 2\}$$

$$= [-8, -6) \cup (0, 2] \rightarrow \text{این بازه شامل ۴ عدد صحیح -۸ و -۷ و -۱ و ۲ می‌باشد}$$

۵۶. گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$Df : 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$Dg : x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$Df \circ g = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, \log_3(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x \leq 3^3\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, (x+4)(x-2) \leq 0\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, -4 \leq x \leq 2\}$$

$$= 4 \leq x < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 2 \rightarrow [-4, -2) \cup (0, 2]$$

البته می‌توانیم  $f \circ g(x)$  را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به دست آورید.

روش دوم:

$x = -1$ : در دامنه‌ی تعریف  $g$  قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف  $f \circ g$  هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که  $x = -1$  دارد

نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

۵۷. گزینه ۱ ابتدا دامنه‌ی تعریف توابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم.

$$Df : -x^2 + x + 2 > 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2$$

$$Dg : R$$

$$Df \circ g = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in R, (\frac{1}{4})^x \in (-1, 2)\}$$

$$= \{x \in R, \underbrace{-1 < 2^{-2x} < 2}_{\text{همواره برقرار است}}\} = \{x \in R, 2^{-2x} < 2^1\} = \{x \in R, -2x < 1\}$$

$$= \{x \in R, x > -\frac{1}{2}\} = x > -\frac{1}{2} \rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$$

۵۸. گزینه ۴ ابتدا باید مقادیر  $f(3)$  و  $g(f(3))$  را به دست آوریم.

$$\begin{cases} f(x+1) = 3x - 2 \xrightarrow{x=2} f(3) = 6 - 2 = 4 \\ g(x-2) = 5x \xrightarrow{x-2=4 \rightarrow x=6} g(4) = 30 \rightarrow g(f(3)) = g(4) = 30 \end{cases}$$

حال، باید ضابطه‌ی  $f(x)$  را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f(x+1) = 3x - 2 \xrightarrow{x+1=t \rightarrow x=t-1} f(t) = 3(t-1) - 2 \rightarrow f(t) = 3t - 5 \rightarrow f(x) = 3x - 5 \\ f(x) - 1 = g(f(3)) \rightarrow 3x - 5 - 1 = 30 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12 \end{aligned}$$

۵۹. گزینه ۲

$$g(f(x)) = (f(x))^2 - 2f(x) = x^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{به دو طرف یک اضافه می کنیم}} f^2(x) - 2f(x) + 1 = x^2 + 2 \Rightarrow (f(x) - 1)^2 = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow |f(x) - 1| = \sqrt{x^2 + 2} \xrightarrow{f(x) > 1} f(x) - 1 = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + 1$$

(محور عرض، طولش صفر است)

۶۰. گزینه ۳ از  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  می توان دریافت  $f(g(x)) = g^2(x) - 4g(x) + 3$  پس می توان نوشت:

$$g^2(x) - 4g(x) + 3 = x^2 - 2x$$

اگر به طرفین تساوی بالا عدد ۱ را اضافه کنیم خواهیم داشت:

$$g^2(x) - 4g(x) + 4 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow (g(x) - 2)^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow \underbrace{|g(x) - 2|}_{+} = |x - 1| \quad (\text{چون } g(x) \geq 2 \text{ است داخل قدرمطلق، مثبت است})$$

$$\Rightarrow g(x) - 2 = |x - 1| \Rightarrow g(x) = 2 + |x - 1|$$

۶۱. گزینه ۳

ابتدا ضابطه‌ی  $g(x)$  را یافته، سپس مطابق مقادیر به دست آمده، حاصل  $(f+g) \circ g(-2)$  را می یابیم.

$$\left. \begin{aligned} g(2x+1) &= 4x^2 + 12x + 5 \\ 2x+1 = t \Rightarrow x &= \frac{t-1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5$$

$$\Rightarrow g(t) = t^2 - 2t + 1 + 6t - 6 + 5 = t^2 + 4t \Rightarrow g(x) = x^2 + 4x$$

$$(f+g) \circ g(-2) = (f+g)(-4) = f(-4) + g(-4) = -7 + 0 = -7$$

۶۲. گزینه ۱ ابتدا دامنه‌ی  $f, g$  و معادله‌ی تابع  $g(x)$  را به دست می آوریم:

$$Dg = [-2, 0], Df = (-\infty, -1]$$

نمودار تابع  $g$  از دو نقطه‌ی  $A(-2, 0)$  و  $B(0, -2)$  می گذرد. حال معادله‌ی تابع را می نویسیم:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y}{x + 2} = \frac{-2}{-2} = -1 \rightarrow y = -x - 2 \rightarrow g(x) = -x - 2$$

حال داریم:

$$Df \circ g = \{x \in Dg, g(x) \in Df\} = \{x \in [-2, 0], g(x) \in (-\infty, -1]\}$$

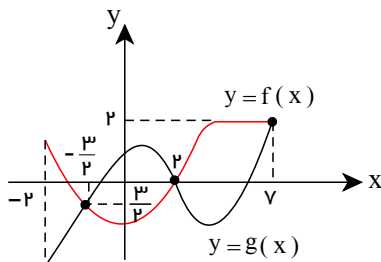
$$g(x) \in Df \Rightarrow -x - 2 \leq -1 \Rightarrow -x \leq 1 \Rightarrow x \geq -1$$

$$Df \circ g = \{x \in [-2, 0], x \geq -1\} = [-1, 0] \Rightarrow b - a = 0 - (-1) = 1$$

۶۳. گزینه ۴ برای یافتن دامنه‌ی  $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$  باید  $x$  هایی را بیابیم که برای آن‌ها حاصل  $f(x) - g(x)$  مثبت است،

یعنی باید داشته باشیم  $f(x) - g(x) > 0$  یا  $f(x) > g(x)$ .

توجه کنید که  $f(x) - g(x)$  نمی تواند برابر صفر باشد چون باعث صفر شدن مخرج کسر میشود.



اگر نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم خواهیم داشت:

باتوجه به شکل به ازای مقادیری از  $x$  که به  $(2, 7) \cup [-2, -\frac{3}{2}]$  تعلق دارد  $f(x)$  بزرگتر از  $g(x)$  است.

۶۴. گزینه ۱

$$(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2 = 4 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 4 + (x - \frac{1}{x})^2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{4 + (x - \frac{1}{x})^2}$$

$$\Rightarrow f(x - \frac{1}{x}) = \pm \sqrt{4 + (x - \frac{1}{x})^2} + 6$$

$$\xrightarrow{x - \frac{1}{x} = t} f(t) = \pm \sqrt{4 + t^2} + 6 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \pm \sqrt{6} + 6$$

۶۵. گزینه ۴

$$f \circ g(x) = 4x^2 - x - 1 \rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - x - 1 \rightarrow f(2x+1) = 4x^2 - x - 1$$

$$\xrightarrow{x=0} f(1) = -1$$

$$g(x) = 2x + 1 \rightarrow g(1) = 2(1) + 1 = 3$$

$$\text{پس: } (f - g)(1) = f(1) - g(1) = -1 - 3 = -4$$

۶۶. گزینه ۳ هر یک از عبارات را جداگانه محاسبه می کنیم.

$$f(g(1 - \sqrt{2})) = f(\underbrace{1 - \sqrt{2}}_{-}) = f(\sqrt{2} - 1) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right] = \left[ \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \right] = \left[ \frac{\sqrt{2} + 1}{1} \right] = 2$$

$$g(f(1 - \sqrt{2})) = g\left(\left[ \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \right]\right) = g\left(\left[ \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right]\right) = g\left(\left[ \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - 2} \right]\right)$$

$$= g\left(\left[ \frac{-1 - \sqrt{2}}{-1} \right]\right) = g(-3) = |-3| = 3$$

$$\text{پس: } f(g(1 - \sqrt{2})) - g(f(1 - \sqrt{2})) = 2 - 3 = -1$$

۶۷. گزینه ۱

باید مشخص کنید به ازای کدام  $x$  در تابع  $g$  حاصل برابر ۳ می شود

$$g(f(a)) = 3 \rightarrow f(a) = -2$$

$$a \geq 0 \rightarrow f(a) = \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{a} = -2 \text{ امکان ندارد}$$

$$a < 0 \rightarrow f(a) = -\sqrt{-a} \rightarrow -2 = -\sqrt{-a} \rightarrow -a = 4 \rightarrow a = -4$$

۶۸. گزینه ۳

$$f \circ g(x) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0 \xrightarrow{x \geq 0} \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \rightarrow (x-1)^2 = 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \rightarrow x = 3 & \text{ق ق} \\ x-1 = -2 \rightarrow x = -1 & \text{غ ق ق (با توجه به } x \geq 0 \text{)} \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0 \xrightarrow{x < 0} 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = 0 \rightarrow x-1+1 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (غ ق ق (با توجه به شرط))}$$

۶۹. گزینه ۴ ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع  $f$  را به دست می‌آوریم برای این کار، زیر رادیکال را بزرگ تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.



تعیین علامت  
 $6 + x - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 3$   
 حال، برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف  $y = f(1-2x)$  بدین صورت عمل می‌کنیم:  
 $-2 \leq 1-2x \leq 3 \rightarrow -3 \leq -2x \leq 2 \xrightarrow{\div(-2)} \frac{3}{2} \geq x \geq -1 \rightarrow x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$   
 البته می‌توانید ابتدا  $f(1-2x)$  را تشکیل داده و سپس دامنه‌ی تعریف آن را به دست آورید.  
 ۷۰. گزینه ۲ برای حل این تست از تعریف دامنه‌ی تعریف ترکیب توابع استفاده می‌کنیم.

$$Df \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Df\} = \{x \in [-2, 1], -2 \leq 4x - 3 \leq 1\}$$

$$= \{x \in [-2, 1], 1 \leq 4x \leq 4\} = \{x \in [-2, 1], \frac{1}{4} \leq x \leq 1\} = \frac{1}{4} \leq x \leq 1$$

$$Df \circ f = \left[\frac{1}{4}, 1\right] \rightarrow b - a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۷۱. گزینه ۴ با توجه به شکل، دامنه‌ی تعریف تابع  $f$  به صورت  $[0, 2]$  می‌باشد برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف  $f(1-x)$  بدین صورت عمل می‌کنیم.

$$0 \leq 1-x \leq 2 \rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

تابع  $g(x)$  تابعی است کسری که مخرج آن  $f(x)$  است برای بدست آوردن ریشه‌های مخرج کافی است  $f(x)$  را مساوی صفر قرار دهیم.

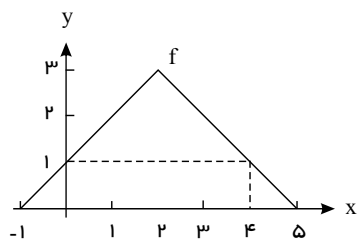
$$f(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

$$Dg(x) = Df(1-x) \cap Df(x) - \{x | f(x) = 0\} = [-1, 1] \cap [0, 2] - \{0, 2\} = [0, 1] - \{0, 2\} = (0, 1)$$

۷۲. گزینه ۴ دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Dg \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Dg\}$$

از روی نمودارهای  $f$  و  $g$  داریم:  $Dg = (1, 3], Df = [-1, 5]$  بنابراین  $Dg \circ f = \{x \in [-1, 5], f(x) \in (1, 3]\}$  است. باید حدود  $x$  را طوری تعیین کنیم که داشته باشیم  $1 < f(x) \leq 3$ . با توجه به نمودار  $f$  باید  $0 < x < 4$  باشد.



پس  $Dg \circ f = \{x \in [-1, 5], x \in (0, 4)\} = (0, 4)$  است.

۷۳. گزینه ۴

$$f(x) = 1 - \sqrt{x+1} \rightarrow Df : x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$Df \circ f(x) = \{x \in Df, f(x) \in Df\} = \left\{x \geq -1, 1 - \sqrt{x+1} \geq -1\right\}$$

$$= \left\{x \geq -1, \sqrt{x+1} \leq 2\right\} = \{x \geq -1, x+1 \leq 4\} = \{x \geq -1, x \leq 3\} = -1 \leq x \leq 3$$

۷۴. گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f, g$  را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \rightarrow Df = R - \{-1, 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow Dg : x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$Dg \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \underbrace{\{x \neq 1, x \neq -1\}}_f, \quad 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\}$$

$$\frac{\overbrace{1+x^2}^+}{1-x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \quad (II)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1+x^2-1-x^2}{1-x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{x}{\text{عبارت} \leq 0} \left| \begin{array}{ccccccc} -\infty & -1 & 0 & 1 & +\infty \\ - & + & 0 & + & - \end{array} \right.$$

$$\rightarrow x < -1 \quad \text{یا} \quad x > 1 \quad \text{یا} \quad x = 0 \quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب  $x = 0$  می‌رسیم.

۷۵. گزینه ۲ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f$  و  $g$  را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \rightarrow Df = R$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow Dg: x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$Dg \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Dg\} = \underbrace{\{x \in R\}}_I, 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$\frac{\overbrace{1-x^2}^+}{\underbrace{1+x^2}^+} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 : II$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{\overbrace{-2x^2}^{\text{منفی یا صفر}}}{\underbrace{1+x^2}^+} \leq 0 \quad III: \text{همواره برقرار است}$$

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب  $-1 \leq x \leq 1$  می‌رسیم. ( $x \in [-1, 1]$ )

۷۶. گزینه ۲

$$f \circ g(x) + g(x) = x \rightarrow f(g(x)) + g(x) = x \rightarrow f\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x+1}{x} = x$$

$$\rightarrow f\left(\frac{x+1}{x}\right) = x - \frac{x+1}{x} \rightarrow f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

برای پیدا کردن  $f(x)$  باید  $\frac{x+1}{x}$  را برابر  $t$  قرار دهیم.

$$\frac{x+1}{x} = t \rightarrow x+1 = tx \rightarrow tx - x = 1 \rightarrow x(t-1) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} - 1}{\frac{1}{t-1}} \xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{1}{t-1} - 1 - t + 1 = \frac{1}{t-1} - t = \frac{1-t^2+t}{t-1} \rightarrow f(x) = \frac{1-x^2+x}{x-1}$$

روش دوم:

ابتدای حل، مانند روش اول است تا به این جا می‌رسیم:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2 - x - 1}{x} \xrightarrow{\text{عددی دلخواه جای } x \text{ قرار دهید}} x = 1 \rightarrow f\left(\frac{1+1}{1}\right) = \frac{1-1-1}{1} \rightarrow f(2) = -1$$

گزینه‌ای درست است که اگر به جای  $x$  آن عدد ۲ قرار دهید حاصل برابر ۱- شود. (گزینه‌ی دوم)

۲۲ سوالات ترکیب توابع - مهندس صادق طاهری - ۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴ صادق طاهری

۷۷. گزینه ۴

$$(2, 2) \in f \circ g \rightarrow f(g(2)) = 2 \rightarrow f(a^2 + a) = 2 \xrightarrow{f(0)=2} a^2 + a = 0$$

$$\rightarrow a(a+1) = 0 \rightarrow a = 0, a = -1$$

۷۸. گزینه ۳ از روی شکل مشخص است که  $Df = [0, 2]$  است. حال با داشتن دو نقطه از این خط، معادله ی خط را می نویسیم.

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 3}{x} = \frac{3}{-2}$$

$$\rightarrow 2y - 6 = -3x \rightarrow 2y = -3x + 6 \rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$Df \circ f = \{x \in Df, f(x) \in Df\} = \{0 \leq x \leq 2, \underbrace{0 \leq -\frac{3}{2}x + 3 \leq 2}_*$$

$$* : 0 \leq -\frac{3}{2}x + 3 \leq 2 \rightarrow -3 \leq -\frac{3}{2}x \leq -1 \xrightarrow{\times(-\frac{2}{3})} 2 \geq x \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{پس: } Df \circ f = \left\{ 0 \leq x \leq 2, \frac{2}{3} \leq x \leq 2 \right\} = \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

که در این بازه دو عدد صحیح  $(x = 1, 2)$  وجود دارد.

## پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۵۷۶۹۸۷

۳ -۵	۲ -۴	۳ -۳	۲ -۲	۳ -۱
۴ -۱۰	۴ -۹	۲ -۸	۴ -۷	۴ -۶
۳ -۱۵	۳ -۱۴	۳ -۱۳	۲ -۱۲	۱ -۱۱
۳ -۲۰	۲ -۱۹	۴ -۱۸	۲ -۱۷	۱ -۱۶
۴ -۲۵	۲ -۲۴	۳ -۲۳	۴ -۲۲	۱ -۲۱
۱ -۳۰	۳ -۲۹	۱ -۲۸	۳ -۲۷	۴ -۲۶
۳ -۳۵	۳ -۳۴	۱ -۳۳	۳ -۳۲	۲ -۳۱
۴ -۴۰	۴ -۳۹	۴ -۳۸	۴ -۳۷	۳ -۳۶
۴ -۴۵	۳ -۴۴	۲ -۴۳	۲ -۴۲	۳ -۴۱
۳ -۵۰	۲ -۴۹	۱ -۴۸	۱ -۴۷	۴ -۴۶
۴ -۵۵	۲ -۵۴	۱ -۵۳	۳ -۵۲	۲ -۵۱
۳ -۶۰	۲ -۵۹	۴ -۵۸	۱ -۵۷	۴ -۵۶
۴ -۶۵	۱ -۶۴	۴ -۶۳	۱ -۶۲	۳ -۶۱
۲ -۷۰	۴ -۶۹	۳ -۶۸	۱ -۶۷	۳ -۶۶
۲ -۷۵	۲ -۷۴	۴ -۷۳	۴ -۷۲	۴ -۷۱
		۳ -۷۸	۴ -۷۷	۲ -۷۶