۱ رابطهٔ $R=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}, |x|+|y|=۲\}$، چند عضو زوج مرتب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۸

۲ رابطهٔ $R=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}, ۲x+y\leq ۷\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۹

۳ رابطهٔ $A=\left\{(۳,m^{۲}),(۲,۱)(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\right\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

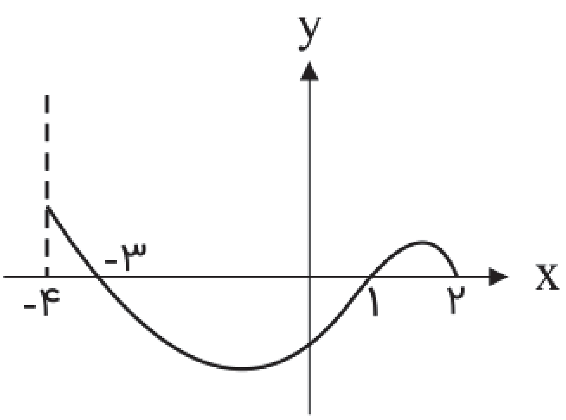
۱) -۲ ۲) -۱
۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

۴ اگر $f(x)=۳+\sqrt{۲x}$ آنگاه $f(۸)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳
۳) ۷ ۴) ۸

۵ شکل روبرو، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$
۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$



۶ اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}}$، دامنه تابع $f(۳-x)$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$
۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۷ اگر $f\left(x\right)=\sqrt{x+\left|x+۲\right|}$، دامنهٔ تابع $f\left(-x\right)$ کدام است؟

۱) $x\leq -۱$ ۲) $x\geq -۱$

۳) $x\leq ۱$ ۴) $x\geq ۱$

۸ دو تابع با ضابطه های $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^۲+x-۲$ مفروض اند. اگر $g(f(x))=-۲$ آنگاه مجموعهٔ مقادیر x کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{Z}$

۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+[-x]+\sqrt{\sin \pi x-۱}$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

۳) صفر ۴) تعریف نشده

۱۰ اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{۱-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟

۱) $(۰,\infty)$ ۲) $[۰,\infty)$

۳) $(۱,\infty)$ ۴) $[۱,\infty)$

۱۱ اگر $f(x)=x-[x]$ آنگاه برد تابع $g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰]$ ۲) $[۰,۱]$

۳) $\{-۱,۰\}$ ۴) $\{۰,۱\}$

۱۲ اگر $f(x)=-x+[x]$ و $g(x)=۲^x$، انگاه برد تابع gof کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۱]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},۱)$

۳) $(۱,۲]$ ۴) $[۱,۲)$

۱۳ اگر جزء صحیح $(x^۲+x)$ برابر (-۱) باشد، آنگاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟ ([ ] : جزء صحیح)

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

۱۴ اگره $x^۲+x<۰$ باشد، حاصل $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) صفر ۴) ۱

۱۵ برای هر عدد طبیعی $n > ۲$ حاصل $[\sqrt{n^۲ - ۲n}]۲ - [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}]$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱   ۲) ۲
۳) ۳   ۴) ۴

۱۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $x \in [-۲, ۶)$، $y = ۲\left[\frac{x}{۲}\right] + ۱$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل‌شده است؟

۱) ۳   ۲) ۴
۳) ۵   ۴) ۶

۱۷ نمودار تابع با ضابطهٔ $x \in [-۲\,,\,۳)$؛ $y = x - [x]$ از n پاره خط مساوی به اندازهٔ Lتشکیل‌شده است. دوتایی مرتب $(n\,,\,L)$ کدام است؟

۱) $(۴\,,\,۱)$ ۲) $(۴\,,\,\sqrt{۲})$
۳) $(۵\,,\,۱)$ ۴) $(۵\,,\,\sqrt{۲})$

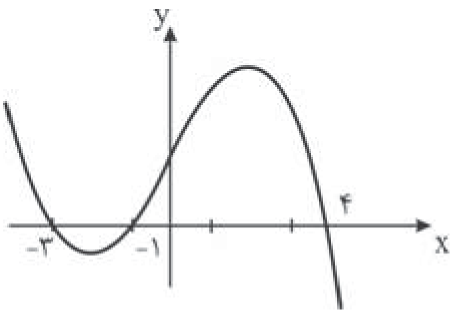
۱۸ نمودار تابع $y = [x^۲]$، روی بازهٔ $x \in (-۲\,,\,۲)$ از چند پاره خط تشکیل‌شده است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) ۴   ۲) ۵
۳) ۶   ۴) ۷

۱۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = a.b^x \;;\; b > ۰$، داریم $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$. مقدار $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟

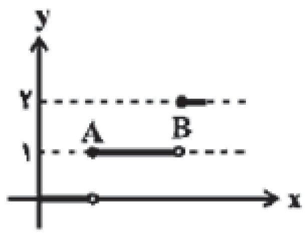
۱) ۶   ۲) ۸
۳) ۱۲   ۴) ۲۴

۲۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x - ۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



۱) $[-۱, ۱] \cup [۰, ۶]$
۲) $[-۳, ۱] \cup [۰, ۲]$
۳) $[-۵, -۳] \cup [-۱, ۲]$
۴) $[-۵, -۳] \cup [۰, ۲]$

۲۱ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = [\sqrt{x}]$ است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۲ اگر مجموعهٔ جواب معادلهٔ $۲[x]=۱-[-x]$ به‌صورت $(a,b)\bigcup\{c\}$ باشد، $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۲۳ اگر $[x]+[x-\frac{۳}{۲}]-[x-\frac{۱}{۲}]=۳$ باشد، آنگاه مقادیر قابل‌قبول x کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) $(۴,۵)$
۲) $[۴,۵)$
۳) $(۲,۳)$
۴) $[۲,۳)$

۲۴ اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^{۲}}$، دامنهٔ تابع $f(۳-x)$، کدام است؟

۱) $[۰,۲]$
۲) $[۰,۳]$
۳) $[۱,۲]$
۴) $[۱,۳]$

۲۵ مجموعه جواب معادلهٔ $[۲x+۵]=۱$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $[-۲,\frac{-۳}{۲})$
۲) $(-۲,-\frac{۳}{۲}]$
۳) $(-۵,-۲]$
۴) $[-۵,-۲)$

۲۶ کمترین مقدار تابع $f(x)=[۱+x]+[۱-x]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۲۷ اگر n عددی طبیعی بوده و داشته باشیم $[\sqrt{n^{۲}+۴n+۱}]=۹$، حاصل $[\sqrt{۲n^{۲}+n+۱}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۲۸ اگر $[\frac{۲x+۱}{۳}]=۲$ آن‌گاه حاصل $[\frac{۱-x}{۲}]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) فقط -۱
۲) صفر یا -۱
۳) -۱ یا -۲
۴) فقط -۲

۲۹ کدام‌یک از توابع زیر باهم مساوی نیستند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{۴-x}} \\ g(x) = \sqrt{\dfrac{x-۲}{۴-x}} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = \cot x - ۲\cot ۲x \\ g(x) = \tan x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \log x - \log(۲-x) \\ g(x) = \log(\dfrac{x}{۲-x}) \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \cot x - \tan x \\ g(x) = ۲\cot ۲x \end{cases}$

۳۰ به ازای چه مقداری از a دو تابع زیر باهم مساوی‌اند؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲+۳x+۲}{x+۱} & ; x \neq -۱ \\ ۳a+۷ & ; x = -۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x+۲$$

۱) -۲

۲) ۱

۳) ۲

۴) هیچ مقدار a

۳۱ اگر $f(x+\sqrt{۲x-۱}) = x^۲ - ۶$ باشد، حاصل $f(۱)$ کدام است؟

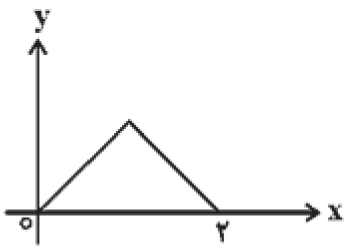
۱) $-۴\sqrt{۲}$

۲) $-۲\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) $۴\sqrt{۲}$

۳۲ اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x) = \frac{f(۱-x)}{f(x)}$ کدام است؟



۱) $(-۱,۱) - \{۰\}$

۲) $[۰,۱]$

۳) $[-۱,۱] - \{۰\}$

۴) $(۰,۱]$

۳۳ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، تابع $f(x) = |۲x+a|$ در فاصلهٔ $[-۱,۲]$ یک‌به‌یک است؟

۱) $\mathbb{R} - (-۱, \frac{۱}{۲})$

۲) $[-۴,۲]$

۳) $\mathbb{R} - (-۴,۲)$

۴) $[-۱, \frac{۱}{۲}]$

۳۴ تابع $f(x) = ۱ - \sqrt{x}$ چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک - صعودی

۲) یک‌به‌یک - نزولی

۳) غیریک‌به‌یک - صعودی

۴) غیریک‌به‌یک - نزولی

۳۵ تابع $f(x)=x^{۲}-۲x-۳$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ مفروض است. اگر تابع f در بازهٔ I یک‌به‌یک باشد، بزرگ‌ترین بازهٔ I برابر با کدام گزینهٔ زیر می‌تواند باشد؟

۱) $(-\infty,۲]$
۲) $[۱,+\infty)$
۳) $[-۴,+\infty)$
۴) $(-\infty,-۴]$

۳۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$، مقدار $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

۱) ‎-۸
۲) ‎-۲
۳) ‎-۵
۴) تعریف‌نشده

۳۷ تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار دو تابع f و $f^{-۱}$ محور xها را در نقطه‌ای به طول یک قطع کنند، $f^{-۱}(۲)$ کدام است؟

۱) ‎-۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۳۸ به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+a & ;x<۱\\ ۳x+۱ & ;x\geq ۱\end{cases}$، می‌تواند یک‌به‌یک باشد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۳۹ تابع $f(x)=x^{۲}-۷x-۸$ با کدام دامنه یک‌به‌یک است؟

۱) $(-۱,۶)$
۲) $(-۲,۴)$
۳) $(-۳,-۱)$
۴) $(۰,+\infty)$

۴۰ دامنهٔ تابع معکوس $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{۹-x}$ کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$
۲) $[۰,۳]$
۳) $[-۳,۳]$
۴) $[۰,۲]$

۴۱ اگر $f=\{(-۱,۴),(۲,۳),(-۱,۴m),(m+۱,n-۱),(۵,۶),(p,n+۲)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، $m+n+p$ چقدر است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۴۲ اگر تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{x-a}$ وارون خود باشد، $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۳
۴) ۳

مهندس صادق طاهری
۰۹۱۷ ۴۴۵ ۷۱۴۴

۴۳ چه تعداد از توابع زیر یک‌به‌یک هستند؟

الف) $y = x + [x]$

ب) $y = \log x^{۲}$

ج) $y = \begin{cases} x^{۳} - ۱ & ; x \geq ۱ \\ x & ; x < ۱ \end{cases}$

د) $y = \frac{۱}{a^x} \quad ; a > ۱$

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

۴۴ برد تابع $f(x) = ۲^{x+۱}$ را به بازهٔ $(a, b]$ محدود کرده‌ایم تا برای تابع $g(x) = \sqrt{۶ - ۲x}$ ترکیب $gof^{-۱}$ تعریف شود. حداکثر مقدار $(b - a)$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۶

۳) ۸   ۴) ۱۶

۴۵ اگر رابطهٔ $f = \{(۳, ۲), (a, ۵), (۳, a^{۲} - a), (b, ۲), (-۱, ۴)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

۱) $(-۱, ۱)$ ۲) $(-۱, ۳)$

۳) $(۲, ۱)$ ۴) $(۲, ۳)$

۴۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x + \sqrt{-۲x}$ مقدار $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

۱) ‎-۸   ۲) ‎-۵

۳) ‎-۲   ۴) تعریف نشده

۴۷ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x - |۴ - ۲x|$ در بازه ای وارون پذیر است. ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ در آن بازه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}x + ۱$ و $x \geq ۴$ ۲) $\frac{۱}{۴}x - ۱$ و $x \leq ۴$

۳) $\frac{۱}{۴}x - ۱$ و $x \geq ۴$ ۴) $\frac{۱}{۴}x + ۱$ و $x \leq ۴$

۴۸ تابع فرد f معکوس پذیر است، نمودار $f^{-۱}$ نسبت به کدام مورد متقارن است؟

۱) مبدأ مختصات   ۲) محور xها

۳) محور yها   ۴) نیمساز ناحیه اول و سوم

۴۹ با توجه به ماشین $x \longrightarrow f \longrightarrow g \longrightarrow x$ اگرا $f(x) = ۲x - ۱$، انگاه $g(۰)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۵۰ اگر $f(۳x-۴)=g(x)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ آنگاه حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۵۱ اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۲x}$ باشند آنگاه حاصل $g^{-۱}(۶)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۲ نمودارهای دو تابع $f(x)=۳^{ax+b}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۹})^x$، در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند. اگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۳

۵۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=A(۲)^{Bx}$ و خط به معادلهٔ $۴y=۵x$، در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-۱}(۱۰)$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۸

۵۴ دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;\ x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ;\ x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(۳,-۲),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند.
اگر $g^{-۱}(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۴

۵۵ اگر $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، تابع $g(x)=(f(\sqrt{x}))^۲-f(x)$ چگونه است؟

۱) ثابت
۲) همانی
۳) فرد
۴) یک به یک

۵۶ دو تابع f و g به صورت مجموعهٔ زوج های مرتب بیان شده اند، در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

۱) $f\cup g$
۲) $f\cap g$
۳) $f-g$
۴) fog

۵۷ اگر $f(x)=x^۲-x-۲$ و $f(g(x))=x^۲+x-۲$، آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $x^۲-۱$
۲) $x^۲+۱$
۳) $x^۲-۲x$
۴) $x^۲+۲x$

۵۸ اگر $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g=\{(-۳,۵),(-۱,۴),(۰,۷)\}$، آنگاه بیشترین مقدار تابع $(g-f)/۲g$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴

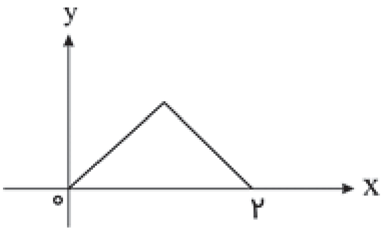
۳) ۸۴ ۴) ۴۲

۵۹ اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+\sqrt{x}$ باشد، آنگاه برد تابع $(g-f)(x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۱]$ ۲) $\mathbb{R}$

۳) $[-۱,+\infty)$ ۴) $[۰,+\infty)$

۶۰ اگر نمودار f به شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{f(۱-x)}{f(x)}$ کدام است؟



۱) $(-۱,۱)-\{۰\}$

۲) $[۰,۱]$

۳) $[-۱,۱]-\{۰\}$

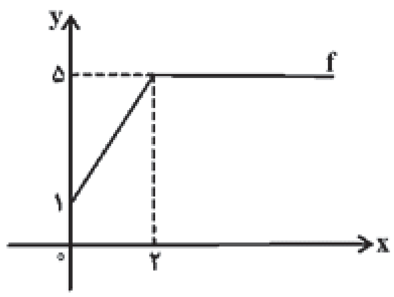
۴) $(۰,۱]$

۶۱ اگر تابع $y=g(x)$ از مبدأ بگذرد و $f(x)=\dfrac{۲x^۲+ax+b}{g(x)-۱۶}$ یک تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$ باشد، حاصل $\dfrac{f(b)}{g(a)-۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳۲}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) تعریف‌نشده

۶۲ اگر $g(x)=\{(۰,۱),(۱,۱),(-۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر تعریف شده باشد، حاصل $\frac{(f+g)(۱)}{f(۵)}$ کدام است؟



۱) ۰/۸

۲) ۰/۶

۳) ۱

۴) ۱/۲

۶۳ اگر $f=\{(۰,-۱),(۱,۰),(۴,۱),(۲,۵)\}$ باشد، آنگاه دامنهٔ تابع $\frac{f}{f-۱}$ کدام است؟

۱) $\{۰,۱,۲,۴\}$ ۲) $\{۰,۱,۴\}$

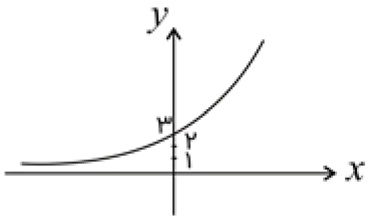
۳) $\{۰,۱,۲\}$ ۴) $\{۱,۲,۴\}$

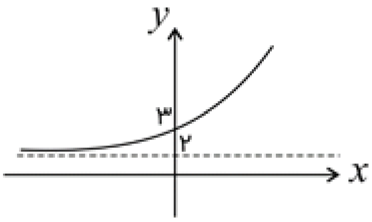
۶۴ اگر $f(x)=\sqrt{۲-\sqrt{۱-x}}$ و $g(x)=\sqrt{۲+\sqrt{۱-x}}$ باشند، دامنهٔ $(f\times g)(x)$ کدام است؟

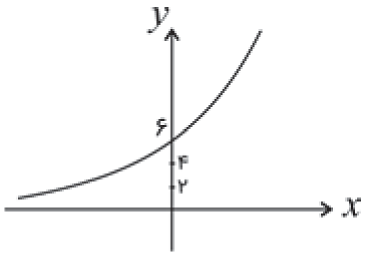
۱) $[-۳\,,+\infty)$ ۲) $[۳\,,+\infty)$

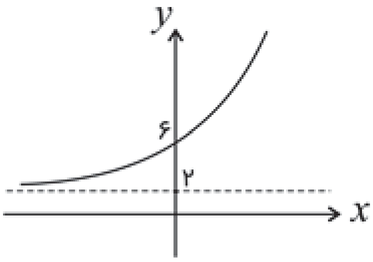
۳) $[-۳\,,۱]$ ۴) $[-۱\,,۳]$

۶۵ نمودار تابع $y = ۲ \times ۲^{x+۱} + ۲$ به کدام صورت است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


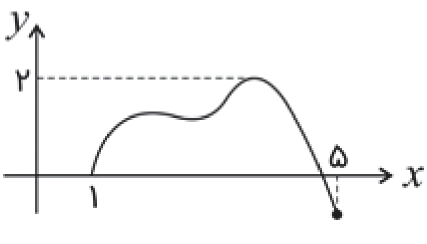
۶۶ توابع $f(x) = ۲^x$ و $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{f(x)-f(-x)}$ مفروض‌اند. اگر $g(a) = ۲$ و $g(b) = ۴$ باشد، حاصل $f(a+b)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۳}$

۶۷ اگر $f(x) = \{(-۱,۲),(۲,۳),(۰,۱),(۴,۵)\}$ و $g(x) = \begin{cases} x^۲+۱ & ; |x| \geq ۲ \\ \frac{x}{۲}+۱ & ; |x| < ۲ \end{cases}$، آنگاه مجموع تمام مقادیر برد تابع $f+g$ کدام است؟ (برد $f+g$ عضو تکراری ندارد)

۱) $\frac{۲۱۷}{۶}$
۲) ۳۹/۵
۳) ۳۴/۵
۴) $\frac{۲۴۷}{۶}$

۶۸ اگر $g = \{(-۱,۲),(۲,۳),(-۳,۱),(-۲,-۱),(۵,۵)\}$ و نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، آنگاه دامنهٔ تابع $y = \frac{f(۱-x)}{g(x)+۱}$ شامل چند عضو است؟

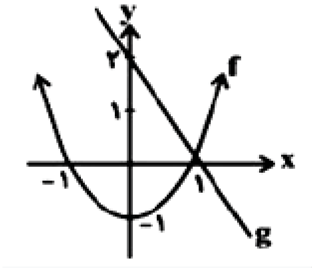


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۹ اگر $f = \{(۳,۱),(۲,۵),(-۱,۰),(-۲,-۱)\}$ و $g = \{(۳,۴),(۲,-۳),(۰,-۱),(-۲,۳)\}$ باشد، حاصل $A = \dfrac{(۲fg)(۳)}{۳(f-g)(۲)} + (\dfrac{f}{g})(-۲)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۰ اگر نمودار f و g به‌صورت مقابل باشد، حاصل $(f+(gof))(-۱)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) -۱

۴) -۲

۷۱ اگر $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(۵,۲)\}$ و $f(x)=x^۲+۱$ و $f+g=\{(۱,a),(b,۱۱),(۵,۴c)\}$ باشد، مقدار $\frac{a+b}{c}$ چقدر است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

۷۲ اگر $f=\{(۲,۱),(۱,۶),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۲,۴),(۶,۱)\}$ باشد، آنگاه برد تابع $\frac{۲f+g}{fog}$ کدام است؟

۱) $\{۱,\frac{۳}{۲}\}$ ۲) $\{۱,۱۴\}$

۳) $\{\frac{۳}{۲}\}$ ۴) $\{۱۴\}$

۷۳ اگر $f(x)=\tan x$، $g(x)=\cot x$ و $(f-g)(x_۰)=-۲$ آنگاه $(g+f)(x_۰)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۶}$

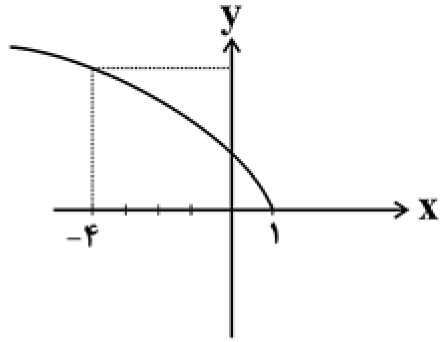
۷۴ اگر $f(x)=x+۲$ و $g(x)=\sin\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ باشند، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $(\frac{g}{f})(x)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$

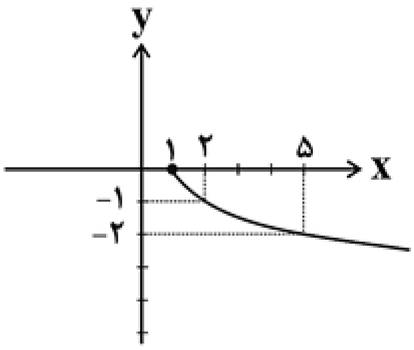
۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(-۱,۱)-\{۰\}$

۷۵ نمودار تابع $f\left(x\right)=-۲\sqrt{x-۱}$ کدام است؟

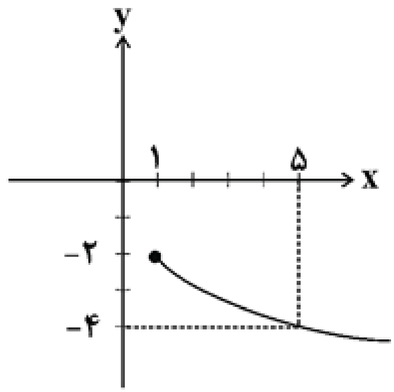
۱) ۷



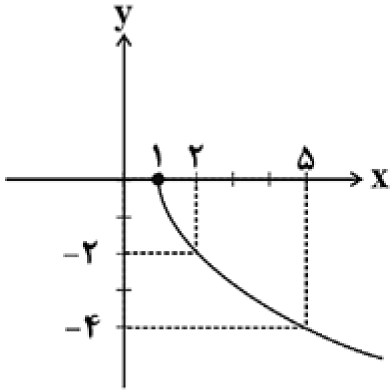
۲)



۳)



۴)



۷۶ حاصل $\left[\frac{۳n+۷}{n+۳}\right]$ برای کلیهٔ مقادیر طبیعی n کدام است؟

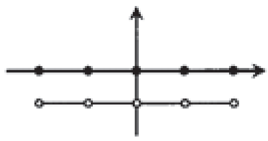
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۱

۷۷ از معادلهٔ $[x]+[-x]=x-[x]$، کدام مقادیر برای x قابل قبول است؟

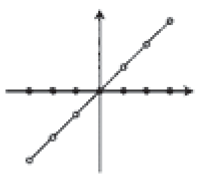
۱) ϕ
۲) $\mathbb{R}$
۳) $\mathbb{Z}$
۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

۷۸ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x([x]+[-x])$ کدام است؟

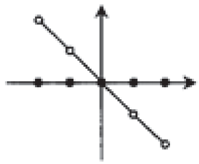
۱)



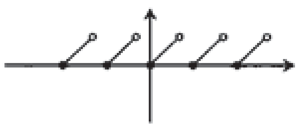
۲)



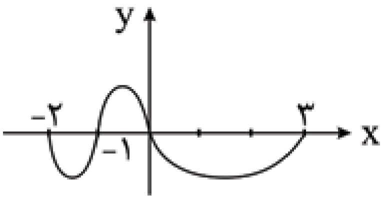
۳)



۴)



۷۹ اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{-f(-x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

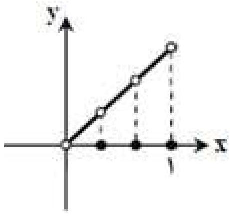


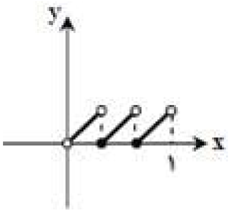
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

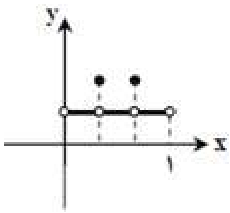
۸۰ در یک مستطیل طول از عرض ۳ واحد بیشتر است. تابعی که مساحت مستطیل (S) را برحسب محیط آن (x) بیان کند، کدام است؟

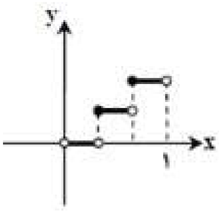
۱) $S(x)=\frac{x^۲-۳۶}{۱۶}$
۲) $S(x)=x^۲+۳۶$
۳) $S(x)=\frac{x^۲-۳۶}{۴}$
۴) $S(x)=\frac{x^۲+۳۶}{۱۶}$

۸۱ نمودار تابع $y=[۳x]$ در بازهٔ $(۰,۱)$، کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۸۲ معادلهٔ $([-x]+[x])(x^۲-۵)=-۴$ چند ریشه دارد؟ ([] علامت جزء صحیح است)

۱) ۳
۲) بی‌شمار
۳) صفر
۴) ۲

۸۳ نمودار تابع $y=\left[x^۲\right]\,;\,|x|\leq ۲$، از چند قسمت ناپیوسته تشکیل شده است؟

۱) ۲ نقطه و ۷ پاره خط
۲) ۲ نقطه و ۸ پاره خط
۳) یک نقطه و ۴ پاره خط
۴) یک نقطه و ۵ پاره خط

۸۴ در تابع خطی f داریم $f(۲)=۵$ و $f(۷)=۱۲$، مقدار $f^{-۱}(۱۹)$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۸۵ اگر f یک تابع خطی باشد به‌طوری‌که $f(۳) = ۴$ و $f(۴) = ۳$، تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۸۶ در تابع خطی f، اگر $f(۲) = ۵$ و نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ غیرمتقاطع باشند، آنگاه $f(۴)$ برابر کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۸۷ در یک تابع خطی اگر $f(۲) = ۱$ و $f(۷) = ۱۱$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۱۵)$ کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۰
۳) ۹
۴) ۸

۸۸ دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \dfrac{۲x - |x|}{\sqrt{۲x - x^۲ + ۳}}$ کدام است؟

۱) $[-۱, ۳]$
۲) $(-۱, ۳)$
۳) $[۰, ۳)$
۴) $(۱, ۳)$

۸۹ جواب‌های معادله $[۳x - ۲] = -۴$ کدام است؟ (نماد $[\,]$ جزء صحیح است)

۱) $[-\frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۳})$
۲) $(-\frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۳}]$
۳) $(-۱, -\frac{۲}{۳}]$
۴) $[-۱, -\frac{۲}{۳})$

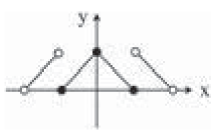
۹۰ اگر $x \notin \mathbb{Z}$ و $f(x) = [x - ۱] + [۵ - x]$، معادلهٔ $f(\frac{f(x)}{۲}) = ۳x - ۱$ چند جواب دارد؟

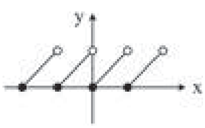
۱) ۱
۲) بی‌شمار
۳) صفر
۴) ۲

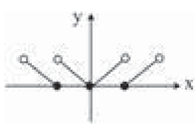
۹۱ سطح بین نمودار تابع $y = [۴x]$ و محور xها در بازهٔ $[۰, ۱)$ کدام است؟

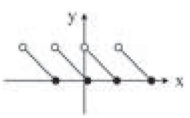
۱) ۳
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۹۲ نمودار تابع $f(x) = |x| - [|x|]$ در بازهٔ $(-۲, ۲)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۳ مجموع بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = [۲x] - ۲[x] + ۳$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۷

۹۴ نمودار $y = x - [x]$ در فاصلهٔ $-۱ \leq x < ۳$ از چند پاره‌خط ساخته می‌شود؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۹۵ اگر جزء صحیح $x + x^۲$ برابر -۱ باشد، حاصل $[x] - [x^۲] + [x^۳]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) -۲
۴) -۳

۱ گزینه ۴

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می تواند رخ دهد:

$$۱)|x| = ۲\ ,\ \ |y| = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲\ ,\ y = ۰ \Rightarrow (۲,۰),(-۲,۰) \in R$$
$$۲)|x| = ۰\ ,\ \ |y| = ۲ \Rightarrow x = ۰,\ y = \pm ۲ \Rightarrow (۰,۲),(۰,-۲) \in R$$
$$۳)|x| = ۱\ ,\ \ |y| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱,\ y = \pm ۱ \Rightarrow (۱,۱),(۱,-۱),(-۱,۱),(-۱,-۱) \in R$$

بنابراین رابطهٔ R با اعضایش به صورت زیر در می آید:

$$R = \{(۲,۰),(۰,۲),(-۲,۰),(۰,-۲),(۱,۱),(۱,-۱),(-۱,۱),(-۱,-۱)\}$$

پس رابطهٔ R دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

۲

گزینه ۴

گام اول

به شرط های اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدارx و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت هایی که $۲x+y\leq ۷$ می شود را تعیین می کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسأله بهx از یک مقدار می دهیم و مقادیر قابل قبول برای y را مشخص می کنیم.

$$۱)\quad x=۱\Rightarrow ۲x=۲\xrightarrow{۲x+y\leq ۷}۲+y\leq ۷\Rightarrow y\leq ۵\xrightarrow{y\in N}y=۱,۲,۳,۴,۵$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی مورد نظر را دارند:

$$(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵)$$

$$۲)x=۲\Rightarrow ۲x=۴\xrightarrow{۲x+y\leq ۷}۴+y\leq ۷\Rightarrow y\leq ۳\xrightarrow{y\in N}$$

$$y=۱,۲,۳\Rightarrow (۲,۱),(۲,۲),(۲,۳)\in R$$

$$۳)x=۳\Rightarrow ۲x=۶\xrightarrow{۲x+y\leq ۷}۶+y\leq ۷\Rightarrow y\leq ۱\xrightarrow{y\in N}y=۱$$

در این حالت تنها زوج مرتب $(۳,۱)$ عضو رابطهٔ R است.

به ازای مقادیر $x\geq ۴$، هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی شود. بنابراین رابطهٔ R با زوج مرتب های تشکیل دهندهٔ آن به صورت زیر در می آید:

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$$

پس مجموعهٔ R دارای ۹ عضو به صورت زوج مرتب است.

۳

گزینه ۲

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفهٔ اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفهٔ اول آن ها با هم برابر بود مؤلفه های دوم هم با هم برابر باشند.

$$A=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$$

$$(۳,m^۲),(۳,m+۲)\in A\xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}}m^۲=m+۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۲\\ m=-۱\end{cases}$$

مقادیر به دست آمده برای m را بررسی می کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m=۲\Rightarrow A=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۳,۲),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

به ازای $m=۲$ دو زوج مرتب $(۲,۱)$ و $(۲,۴)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m=-۱\Rightarrow A=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است پس $m=-۱$ تنها مقدار قابل قبول برای m است.

۴

گزینه ۳

گام اول

ساده تر از این امکان ندارد. ضابطهٔ $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبهٔ $f(۸)$ کافی است در ضابطهٔ داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم .

گام دوم

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸) = ۳ + \sqrt{۲ \times ۸} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷$$
$$\Rightarrow f(۸) = ۷$$

۵

گزینه ۴

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد پس داریم: $xf(x) \geq ۰$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می کنیم در چه بازه هایی $xf(x) \geq ۰$ برقرار است. داریم:

x	-۴	-۳		۰		۱		۲
x	-		-	۰	+		+	
f(x)	+	۰	-		-	۰	+	۰
xf(x)	-	۰	+	۰	-	۰	+	۰
			ج				ج	

دو بازهٔ مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$ درمی آید.

۶

گزینه ۴

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس با توجه به محدودهٔ قابل قبول برای x، بازه ای که در آن تابع $f(۳-x)$ تعریف شده است را مشخص می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{۲x - x^۲} \Rightarrow ۲x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x(۲ - x) \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲$$
$$\overset{\times(-۱)}{\Rightarrow} -۲ \leq -x \leq ۰ \overset{+۳}{\Rightarrow} ۱ \leq ۳ - x \leq ۳ \Rightarrow D_{f(۳-x)} = [۱, ۳]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطهٔ $f(۳-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می آوریم.

$$f(x) = \sqrt{۲x - x^۲} \Rightarrow f(۳ - x) = \sqrt{۲(۳ - x) - (۳ - x)^۲}$$
$$= \sqrt{۶ - ۲x - ۹ + ۶x - x^۲} = \sqrt{-x^۲ + ۴x - ۳} \Rightarrow -x^۲ + ۴x - ۳ \geq ۰ \overset{\times(-۱)}{\Rightarrow}$$
$$x^۲ - ۴x + ۳ \leq ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x - ۱) \leq ۰ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۳ \Rightarrow D_f = [۱, ۳]$$

۷

گزینه ۳

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطهٔ $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطهٔ $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}\Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}=\sqrt{|-x+۲|-x}$$

$$|-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow \begin{cases} x>۲: -x+۲<۰\Rightarrow |-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow x-۲-x\geq ۰\Rightarrow -۲\geq ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ x\leq ۲: -x+۲\geq ۰\Rightarrow |-x+۲|-x\geq ۰\Rightarrow -x+۲-x\geq ۰\Rightarrow -۲x+۲\geq ۰ \\ \qquad \Rightarrow ۲x\leq ۲\Rightarrow x\leq ۱ \end{cases}$$

با توجه به بازهٔ اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$، به صورت $x\leq ۱$ در می آید.

۸

گزینه ۳

مقدار $[x]+[-x]$ برای اعداد صحیح و غیر صحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x\in\mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x\notin\mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\ (x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطهٔ $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=۰\Rightarrow g(f(x))=g(۰)\xrightarrow{g(x)=x^۲+x-۲} g(۰)=۰+۰-۲=-۲$$

بنابراین به ازای $x\in\mathbb{Z}$ معادلهٔ $g(f(x))=-۲$ برقرار است.

$$x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=-۱\Rightarrow g(f(x))=g(-۱)\xrightarrow{g(x)=x^۲+x-۲}$$
$$g(-۱)=(-۱)^۲+(-۱)-۲=۱-۱-۲=-۲\Rightarrow g(f(x))=-۲$$

پس رابطهٔ $g(f(x))=-۲$ به ازای تمام xهای صحیح و غیر صحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

۹

گزینه ۱

گام اول

تابع $\sqrt{\sin\pi x - ۱}$ در صورتی تعریف شده است که $\sin\pi x - ۱ \geq ۰$ باشد و چون همواره $\sin\pi x \leq ۱$ برقرار است پس باید $\sin\pi x = ۱$ باشد. در این حالت $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ می شود که یک عدد غیر صحیح است، بنابراین حاصل $[x] + [-x]$ برابر عدد ۱- می شود.

گام دوم

حالا سراغ محاسبهٔ مقدار $f(x)$ و هم چنین مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ می رویم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin\pi x - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

$$f(-\frac{۱}{۲}f(x)) = f(-\frac{۱}{۲}(-۱)) = f(\frac{۱}{۲}) = [\frac{۱}{۲}] + [-\frac{۱}{۲}] + \sqrt{\sin\frac{\pi}{۲} - ۱}$$

$$= ۰ - ۱ + \sqrt{۱ - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

۱۰

گزینه ۱

برای به دست آوردن برد تابع gof ابتدا باید ضابطهٔ آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x] \ , \ g(x) = \frac{۱ - x}{x} \Rightarrow gof(x) = g(f(x)) = \frac{۱ - f(x)}{f(x)} =$$

$$\frac{۱ - x + [x]}{x - [x]} = \frac{۱}{x - [x]} - ۱$$

حواستان باشد به ازای هرx، $۰ \leq x - [x] < ۱$ است. اما چون در این تست در مخرج کسر قرار می گیرد فقط محدودهٔ $۰ < x - [x] < ۱$ را می تواند بپذیرد.

$$\xrightarrow[\frac{۱}{x-[x]}>۱]{۰<x-[x]<۱} \frac{۱}{x - [x]} - ۱ > ۰ \Rightarrow R_{gof} = (۰, +\infty)$$

۱۱ گزینه ۳

ضابطهٔ $f(x)$ را داریم. با توجه به آن حاصل $f(۲x-۳)$ را به دست می آوریم سپس تابع $g(x)$ را تشکیل داده و با استفاده از ویژگی های جزء صحیح، برد آن را به دست می آوریم.

$$f(x)=x-[x] \Rightarrow f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x-۳] \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{[x+k]=[x]+k}$$
$$f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x]+۳=۲x-[۲x]$$
$$g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)=۲x-[۲x]-۲(x-[x])=۲x-[۲x]-۲x+۲[x]$$
$$=۲[x]-[۲x]$$

از ویژگی های جزء صحیح به خاطر داشته باشید: $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$

بنابراین تابع $g(x)$ برابر است با:

$$g(x)=۲[x]-[x]-[x+\frac{۱}{۲}]=[x]-[x+\frac{۱}{۲}]$$

قسمت اعشاری عدد x را با p نشان می دهیم. با توجه به مقدار p دو حالت برای $g(x)$ اتفاق می افتد:

$$g(x)=[x]-[x+\frac{۱}{۲}]=\begin{cases} ۰ & ۰\le p<\frac{۱}{۲} \\ -۱ & \frac{۱}{۲}\le p<۱ \end{cases}$$

بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر $\{-۱,۰\}$ می شود.

۱۲ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ تابع gof را به دست می آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع gof را تعیین می کنیم.

$$gof(x)=g(f(x))=۲^{-x+[x]}$$

می دانیم به ازای هر x ، $۰\le x-[x]<۱$ است بنابراین:

$$۰\le x-[x]<۱\Rightarrow -۱<-x+[x]\le ۰$$

برد تابع gof برابر است با:

$$-x+[x]=-۱\Rightarrow ۲^{-x+[x]}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$
$$-x+[x]=۰\Rightarrow ۲^{-x+[x]}=۲^{۰}=۱\Rightarrow R_{gof}=(\frac{۱}{۲},۱]$$

۱۳ گزینه ۲

گام اول

با توجه به‌صورت سؤال $[x^۲+x]=-۱$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدودهٔ قابل‌قبول برای $x^۲+x$ به صورت $-۱\leq x^۲+x<۰$ است.

گام دوم

$$[x^۲+x]=-۱ \Rightarrow -۱\leq x^۲+x<۰$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$۱)\ \ x^۲+x\geq -۱ \Rightarrow x^۲+x+۱\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases}\Delta=۱-۴=-۳<۰\\ \text{ضریب } x^۲=۱>۰\end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta<۰$ و ضریب $x^۲$ مثبت است، عبارت $x^۲+x+۱$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$۲)\ \ x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۰$$

پس $-۱<x<۰$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-۱<x<۰ \Rightarrow ۰<x^{۲۰}<۱ \Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$$

۱۴ گزینه ۱

با توجه به نامعادلهٔ $x^۲+x<۰$، محدودهٔ قابل‌قبول برای x را باید مشخص کنیم. سپس مقادیر $[x]$، $[x^۲]$، $[x^۳]$ و $[x^۴]$ را محاسبه می کنیم.

		-۱		۰	
$x^۲+x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۰$$
$$-۱<x<۰ \Rightarrow [x]=-۱$$
$$-۱<x<۰ \Rightarrow ۰<x^۲<۱ \Rightarrow [x^۲]=۰$$
$$-۱<x<۰ \Rightarrow -۱<x^۳<۰ \Rightarrow [x^۳]=-۱$$
$$-۱<x<۰ \Rightarrow ۰<x^۴<۱ \Rightarrow [x^۴]=۰$$
$$[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=-۱+۰-۱+۰=-۲$$

۱۵ گزینه ۳

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$۴n^۲-۴n+۱<۴n^۲-۳n+۱<۴n^۲ \Rightarrow (۲n-۱)^۲<۴n^۲-۳n+۱<(۲n)^۲$$
$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} ۲n-۱<\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}<۲n \Rightarrow [\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]=۲n-۱$$

از طرف دیگر وقتی $n>۲$ باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n^۲-۴n+۴<n^۲-۲n<n^۲-۲n+۱ \Rightarrow (n-۲)^۲<n^۲-۲n<(n-۱)^۲$$
$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n-۲<\sqrt{n^۲-۲n}<n-۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲-۲n}]=n-۲$$

پس حاصل عبارت داده‌شده به ازای $n>۲$ برابر است با:

$$[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]-۲[\sqrt{n^۲-۲n}]=۲n-۱-۲(n-۲)=۲n-۱-۲n+۴=۳$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره‌شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده‌شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان‌تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A=[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]-۲[\sqrt{n^۲-۲n}] \xrightarrow{n=۳} A=[\sqrt{۳۶-۹+۱}]-۲[\sqrt{۹-۶}]$$
$$=[\sqrt{۲۸}]-۲[\sqrt{۳}]=۵-۲(۱)=۵-۲=۳$$

۱۶ گزینه ۲

گام اول

با توجه به ضابطهٔ تابع که به صورت $y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱$ است، محدودهٔ اولیهٔ x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$$-۲\le x<۰,۰\le x<۲,۲\le x<۴,۴\le x<۶$$

گام دوم

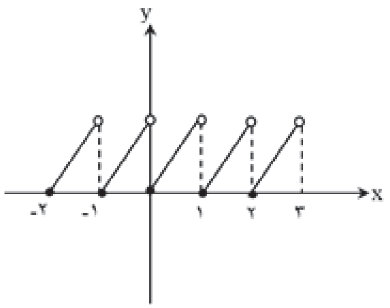
برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-۲\le x<۰ \Rightarrow -۱\le \frac{x}{۲}<۰ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=-۱ \Rightarrow y=۲(-۱)+۱=-۲+۱=-۱$$
$$۰\le x<۲ \Rightarrow ۰\le \frac{x}{۲}<۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=۰ \Rightarrow y=۱$$
$$۲\le x<۴ \Rightarrow ۱\le \frac{x}{۲}<۲ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=۱ \Rightarrow y=۲(۱)+۱=۲+۱=۳$$
$$۴\le x<۶ \Rightarrow ۲\le \frac{x}{۲}<۳ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=۲ \Rightarrow y=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل‌شده است.

۱۷ گزینه ۴

برای رسم نمودار تابع، محدودهٔ اولیهٔ x را به پنج زیربازهٔ زیر تقسیم می کنیم:



$$-۲ \leq x < -۱, -۱ \leq x < ۰, ۰ \leq x < ۱, ۱ \leq x < ۲, ۲ \leq x < ۳$$

$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x - (-۲) = x + ۲$$

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x - (-۱) = x + ۱$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x$$

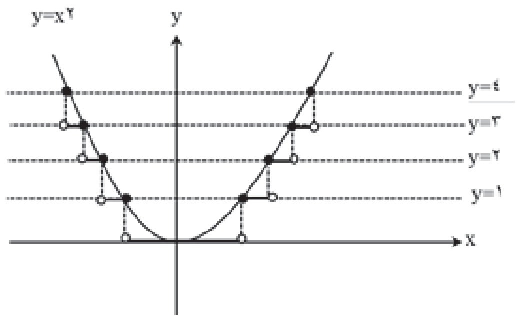
$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x - (۱) = x - ۱$$

$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = x - (۲) = x - ۲$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازهٔ $\sqrt{۲}$ تشکیل‌شده است. پس دوتایی مرتب (n , L) به صورت $(۵ , \sqrt{۲})$ می شود.

۱۸ گزینه ۴

اول نمودار تابع $y = x^۲$ را در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ رسم می کنیم.
برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^۲]$ از روی نمودار تابع $y = x^۲$ در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + ۱$ $(k \in \mathbb{Z})$ قرار می گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم.
درنهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^۲]$ در بازهٔ $x \in (-۲ , ۲)$ از هفت پاره خط تشکیل‌شده است.

۱۹ گزینه ۳

ابتدا با توجه به دو تساوی $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$، مقادیر a و b را محاسبه می کنیم.

$$f(۰) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a \times b^{۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a \times ۱ = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲) = \frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}b^{-۲} = \frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲b^{۲}} = \frac{۱}{۳۲} \Rightarrow ۲b^{۲} = ۳۲ \Rightarrow b^{۲} = ۱۶ \xrightarrow{b>۰} b = ۴$$

بنابراین ضابطهٔ $f(x)$ به صورت $f(x) = \frac{۳}{۲} \times ۴^{x}$ در می آید. مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ برابر است با:

$$f(\frac{۳}{۲}) = \frac{۳}{۲} \times ۴^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \times (۲^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \times ۲^{۳} = \frac{۳}{۲} \times ۸ = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

۲۰ گزینه ۴

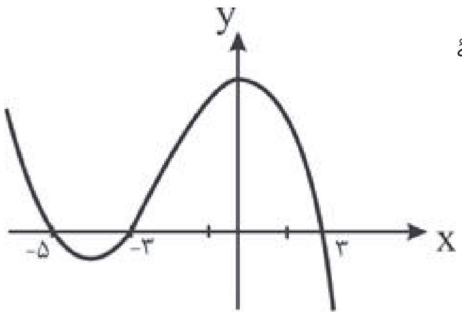
گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq ۰$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-۲)$، کافی است نمودار تابع $f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

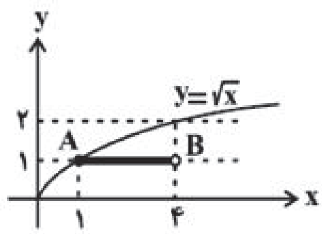
گام دوم

باتوجه‌به نمودار تابع $f(x-۲)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل‌قبول است پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-۵, -۳] \bigcup [۰, ۲]$

۲۱ گزینه ۲



نمودار $\sqrt{x}$ و خط‌های افقی $y = ۰, ۱, ۲$ را رسم می‌کنیم. دو نقطهٔ $(۱, ۱)$ و $(۴, ۲)$ محل تلاقی نمودار $\sqrt{x}$ و خطوط افقی هستند، پس طول پاره‌خط AB برابر $۴ - ۱ = ۳$ است.

۲۲ گزینه ۴

$$۲\,[x]=۱-[-x]\Rightarrow ۲\,[x]+[-x]=۱$$

$$\Rightarrow [x]+\underbrace{[x]+[-x]}=۱\Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z}:[x]+۰=۱\Rightarrow [x]=۱\\ x\notin\mathbb{Z}:[x]-۱=۱\Rightarrow [x]=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱\leq x<۲ \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x=۱\\ ۲\leq x<۳ \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} ۲<x<۳\end{cases} \Rightarrow \text{مجموعه‌جواب}=(۲,۳)\bigcup\{۱\}$$

$$\Rightarrow a+b+c=۲+۳+۱=۶$$

۲۳ گزینه ۲

$$[x]+[x-\frac{۱}{۲}-۱]-[x-\frac{۱}{۲}]=۳$$

$$\Rightarrow [x]+[x-\frac{۱}{۲}]-۱-[x-\frac{۱}{۲}]=۳\Rightarrow [x]=۴\Rightarrow ۴\leq x<۵$$

۲۴ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$$

$$\Rightarrow D_f: ۲x-x^۲\geq ۰\Rightarrow D_f: x(۲-x)\geq ۰\Rightarrow D_f: ۰\leq x\leq ۲$$

یعنی اگر x بخواهد ورودی تابع f باشد، باید $۰\leq x\leq ۲$؛ حال اگر $(۳-x)$ بخواهد ورودی تابع f باشد، باید:

$$۰\leq (۳-x)\leq ۲\Rightarrow -۲\leq x-۳\leq ۰\Rightarrow ۱\leq x\leq ۳$$

یعنی دامنهٔ تابع $f(۳-x)$، بازهٔ $[۱,۳]$ است.

راه‌حل دوم:

می‌توان با تشکیل $f(۳-x)$، دامنهٔ تابع را محاسبه کرد که به‌عنوان یک راه حل طولانی توصیه نمی‌شود.

۲۵ گزینه ۱

$$[۲x+۵]=۱\Rightarrow ۱\leq ۲x+۵<۲\Rightarrow -۴\leq ۲x<-۳\Rightarrow -۲\leq x<-\frac{۳}{۲}\Rightarrow x\in[-۲,\frac{-۳}{۲})$$

۲۶ گزینه ۳

ابتدا با کمک رابطهٔ $[x+k]=[x]+k \ \ (k\in\mathbb{Z})$ داریم:

$$f(x)=۱+[x]+۱+[-x]=۲+[x]+[-x]$$

ازطرفی:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & ;x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow ۲+[x]+[-x]=\begin{cases}۲ & ;x\in\mathbb{Z}\\ ۱ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f برابر ۱ است.

۲۷ گزینه ۱

به ازای هر عدد طبیعی n به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\underbrace{n^۲+۲n+۱}_{(n+۱)^۲}<n^۲+۴n+۱<\underbrace{n^۲+۴n+۴}_{(n+۲)^۲}$$

$$\Rightarrow n\in\mathbb{N}:[\sqrt{n^۲+۴n+۱}]=n+۱\xrightarrow{\text{طبق فرض}}n+۱=۹\Rightarrow n=۸$$

پس داریم:

$$[\sqrt{۲n^۲+n+۱}]=[\sqrt{۱۲۸+۸+۱}]=[\sqrt{۱۳۷}]=۱۱$$

$$\text{توجه}:\ \underbrace{۱۲۱}_{۱۱^۲}<۱۳۷<\underbrace{۱۴۴}_{۱۲^۲}$$

۲۸ گزینه ۳

$$\left[\frac{۲x+۱}{۳}\right]=۲\Rightarrow ۲\le\frac{۲x+۱}{۳}<۳\xrightarrow{\times ۳}۶\le ۲x+۱<۹$$

$$\Rightarrow ۵\le ۲x<۸\Rightarrow \frac{۵}{۲}\le x<۴$$

حال حدود عبارت $\frac{۱-x}{۲}$ را می‌یابیم:

$$\frac{۵}{۲}\le x<۴\xrightarrow{\times(-۱)}-۴<-x\le-\frac{۵}{۲}\xrightarrow{+(۱)}-۳<۱-x\le-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<\frac{۱-x}{۲}\le-\frac{۳}{۴}\Rightarrow\left[\frac{۱-x}{۲}\right]=-۲ \text{ یا } -۱$$

۲۹ گزینه ۲

در گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ هم دامنهٔ دو تابع f و g و هم ضابطهٔ آن‌ها باهم برابر است ولی در گزینهٔ ۲ دامنهٔ دو تابع یکسان نیستند:

$$\begin{cases} f(x) = \cot x - ۲\cot ۲x & ; ۰ \notin D_f \\ g(x) = \tan x & ; ۰ \in D_f \end{cases}$$: گزینهٔ ۲

باتوجه‌به مثال نقضی مانند $x = ۰$ مشخص است که در گزینهٔ ۲ $D_f \neq D_g$ است.

۳۰ گزینه ۱

دامنهٔ هر دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است، بنابراین برای تساوی دو تابع باید به ازای هر x از دامنه داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

$$x \neq -۱ \Rightarrow f(x) = \frac{x^۲ + ۳x + ۲}{x + ۱} = \frac{(x+۲)(x+۱)}{x+۱} = x + ۲$$

$$f(x) = g(x)$$

به ازای $x = -۱$ داریم:

$$x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = ۳a + ۷ \ , \ g(-۱) = -۱ + ۲ = ۱$$

$$\xrightarrow{f(-۱)=g(-۱)} ۳a + ۷ = ۱ \Rightarrow ۳a = -۶ \Rightarrow a = -۲$$

۳۱ گزینه ۱

ابتدا باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x + \sqrt{۲x-۱} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۲x-۱} = ۱ - x \xrightarrow[x \geq \frac{۱}{۲}]{۱-x\geq ۰} \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱$$

طرفین معادلهٔ $\sqrt{۲x-۱} = ۱ - x$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۲x - ۱ = ۱ - ۲x + x^۲ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ + \sqrt{۲} \notin [\frac{۱}{۲}, ۱] \\ x = ۲ - \sqrt{۲} \in [\frac{۱}{۲}, ۱] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x + \sqrt{۲x-۱}) = x^۲ - ۶ \xrightarrow{x=۲-\sqrt{۲}} f(۱) = (۲-\sqrt{۲})^۲ - ۶ = ۴ + ۲ - ۴\sqrt{۲} - ۶ = -۴\sqrt{۲}$$

۳۲ گزینه ۴

باتوجه‌به نمودار، دامنهٔ تابع f فاصلهٔ $[۰,۲]$ است. برای محاسبهٔ دامنهٔ $f(۱-x)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۰ \le ۱-x \le ۲ \Rightarrow -۱ \le -x \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱$$

پس دامنهٔ $f(۱-x)$، فاصلهٔ $[-۱,۱]$ است.
در تابع g باید ریشه‌های مخرج را هم محاسبه کنیم:

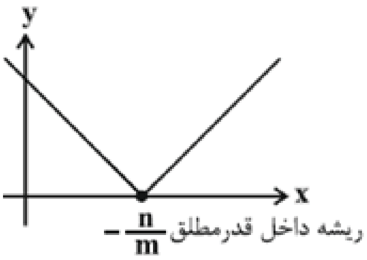
$$\text{ریشه‌های مخرج:}\quad f(x)=۰ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} x=۰ \ ,\ \ x=۲$$

بنابراین، دامنهٔ تابع g برابر است با:

$$D_g = D_{\text{صورت}} \bigcap D_{\text{مخرج}} - \{x \mid \text{مخرج} = ۰\}$$

$$= [-۱,۱] \bigcap [۰,۲] - \{۰,۲\} = [۰,۱] - \{۰,۲\} = (۰,۱]$$

۳۳ گزینه ۳



دقت کنید که در نمودار تابع $f(x) = |mx+n|$ نقطهٔ شکستگی نمودار تابع، ریشهٔ داخل قدر مطلق است؛ یعنی:
حال برای اینکه f تابعی یک‌به‌یک باشد، باید ریشهٔ داخل قدر مطلق در فاصلهٔ $(-۱,۲)$ نباشد (نقاط ابتدا و انتها باشد مشکلی ایجاد نخواهد شد.) پس ابتدا حدود a را طوری می‌یابیم که ریشه در فاصلهٔ $(-۱,۲)$ باشد، سپس مجموعهٔ جواب به‌دست‌آمده را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم:

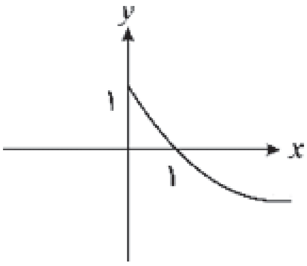
$$۲x+a=۰ \Rightarrow x=\frac{-a}{۲} \Rightarrow -۱ < -\frac{a}{۲} < ۲ \xrightarrow{\times(-۲)} -۴ < a < ۲$$

پس مجموعهٔ جواب موردنظر برابر است با:

$$a \in \mathbb{R} - (-۴,۲)$$

۳۴ گزینه ۲

نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



باتوجه‌به شکل تابع f یک‌به‌یک است (چون هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند)، ازطرفی تابع f نزولی است.

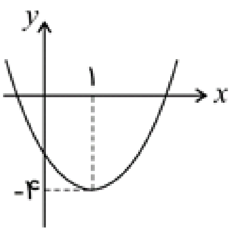
۳۵ گزینه ۲

در این موارد بهترین روش، رسم نمودار است:

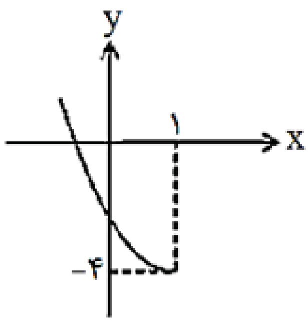
نمودار تابع $f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳$ نمودار یک سهمی است و باتوجه‌به اینکه ضریب $x^{۲}$ مثبت است در رأس خود دارای مینیمم است:

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۲)}{۲(۱)} = ۱$$

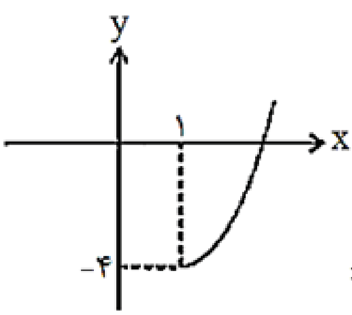
$$\Rightarrow \quad \text{عرض رأس سهمی} = ۱^{۲} - ۲(۱) - ۳ = ۱ - ۵ = -۴$$



بیشترین بازه برای آنکه نمودار تابع فوق در قسمتی از دامنهٔ خود یک‌به‌یک باشد، باید به صورت‌های زیر درآید:



$\Rightarrow (-\infty, ۱]$ یا



$\Rightarrow [۱, +\infty)$

۳۶ گزینه ۲

ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم: یا

$\Rightarrow(-\infty,1]$ $\Rightarrow[1,+\infty)$

$$-۲x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow D_f=\{x \leq ۰\}$$

طبق تعریف تابع معکوس داریم:

$$f^{-۱}(۴)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=۴$$

$$f(\alpha)=-\alpha+\sqrt{-۲\alpha}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{-۲\alpha}=\alpha+۴ \Rightarrow -۲\alpha=(\alpha+۴)^۲$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+۱۰\alpha+۱۶=۰ \Rightarrow (\alpha+۸)(\alpha+۲)=۰ \Rightarrow \alpha=-۸ \text{ یا } \alpha=-۲$$

$\alpha=-۸$ در معادلهٔ رادیکالی صدق نمی‌کند. پس تنها جواب موردقبول $\alpha=-۲$ است چون در معادله رادیکالی صدق می‌کند.

۳۷ گزینه ۱

نمودار تابع f محور xها را در نقطه‌ای به طول یک قطع کرده است، بنابراین:

$$f(۱)=۰ \Rightarrow (۱,۰) \in f \Rightarrow (۰,۱) \in f^{-۱}$$

ازطرفی نمودار $f^{-۱}$ نیز محور xها را در نقطه‌ای به طول یک قطع می‌کند، بنابراین:

$$f^{-۱}(۱)=۰ \Rightarrow (۱,۰) \in f^{-۱}$$

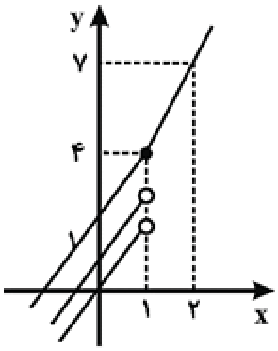
بنابراین معادلهٔ $f^{-۱}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود. دقت کنید که چون f خطی است، پس $f^{-۱}$ نیز خطی است.

$$f^{-۱}(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases}(۰,۱) \in f^{-۱} \Rightarrow ۱=۰+b \Rightarrow b=۱ \\ (۱,۰) \in f^{-۱} \Rightarrow a+b=۰ \xrightarrow{b=۱} a=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-x+۱ \Rightarrow f^{-۱}(۲)=-۲+۱=-۱$$

۳۸ گزینه ۱

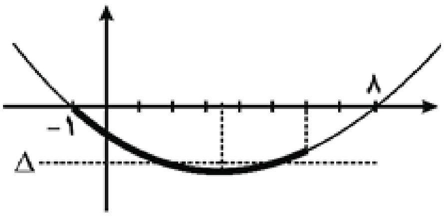
ابتدا $y = ۳x + ۱$ را به ازای $x \geq ۱$ رسم می‌کنیم. باتوجه‌به شکل برای یک‌به‌یک بودن تابع، حداکثر مقدار $۲x + a$ در نقطهٔ $x = ۱$ برابر ۴ است، بنابراین:



$$۲x + a \leq ۴ \xrightarrow{x=۱} a \leq ۲$$

۳۹ گزینه ۳

طول مینیمم تابع فوق $\frac{۷}{۲} = -\frac{-۷}{۲} = -\frac{b}{۲a} = x_m$ است.
عرض مینیمم مهم نیست. هر بازه‌ای که شامل مینیمم باشد تابع در آن بازه یک‌به‌یک نیست. مثلاً در گزینهٔ (۱) که دامنه $(-۱, ۶)$ است را در نظر بگیرید.



در شکل این بازه را پررنگ‌تر کشیده‌ایم. خط افقی Δ نمودار را در دو نقطه قطع کرده، بنابراین یک‌به‌یک نیست. تنها دامنه‌ای که شامل $\frac{۷}{۲}$ نیست، گزینهٔ (۳) است.

۴۰ گزینه ۳

می‌دانیم دامنهٔ تابع معکوس با برد تابع اصلی برابر است.

$$x \geq ۰ \ , \ ۹ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۹ \Rightarrow D_f = [۰, ۹]$$

تابع در $[۰, ۹]$ پیوسته است و چون معکوس‌پذیر است (یک‌به‌یک است) پس اکیداً یکنوا است.

$$f(۰) = -۳, f(۹) = ۳ \Rightarrow R_f = [-۳, ۳] \Rightarrow D_{f^{-۱}} = [-۳, ۳]$$

۴۱ گزینه ۴

$\text{تابع } f \Rightarrow ۴m = ۴ \Rightarrow m = ۱$

$\Rightarrow f = \{(-۱, ۴), (۲, ۳), (۲, n-۱), (۵, ۶), (p, n+۲)\}$

$\text{تابع } f \Rightarrow n - ۱ = ۳ \Rightarrow n = ۴$

$\Rightarrow f = \{(-۱, ۴), (۲, ۳), (۵, ۶), (p, ۶)\}$

$\text{یک‌به‌یک } f \Rightarrow p = ۵ \Rightarrow m + n + p = ۱۰$

۴۲ گزینه ۱

در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a + d = ۰$ باشد؛ آنگاه تابع f، وارون خود است؛ به‌عبارت‌دیگر $f^{-۱}(x) = f(x)$، درنتیجه در اینجا باید:

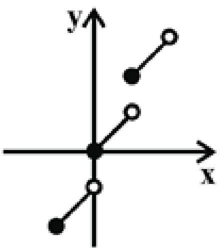
$$۳ + (-a) = ۰ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow f(x) = \frac{۳x - ۱}{x - ۳}$$

$$\Rightarrow f(۱) = \frac{۲}{-۲} = -۱$$

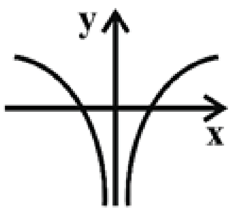
۴۳ گزینه ۲

می‌دانیم توابعی که اکیداً یکنوا هستند، یک‌به‌یک هستند. لذا اکیداً یکنوایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

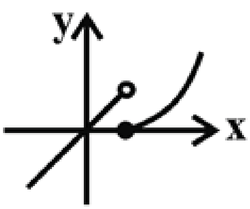
الف) این تابع مجموع تابع صعودی $y=[x]$ و تابع صعودی اکید $y=x$ است؛ بنابراین یک تابع صعودی اکید است.



ب) $y=\log x^{۲}=۲\log|x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$نه صعودی است نه نزولی پس یک‌به‌یک نیست.

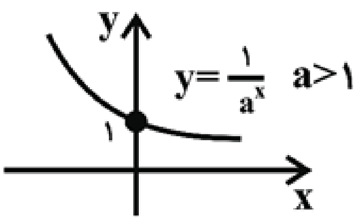


ج) باید تابع را رسم نماییم.



همان‌طور که دیده می‌شود تابع یک‌به‌یک نیست.

د) این تابع نزولی اکید است.



۴۴ گزینه ۴

ابتدا معکوس تابع $f(x)=2^{x+1}$ را می‌یابیم:

$$f(x)=2^{x+1} \Rightarrow y=2^{x+1} \Rightarrow \log_2^y=\log_2^{2^{x+1}}$$
$$\Rightarrow \log_2^y=x+1 \Rightarrow x=\log_2^y-1=\log_2^y-\log_2^2=\log_2^{\frac{y}{2}}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2^{\frac{x}{2}}$$

برای آنکه ترکیب gof^{-1} قابل انجام باشد، باید دامنهٔ gof^{-1} را بیابیم:

$$D_{gof^{-1}}=\{x\in D_{f^{-1}} | f^{-1}\in D_g\}=\{x\in(0,+\infty) | f^{-1}\in D_g\}$$

دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{6-2x}$ برابر است با:

$$6-2x\geq 0 \Rightarrow 6\geq 2x \Rightarrow x\leq 3 \Rightarrow D_g=\{x | x\leq 3\}$$

بنابراین:

$$f^{-1}\in D_g \Rightarrow \log_2^{\frac{x}{2}}\leq 3 \Rightarrow \frac{x}{2}\leq 8 \Rightarrow x\leq 16$$
$$D_{gof^{-1}}=\{x\in(0,+\infty) | x\leq 16\}$$
$$\Rightarrow D_{gof^{-1}}=(0,+\infty)\bigcap(-\infty,16]=(\underbrace{0}_{a},\underbrace{16}_{b}] \Rightarrow max(b-a)=16-0=16$$

۴۵ گزینه ۴

یک تابع که به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک می شود هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آن ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع بودن در حل این گونه سؤال ها فراموش نشود. این که زوج مرتب ها نباید مؤلفهٔ اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود.

در رابطهٔ داده شده دو زوج مرتب $(3,2)$ و $(3,a^2-a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهلهٔ اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow (a-2)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a=-1 \Rightarrow (-1,5)\in f \ , \ (-1,4)\in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a=2$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(3,2)\in f \ , \ (b,2)\in f \xrightarrow{\text{تابع } f \text{ یک به یک است}} b=3$$

پس دوتایی (a,b) به صورت $(2,3)$ درمی آید.

۴۶ گزینه ۳

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ در ضابطهٔ تابع f صدق کند، نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ در ضابطهٔ تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(۴)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(۴)$ برابر α شود، در این صورت $(۴,\alpha)$ در ضابطهٔ f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha,۴)$ باید در ضابطهٔ تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطهٔ تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادلهٔ $f(\alpha)=۴$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x)=-x+\sqrt{-۲x}\xrightarrow{f(\alpha)=۴}۴=-\alpha+\sqrt{-۲\alpha}\Rightarrow\sqrt{-۲\alpha}=\alpha+۴$$

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-۲\alpha\geq ۰\Rightarrow\alpha\leq ۰\ ,\ \alpha+۴\geq ۰\Rightarrow\alpha\geq -۴$$

پس $\alpha\in[-۴,۰]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$-۲\alpha=(\alpha+۴)^۲\Rightarrow -۲\alpha=\alpha^۲+۸\alpha+۱۶\Rightarrow\alpha^۲+۱۰\alpha+۱۶=۰\Rightarrow$$
$$(\alpha+۸)(\alpha+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-۲\\ \alpha=-۸\end{cases}$$

با توجه به این که $\alpha\in[-۴,۰]$ است، فقط $\alpha=-۲$ قابل قبول خواهد بود.

۴۷ گزینه ۴

در توابع شامل قدرمطلق بهتر است ابتدا تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم. با توجه به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق، ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک شده به دست می آوریم. سپس هر کدام از ضابطه ها را که یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر بود انتخاب کرده و ضابطهٔ تابع معکوس را مشخص می کنیم.

$$f(x)=۲x-|۴-۲x|\Rightarrow\begin{cases}x>۲\Rightarrow ۴-۲x<۰\Rightarrow|۴-۲x|=۲x-۴\Rightarrow f(x)=۲x-۲x+۴=۴\\ x\leq ۲\Rightarrow ۴-۲x\geq ۰\Rightarrow|۴-۲x|=۴-۲x\Rightarrow f(x)=۲x-۴+۲x=۴x-۴\end{cases}$$

ضابطهٔ $f(x)=۴$ یک به یک نیست پس وارون ندارد. پس تابع فقط روی بازهٔ $(-\infty,۲]$ معکوس پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می کنیم:

$$x\in(-\infty,۲]\Rightarrow x\leq ۲\Rightarrow ۴x\leq ۸\Rightarrow ۴x-۴\leq ۴\Rightarrow f(x)\leq ۴$$

برد تابع f بازهٔ $(-\infty,۴]$ به دست آمد. پس دامنهٔ f^{-1} نیز بازهٔ $(-\infty,۴]$ خواهد بود.

$$y=۴x-۴\Rightarrow y+۴=۴x\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۴}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۴}{۴}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱\ ,\ x\leq ۴$$

۴۸ گزینه ۱

می دانیم اگر تابعی فرد باشد، نمودارآن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.از طرفی معکوس هر تابع قرینهٔ آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) است. بنابراین نمودار تابع معکوس یا همان f^{-1} نیز نسبت به مبدأ مختصات متقارن خواهد بود.

۴۹ گزینه ۳

گام اول

این تابع را یک بار دیگر در شکل زیر مشاهده کنید:

$$x \longrightarrow f \xrightarrow{f(x)} g \xrightarrow{g(x)} x$$

با توجه به شکل رسم شده می توان نتیجه گرفت $g(f(x)) = x$ است. از طرفی می دانیم ترکیب یک تابع با تابع معکوسش به ما تابع همانی را می دهد. بنابراین تابع $g(x)$ تابع وارون تابع $f(x)$ است. وقتی تست از ما $g(۰)$ را می خواهد یعنی فرض کرده نقطهٔ $A(۰, a)$ در ضابطهٔ g صدق می کند پس نقطهٔ $B(a, ۰)$ متعلق به تابع f است.

گام دوم

تابع $f(x)$ را برابر صفر قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم:

$$f(x) = ۲x - ۱ \xrightarrow[(a,۰)\in f]{f(x)=۰} ۲a - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۰,a)\in g} g(۰) = \frac{۱}{۲}$$

۵۰ گزینه ۴

ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-۱}(۱۶)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(۳x - ۴) \Rightarrow y = f(۳x - ۴)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-۱}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطهٔ تابع $g^{-۱}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = f(۳x - ۴) \Rightarrow f^{-۱}(y) = f^{-۱}(f(۳x - ۴)) = f^{-۱}(y) = ۳x - ۴$$
$$\Rightarrow ۳x = f^{-۱}(y) + ۴ \Rightarrow x = \frac{f^{-۱}(y) + ۴}{۳} \Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{f^{-۱}(x) + ۴}{۳}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-۱}(۱۶)$ ابتدا مقدار $f^{-۱}(۱۶)$ را حساب می کنیم:

$$f^{-۱}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=۱۶} f^{-۱}(۱۶) = ۱۶ + \sqrt{۱۶} = ۱۶ + ۴ = ۲۰$$
$$g^{-۱}(۱۶) = \frac{۲۰ + ۴}{۳} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

۵۱ گزینه ۲

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$، ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(۶)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[۳]{۲x} \Rightarrow y = \sqrt[۳]{۲x} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^{۳} = ۲x \Rightarrow x = \frac{y^{۳}}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{x^{۳}}{۲}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^{۳}}{۲} + \sqrt{\frac{x^{۳}}{۲}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$۶ = \frac{x^{۳}}{۲} + \sqrt{\frac{x^{۳}}{۲}} \Rightarrow ۴ + ۲ = \frac{x^{۳}}{۲} + \sqrt{\frac{x^{۳}}{۲}} \Rightarrow \frac{x^{۳}}{۲} = ۴ \Rightarrow x^{۳} = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

نقطهٔ $(۲, ۶)$ در ضابطهٔ $g(x)$ صدق می کند، پس نقطهٔ $(۶, ۲)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(۶) = ۲$ است.

۵۲ گزینه ۲

گام اول

الف) دو تابع $f\left(x\right)$ و $g\left(x\right)$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند بنابراین: $f\left(-۱\right)=g\left(-۱\right)$

ب) می‌دانیم اگر f تابعی معکوس‌پذیر باشد آنگاه:

$$f^{-۱}(y)=x \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=y$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول داریم:

$$f\left(-۱\right)=g\left(-۱\right) \quad \Rightarrow \quad ۳^{-a+b}=\left(۳^{-۲}\right)^{-۱} \quad \Rightarrow \quad ۳^{-a+b}=۳^{۲} \quad \Rightarrow \quad -a+b=۲ \qquad (I)$$

$f\left(۲\right)=\frac{۱}{۳}$ است پس:

$$f\left(۲\right)=\frac{۱}{۳} \quad \Rightarrow \quad ۳^{۲a+b}=۳^{-۱} \quad \Rightarrow \quad ۲a+b=-۱ \qquad (II)$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی حاصل از معادلات (I) و (II)، مقادیر متغیرهای a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}-a+b=۲\\ ۲a+b=-۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-a+b=۲\\ -۲a-b=۱\end{cases} \quad \Rightarrow \quad -۳a=۳ \quad \Rightarrow \quad a=-۱ \quad \xrightarrow{(I)} \quad b=۱$$

پس ضابطهٔ تابع $f\left(x\right)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f\left(x\right)=۳^{-x+۱}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت ب از گام قبل، مقدار $f^{-۱}\left(۲۷\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-۱}(۲۷)=x \Rightarrow f(x)=۲۷ \Rightarrow ۳^{-x+۱}=۳^{۳}$$

$$\Rightarrow -x+۱=۳ \Rightarrow -x=۲ \Rightarrow x=-۲$$

بنابراین داریم:

$$f^{-۱}\left(۲۷\right)=-۲$$

۵۳ گزینه ۳

نقاط برخورد در ضابطهٔ توابع $f(x)=A(۲)^{Bx}$ و $۴y=۵x$ صدق می‌کند.

$$۴y=۵x \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \Rightarrow y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow (۲,\frac{۵}{۲}) \\ x=۴ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow (۴,۵) \end{cases}$$

$$f(x)=A(۲)^{Bx} \Rightarrow \begin{cases} (۲,\frac{۵}{۲}) : \frac{۵}{۲}=A(۲)^{B\times۲} \Rightarrow ۵=۲A(۲)^{۲B} \\ (۴,۵) : ۵=A(۲)^{B\times۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲A(۲)^{۲B}=A(۲)^{۴B} \Rightarrow ۲^{۲B+۱}=۲^{۴B} \Rightarrow ۲B+۱=۴B \Rightarrow B=\frac{۱}{۲}$$

$$۵=A(۲)^{۴B} \xrightarrow{B=\frac{۱}{۲}} ۵=A(۲)^{۲} \Rightarrow A=\frac{۵}{۴} \Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}$$

$$\frac{۵}{۴}(۲)^{\frac{x}{۲}}=۱۰ \Rightarrow (۲)^{\frac{x}{۲}}=۸=۲^{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲}=۳ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow f^{-۱}(۱۰)=۶$$

۵۴ گزینه ۱

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-۱}=\{(-۱,۲),(۴,-۱),(-۲,۳),(-۳,-۴)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x>۰$، مثبت و به ازای مقادیر $x<۰$، منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a)=-\sqrt{-a}=-۲ \Rightarrow \sqrt{-a}=۲ \Rightarrow a=-۴$$

۵۵ گزینه ۱

اول ضابطهٔ $f(\sqrt{x})$ را تعیین می کنیم. در تعیین ضابطهٔ $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنهٔ آن متفاوت با دامنهٔ تابع $f(x)$ است.

$$f(x)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}} \Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^{۲}+\frac{۱}{(\sqrt{x})^{۲}}=x+\frac{۱}{x} \quad , \quad x\in(۰,+\infty)$$

حالا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$g(x)=(f(\sqrt{x}))^{۲}-f(x)=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})=x^{۲}+۲+\frac{۱}{x^{۲}}-x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}}$$
$$\Rightarrow g(x)=۲ \ , \ x\in(۰,+\infty)$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

۵۶ گزینه ۱

اگر دو تابع f و g که به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها بیان شده اند را داشته باشیم، پس $f \cap g$ و $f-g$ زیر مجموعه ای از این توابع خواهند بود، بنابراین هر دو مورد قطعاً تابع است. ترکیب دو تابع f و g (fog) نیز تابع است.
رابطهٔ $f \cup g$ ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

$f=\{(۲,۳)\}$ تابع است

$g=\{(۲,۴)\}$ تابع است

$f \cup g=\{(۲,۳)(۲,۴)\}$ تابع نیست

۵۷ گزینه ۱

ضابطهٔ $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطهٔ تابع $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x)=x^۲-x-۲\ ,\ f(g(x))=x^۲+x-۲ \Rightarrow (g(x))^۲-g(x)-۲=x^۲+x-۲ \Rightarrow (g(x))^۲-g(x)=x^۲+x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^۲-g(x)=x^۲+x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{۱}{۴} \text{ اضافه می کنیم}} (g(x))^۲-g(x)+\frac{۱}{۴}=x^۲+x+\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow (g(x))-\frac{۱}{۲})^۲=(x+\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow g(x)-\frac{۱}{۲}=\pm(x+\frac{۱}{۲})$$

پس برای ضابطهٔ $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱)\ \ g(x)-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x)=x+۱ \Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^۲-x-۲+x+۱=x^۲-۱$$

$$۲)\ \ g(x)-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x)=-x \Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^۲-x-۲-x=x^۲-۲x-۲$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینهٔ ۱ قابل قبول است.

۵۸ گزینه ۳

$$D_f: ۱-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \;,\; D_g = \{-۳, -۱, ۰\}$$

کاملاً مشخص است که دامنهٔ $(g-f)/۲g$ برابر است با:

$$D_f \bigcap D_g$$

بنابراین:

$$D_f \bigcap D_g = \{-۱, ۰\}$$

$$\begin{cases} ((g-f)/۲g)(-۱) = (g(-۱) - f(-۱))/۲g(-۱) = (۴-۰) \times ۲(۴) = ۳۲ \\ ((g-f)/۲g)(۰) = (g(۰) - f(۰))/۲g(۰) = (۷-۱) \times ۲(۷) = ۸۴ \end{cases}$$

$\Rightarrow \{(-۱, ۳۲), (۰, ۸۴)\} \Rightarrow$ بیشترین مقدار تابع برابر ۸۴ است

۵۹ گزینه ۱

دامنهٔ توابع f و g فاصلهٔ $[۰, +\infty)$ است، پس دامنهٔ تابع $g-f$ برابر است با:

$$D_{g-f} = D_g \bigcap D_f = [۰, +\infty)$$

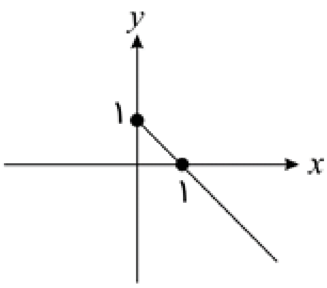
حال ضابطهٔ $g-f$ را می‌یابیم:

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = (۱+\sqrt{x}) - (x+\sqrt{x}) \Rightarrow (g-f)(x) = ۱-x$$

با رسم نمودار تابع $y = ۱-x$ در فاصلهٔ $[۰, +\infty)$ برد تابع $g-f$ را می‌یابیم:

x	۰	۱
$y=۱-x$	۱	۰

$\Rightarrow$



باتوجه‌به شکل برد تابع بازهٔ $(-\infty, ۱]$ است.

۶۰ گزینه ۴

با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع f فاصلهٔ $[\circ,۲]$ است. همچنین برای محاسبهٔ دامنهٔ $f(۱-x)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\circ \leq ۱-x \leq ۲ \Rightarrow -۱ \leq -x \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱$$

پس دامنهٔ $f(۱-x)$، فاصلهٔ $[-۱,۱]$ است.

در تابع g باید ریشه‌های مخرج را هم محاسبه کنیم:

$$\text{ریشه‌های مخرج} : f(x)=\circ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} x=\circ, x=۲$$

بنابراین، دامنهٔ تابع g برابر است با:

$$D_g = D_{\text{صورت}} \bigcap D_{\text{مخرج}} - \{x|\text{مخرج}=\circ\}$$

$$= [\circ,۲]\bigcap[-۱,۱]-\{\circ,۲\}=[\circ,۱]-\{\circ,۲\}=(\circ,۱]$$

۶۱ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه $f(x)$ یک تابع ثابت است، لذا $h(x)=g(x)-۱۶$ از درجهٔ ۲ خواهد بود. ازطرفی دامنهٔ $f(x)$ عبارت است از $\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$، بنابراین اعداد ۲ و ۲- صفرهای تابع $h(x)=g(x)-۱۶$ هستند و داریم:

$$h(x)=g(x)-۱۶=k(x-۲)(x+۲)=k(x^۲-۴) \Rightarrow g(x)-۱۶=kx^۲-۴k$$

$$\xrightarrow{g(\circ)=\circ} k=۴ \Rightarrow g(x)=۴x^۲ \Rightarrow h(x)=g(x)-۱۶=۴(x^۲-۴)$$

ازطرفی $f(x)$ برابر با یک مقدار ثابت مانند c است، پس:

$$f(x)=\frac{۲x^۲+ax+b}{۴(x^۲-۴)}=c \Rightarrow ۲x^۲+ax+b=۴cx^۲-۱۶c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\frac{۱}{۲} \\ a=\circ \\ b=-۱۶c=-۱۶(\frac{۱}{۲})=-۸ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)}{g(a)-۲}=\frac{f(-۸)}{g(\circ)-۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{-۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۶۲ گزینه ۱

برای یافتن $f(۱)$ معادلهٔ خط مورب را می‌نویسیم:

$$y-۱=\frac{۵-۱}{۲-۰}(x-۰)\Rightarrow y-۱=۲x\Rightarrow y=۲x+۱$$

ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & ;۰\leq x<۲\\ ۵ & ;x\geq ۲\end{cases}$$

بنابراین $f(۱)=۲+۱=۳$ است. داریم:

$$\frac{(f+g)(۱)}{f(۵)}=\frac{f(۱)+g(۱)}{f(۵)}=\frac{۳+۱}{۵}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۶۳ گزینه ۳

$$D_{\frac{f}{f-۱}}=(D_f\bigcap D_{f-۱})-\{x|f(x)-۱=۰\}=\{۰,۱,۲,۴\}-\{x|f(x)=۱\}$$
$$=\{۰,۱,۲,۴\}-\{۴\}=\{۰,۱,۲\}$$

۶۴ گزینه ۳

برای محاسبهٔ دامنهٔ $(f\times g)(x)$ باید بین دامنهٔ توابع f و g اشتراک بگیریم.

$$f(x)=\sqrt{۲-\sqrt{۱-x}}$$
$$۱)\ ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱$$

$$۲)\ ۲-\sqrt{۱-x}\geq ۰\Rightarrow ۲\geq\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۴\geq ۱-x\Rightarrow x\geq -۳$$

از اشتراک جواب‌های بالا $-۳\leq x\leq ۱$ به دست می‌آید که همان دامنهٔ f است.

$$g(x)=\sqrt{۲+\sqrt{۱-x}}$$
$$۱)\ ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱$$

$۲)\ ۲+\sqrt{۱-x}\geq ۰$ بدیهی است $\Rightarrow D_g=(-\infty\,,۱]$

اشتراک دامنهٔ f و g برابر $[-۳,۱]$ است که همان دامنهٔ $(f\times g)(x)$ می‌باشد.

۶۵ گزینه ۴

اگر $x=\circ$ را در تابع قرار دهیم محل برخورد با محور yها به دست می‌آید.

$$x=\circ \Rightarrow y=۲\times ۲^{\circ+۱}+۲=۶$$

باتوجه‌به اینکه کمترین مقدار تابع نمی‌تواند کمتر یا مساوی ۲ باشد، پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

۶۶ گزینه ۳

با جایگذاری توابع $f(x)=۲^x$ و $f(-x)=۲^{-x}$ در ضابطهٔ تابع g داریم:

$$g(x)=\frac{۲^x+۲^{-x}}{۲^x-۲^{-x}} \quad , \quad g(a)=۲ \Rightarrow \frac{۲^a+۲^{-a}}{۲^a-۲^{-a}}=۲$$

اگر صورت و مخرج کسر سمت چپ تساوی فوق را در عبارت ۲^a ضرب کنیم، داریم:

$$\frac{۲^a(۲^a+۲^{-a})}{۲^a(۲^a-۲^{-a})}=۲ \Rightarrow \frac{۲^{۲a}+۱}{۲^{۲a}-۱}=۲ \Rightarrow ۲^{۲a}+۱=۲\times ۲^{۲a}-۲ \Rightarrow ۲^{۲a}=۳ \Rightarrow ۲^a=\sqrt{۳}$$

$$g(b)=۴ \Rightarrow \frac{۲^b+۲^{-b}}{۲^b-۲^{-b}}=۴ \Rightarrow \frac{۲^b(۲^b+۲^{-b})}{۲^b(۲^b-۲^{-b})}=۴ \Rightarrow \frac{۲^{۲b}+۱}{۲^{۲b}-۱}=۴$$

$$\Rightarrow ۲^{۲b}+۱=۴\times ۲^{۲b}-۴ \Rightarrow ۲^{۲b}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow ۲^b=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow f(a+b)=۲^{a+b}=۲^a\times ۲^b=\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۵}$$

۶۷ گزینه ۳

$$x=-۱:\begin{cases} f(-۱)=۲ \\ g(-۱)=\frac{۱}{۲}\end{cases}, x=۲:\begin{cases} f(۲)=۳ \\ g(۲)=۵\end{cases}$$

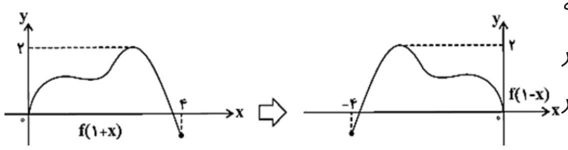
$$x=\circ:\begin{cases} f(\circ)=۱ \\ g(\circ)=۱\end{cases}, x=۴:\begin{cases} f(۴)=۵ \\ g(۴)=۱۷\end{cases}$$

جمع تمام مقادیر برد $f+g$ از جمع عبارات بالا حاصل می‌شود، یعنی:

$$۲+\frac{۱}{۲}+۳+۵+۱+۱+۵+۱۷=۳۴/۵$$

۶۸ گزینه ۲

نمودار تابع $f(۱-x)$ را از روی نمودار $f(۱+x)$ رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار تابع $f(۱+x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.



باتوجه‌به شکل، دامنهٔ تابع $y=f(۱-x)$ برابر $[-۴\,,\,۰]$ است به‌علاوه دامنهٔ $g(x)$ برابر $\{-۱,۲\,,-۳\,,-۲\,,۵\}$ است که اشتراک آن‌ها برابر $\{-۱,\,-۳\,,\,-۲\}$ است، به‌علاوه دقت کنید به ازای $x=-۲$ مخرج صفر می‌شود، پس دامنهٔ تابع $y=\frac{f(۱-x)}{g(x)+۱}$ برابر $\{-۱,\,-۳\}$ است و دو عضو دارد.

۶۹ گزینه ۱

$$(۲fg)(۳)=۲f(۳)\times g(۳)=۲(۱)\times ۴=۸$$

$$(f-g)(۲)=f(۲)-g(۲)=۵-(-۳)=۸\Rightarrow ۳(f-g)(۲)=۲۴$$

$$(\frac{f}{g})(-۲)=\frac{f(-۲)}{g(-۲)}=\frac{-۱}{۳}=-\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۸}{۲۴}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}=۰$$

۷۰ گزینه ۲

$$(f+(gof))(-۱)=f(-۱)+(gof)(-۱)$$

$$=۰+g(f(-۱))=۰+g(۰)=g(۰)=۲$$

۷۱ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} D_g=\{۱,۳,۵\} \\ D_f=\mathbb{R} \end{array}\right\}\Rightarrow D_{f+g}=\{۱,۳,۵\}$$

$$f+g=\{(۱,۴),(۳,۱۱),(۵,۲۸)\}=\{(۱,a),(b,۱۱),(۵,۴c)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۳ \\ c=۷ \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{c}=۱$$

۷۲ گزینه ۲

$$۲f=\{(۲,۲),(۱,۱۲),(۴,۱۲)\}$$

$$۲f+g=\{(۲,۶),(۱,۱۴)\}$$

$$fog=\{(۱,۱),(۲,۶),(۶,۶)\}$$

$$\Rightarrow \frac{۲f+g}{fog}=\{(۲,۱),(۱,۱۴)\}$$

۷۳ گزینه ۳

$$(f-g)(x_\circ)=-۲ \Rightarrow f(x_\circ)-g(x_\circ)=-۲ \Rightarrow \tan x_\circ-\cot x_\circ=-۲$$

$$\Rightarrow -۲\cot ۲x_\circ=-۲ \Rightarrow \cot ۲x_\circ=۱ \Rightarrow ۲x_\circ=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x_\circ=\frac{\pi}{۸}$$

$$(g+f)(x_\circ)=g(x_\circ)+f(x_\circ)=\tan x_\circ+\cot x_\circ$$

$$=\frac{۲}{\sin ۲x_\circ} \Rightarrow (g+f)\left(\frac{\pi}{۸}\right)=\frac{۲}{\sin\frac{۲\pi}{۸}}=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

۷۴ گزینه ۲

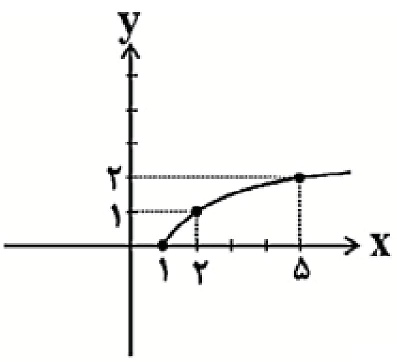
$$D_g: ۱-x^۲>\circ \Rightarrow D_g=(-۱,۱)\ ,\ D_f=\mathbb{R}$$

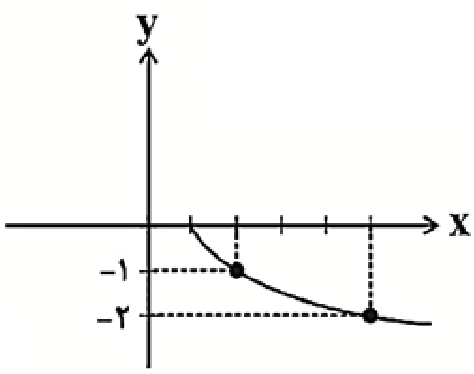
$$D_{(\frac{g}{f})}=(D_f\bigcap D_g)-\{x|f(x)=\circ\}=\left(\mathbb{R}\bigcap(-۱,۱)\right)-\{x|x=-۲\}$$

$$\Rightarrow D_{(\frac{g}{f})}=(-۱,۱)-\{-۲\} \Rightarrow D_{(\frac{g}{f})}=(-۱,۱)$$

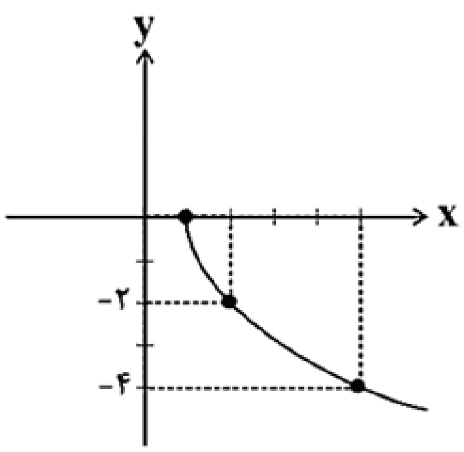
۷۵ گزینه ۴

ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱}$ را رسم کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:





درنهایت عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم؛ بنابراین داریم:



۷۶ گزینه ۳

$$\frac{۳n+۷}{n+۳}=\frac{۳(n+۳)-۲}{n+۳}=۳-\frac{۲}{n+۳}$$

چون n عدد طبیعی است، $\frac{۲}{n+۳}$ عددی بین صفر و ۱ می‌شود (درواقع بین صفر و $\frac{۱}{۲}$)، پس مقدار $۳-\frac{۲}{n+۳}$ بین ۲ و ۳ است و براکت آن همواره ۲ خواهد بود.

۷۷ گزینه ۳

$[x]+[-x]$ برای اعداد صحیح، صفر و برای سایر اعداد، ۱- است.

$x-[x]$ هم جزء کسری x را نشان می‌دهد که برای اعداد صحیح صفر و برای سایر اعداد، مقداری بین صفر و ۱ است ($۰\leq x-[x]<۱$) پس این تساوی فقط در اعداد صحیح امکان دارد که هر دو طرف صفر است.

۷۸ گزینه ۲

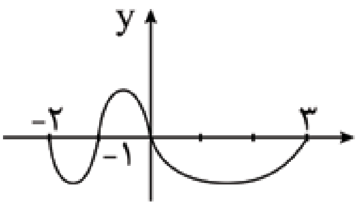
می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & ,x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}۰ & , & x\in\mathbb{Z}\\ x & , & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

که نمودار (۲)، نمودار تابع f را نشان می‌دهد.

۷۹ گزینه ۴

$$-f(-x)\geq ۰\Rightarrow f(-x)\leq ۰$$



حال قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور xها قرارگرفته است، در نظر می‌گیریم، پس:

$$f(-x)\leq ۰\Rightarrow\begin{cases}۰\leq -x\leq ۳\Rightarrow -۳\leq x\leq ۰\\ -۲\leq -x\leq -۱\Rightarrow ۱\leq x\leq ۲\end{cases}$$

اعداد صحیحی که در دامنهٔ این تابع قرار دارند، عبارتند از: $-۳\,,\,-۲\,,\,-۱\,,\,۰\,,\,۲\,,\,۱$. بنابراین دامنهٔ این تابع شامل ۶ عدد صحیح است.

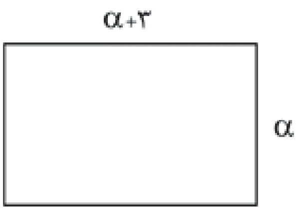
۸۰ گزینه ۱

اگر عرض مستطیل را α در نظر بگیریم، طول آن برابر $\alpha + 3$ خواهد شد، پس:

$$\text{محیط}: x = 2(\alpha + \alpha + 3) = 4\alpha + 6$$

$$\text{مساحت}: S = \alpha(\alpha + 3)$$

حال α را برحسب x به‌دست می‌آوریم و در مساحت جای‌گذاری می‌کنیم:

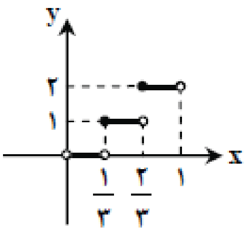


$$x = 4\alpha + 6 \Rightarrow \alpha = \frac{x-6}{4}$$

$$S = \alpha(\alpha + 3) = \frac{x-6}{4}\left(\frac{x-6}{4} + 3\right) = \left(\frac{x-6}{4}\right)\left(\frac{x+6}{4}\right) = \frac{x^2 - 36}{16}$$

۸۱ گزینه ۴

با استفاده از بازه‌بندی، نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0 \\ \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 \leq 3x < 2 \Rightarrow [3x] = 1 \\ \frac{2}{3} \leq x < 1 \Rightarrow 2 \leq 3x < 3 \Rightarrow [3x] = 2 \end{cases}$$

۸۲ گزینه ۳

$$\text{نکته}: [-x] + [x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} : 0 \times (x^2 - 5) = -4 \Rightarrow 0 = -4 \quad \text{غ ق ق} \\ x \notin \mathbb{Z} : (-1) \times (x^2 - 5) = -4 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \in \mathbb{Z} & \text{غ ق ق} \\ x = -3 \in \mathbb{Z} & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

پس معادلهٔ مورد نظر، جواب ندارد.

۸۳ گزینه ۱

نمودار تابع نسبت به محور yها متقارن است

$$-۱ < x < ۱ \Rightarrow y = ۰$$

در دونقطه $x = \pm ۲$ مقدار $y = ۴$ است

$$-\sqrt{۲} < x \leq -۱ \text{ یا } ۱ \leq x < \sqrt{۲} \Rightarrow y = ۱$$

$$-\sqrt{۳} < x \leq -\sqrt{۲} \text{ یا } \sqrt{۲} \leq x < \sqrt{۳} \Rightarrow y = ۲$$

$$-۲ < x \leq -\sqrt{۳} \text{ یا } \sqrt{۳} \leq x < ۲ \Rightarrow y = ۳$$

پس نمودار تابع از ۲ نقطه و ۷ پاره خط تشکیل‌شده است.

۸۴ گزینه ۱

هر تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ است. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(۲) = ۲a + b \\ f(۷) = ۷a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۵ \\ ۷a + b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۷}{۵} \quad , \quad b = \frac{۱۱}{۵}$$

پس تابع خطی به‌صورت $f(x) = \frac{۱}{۵}(۷x + ۱۱)$ است.

$$f^{-۱}(۱۹) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = ۱۹ \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۵}(۷x + ۱۱) = ۱۹ \quad \Rightarrow \quad x = ۱۲$$

۸۵ گزینه ۴

تابع f از دو نقطهٔ $(۳, ۴)$ و $(۴, ۳)$ گذشته است لذا تابع $f^{-۱}$ از دو نقطهٔ $(۴, ۳)$ و $(۳, ۴)$ می‌گذرد. منحنی نمودار دو تابع خطی f و $f^{-۱}$ برهم منطبق‌اند لذا تعداد نقاط تلاقی آن‌ها بی‌شمار است.

۸۶ گزینه ۴

چون نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ غیرمتقاطع‌اند، الزاماً نمودار تابع خطی f موازی نیمساز ناحیهٔ اول است، پس $f(x) = x + b$ است.

$$f(۲) = ۵ \Rightarrow ۲ + b = ۵ \Rightarrow b = ۳$$

پس $f(x) = x + ۳$ درنتیجه $f(۴) = ۷$ است.

۸۷ گزینه ۳

در تابع خطی $f(x) = ax + b$ داریم:

$$\begin{cases} f(۲) = ۱ \\ f(۷) = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۱ \\ ۷a + b = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \quad b = -۳$$

پس $f(x) = ۲x - ۳$ است. از طرفی می‌دانیم $f^{-۱}(۱۵) = x \Leftrightarrow f(x) = ۱۵$، پس $۲x - ۳ = ۱۵$ و درنتیجه $x = ۹$ است.

۸۸ گزینه ۲

در تابع مفروض کافی است که سه‌جمله‌ای زیر رادیکال مثبت باشد.

$$۲x - x^۲ + ۳ > ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۳$$

پس دامنه تابع بازه $(-۱, ۳)$ است.

۸۹ گزینه ۱

عدد صحیح را به‌صورت جمع جبري می‌توان بیرون جزء صحیح نوشت:

$$[۳x - ۲] = -۴ \Rightarrow [۳x] - ۲ = -۴ \Rightarrow [۳x] = -۲$$

درنتیجه $-۲ \leq ۳x < -۱$ پس $\frac{-۲}{۳} \leq x < \frac{-۱}{۳}$ یا بازه $[-\frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۳})$ جواب معادله است.

۹۰ گزینه ۱

نکته: اگر k عددی صحیح باشد $(k \in \mathbb{Z})$، آنگاه:

$$[x + k] = [x] + k$$

نکته:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به نکات فوق، داریم:

$$f(x) = [x] - ۱ + [-x] + ۵ = \underbrace{[x] + [-x]}_{-۱} + ۴ = ۳$$

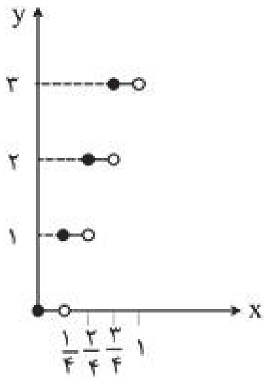
حال با توجه به‌تساوی $f(x) = ۳$، داریم:

$$x \notin \mathbb{Z} : f(\frac{f(x)}{۲}) = ۳x - ۱ \Rightarrow f(\frac{۳}{۲}) = ۳x - ۱ \Rightarrow ۳ = ۳x - ۱ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

چون $x = \frac{۴}{۳} \notin \mathbb{Z}$، پس قابل قبول است. بنابراین معادلهٔ داده‌شده دارای یک جواب است.

۹۱ گزینه ۳

ابتدا نمودار تابع $y=[۴x]$ را در بازهٔ $[۰,۱)$ رسم می‌کنیم:



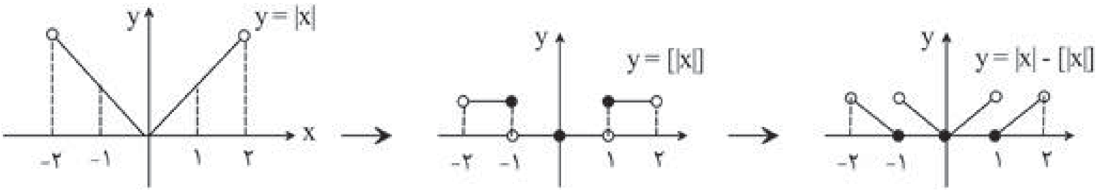
$$\begin{cases} ۰ \le x < \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۰ \le ۴x < ۱ \Rightarrow [۴x] = ۰ \\ \frac{۱}{۴} \le x < \frac{۲}{۴} \Rightarrow ۱ \le ۴x < ۲ \Rightarrow [۴x] = ۱ \\ \frac{۲}{۴} \le x < \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۲ \le ۴x < ۳ \Rightarrow [۴x] = ۲ \\ \frac{۳}{۴} \le x < ۱ \Rightarrow ۳ \le ۴x < ۴ \Rightarrow [۴x] = ۳ \end{cases}$$

با توجه به شکل بالا، مساحت قسمت هاشور خورده برابر است با:

$$(۱ \times \frac{۱}{۴}) + (۲ \times \frac{۱}{۴}) + (۳ \times \frac{۱}{۴}) = \frac{۳}{۲}$$

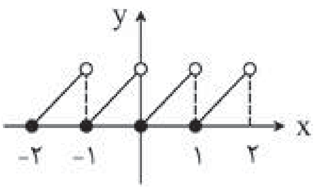
۹۲ گزینه ۳

راه‌حل اول:

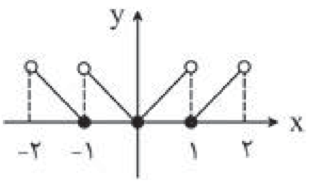


راه‌حل دوم:

ابتدا نمودار $f(x) = x - [x]$ را در $(-۲, ۲)$ رسم می‌کنیم:



اکنون کافی است نمودار $y = f(|x|)$ را رسم کنیم. برای این منظور، در نمودار بالا قسمت‌هایی از نمودار که در $x < ۰$ قرارگرفته را حذف کرده و باقی‌ماندهٔ نمودار را علاوه بر آنکه حفظ می‌کنیم، نسبت به محورyها قرینه می‌کنیم:



۹۳ گزینه ۴

نکته: اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه:

$$[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\\ \text{یا}\\ [x]+[y]+1\end{cases}$$

با قرار دادن x به‌جای y در رابطهٔ فوق، داریم:

$$[2x]=\begin{cases}2\,[x]\\ \text{یا}\\ 2\,[x]+1\end{cases}$$

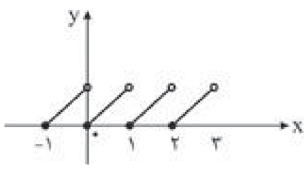
اکنون می‌توان نوشت:

$$f(x)=[2x]-2\,[x]+3=\begin{cases}2\,[x]-2\,[x]+3=3\\ 2\,[x]+1-2\,[x]+3=4\end{cases}\Rightarrow max(f)=4\;,\;min(f)=3$$

بنابراین مجموع بیشترین و کمترین مقدار تابع f، برابر ۷ است.

۹۴ گزینه ۳

مطابق شکل نمودار از چهار پاره‌خط ساخته می‌شود:



۹۵ گزینه ۳

$$[x^2+x]=-1\xrightarrow[\text{جزء صحیح}]{\text{تعریف}}-1\le x^2+x<0\Rightarrow\begin{cases}x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow -1<x<0\\ x^2+x+1\ge 0\quad(\text{همواره برقرار است (زیرا } \Delta<0 \text{ و } a>0 \text{ است)})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\;[x]=-1\;,\;[x^2]=0\;,\;[x^3]=-1\;\Rightarrow\;[x]-[x^2]+[x^3]=-1-0-1=-2$$

نکته: در عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c هرگاه $\Delta<0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}\text{اگر}\;\; a<0\;\Rightarrow\; ax^2+bx+c<0\;\;(\text{همواره منفی})\\ \text{اگر}\;\; a>0\;\Rightarrow\; ax^2+bx+c>0\;\;(\text{همواره مثبت})\end{cases}$$

۱	○○○●	۱۱	○○○●	۲۱	○○●○	۳۱	●○○○	۴۱	○○●○
۲	○○○●	۱۲	○○●○	۲۲	●○○○	۳۲	○○●○	۴۲	○○●○
۳	○●○○	۱۳	○○○●	۲۳	○●○○	۳۳	○○●○	۴۳	○●○○
۴	○○●○	۱۴	●○○○	۲۴	●○○○	۳۴	○○○●	۴۴	○●○○
۵	○○○●	۱۵	○○●○	۲۵	○○●○	۳۵	○○●○	۴۵	○○○●
۶	○○○●	۱۶	○○○●	۲۶	○●○○	۳۶	○○●○	۴۶	●○○○
۷	●○○○	۱۷	○●○○	۲۷	○○○●	۳۷	●○○○	۴۷	○●○○
۸	●○○○	۱۸	○○●○	۲۸	○○○●	۳۸	○○○●	۴۸	○○○●
۹	○○●○	۱۹	●○○○	۲۹	●○○○	۳۹	○○○●	۴۹	○○●○
۱۰	●○○○	۲۰	●○○○	۳۰	○○●○	۴۰	○○●○	۵۰	○●○○

۵۱	○○●○	۶۱	○○○●	۷۱	○○●○	۸۱	○○●○	۹۱	●○○○
۵۲	○○○●	۶۲	○●○○	۷۲	○○●○	۸۲	●○○○	۹۲	○○○●
۵۳	○○○●	۶۳	○○●○	۷۳	○●○○	۸۳	○●○○	۹۳	○○○●
۵۴	○○●○	۶۴	●○○○	۷۴	○●○○	۸۴	○○○●	۹۴	○●○○
۵۵	●○○○	۶۵	●○○○	۷۵	○●○○	۸۵	○●○○	۹۵	●○○○
۵۶	○○●○	۶۶	●○○○	۷۶	●○○○	۸۶	○○●○		
۵۷	●○○○	۶۷	○○○●	۷۷	●○○○	۸۷	●○○○		
۵۸	○●○○	۶۸	○○●○	۷۸	○●○○	۸۸	○○●○		
۵۹	●○○○	۶۹	○○●○	۷۹	●○○○	۸۹	○○○●		
۶۰	○○●○	۷۰	○○○●	۸۰	○○●○	۹۰	○●○○		

مهندس
صادق
طاهری
۰۹۱۷ ۴۴۵ ۷۱۴۴