

۱ معادله خطی که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع کرده و بر خط $2x + 3y = -1$ عمود باشد، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 2y = 3x + 9 & (1) \\ 2y + 3x = 9 & (2) \\ 3y = 2x + 6 & (3) \\ y - 3x = 2 & (4) \end{array}$$

۲ مثلث ABC که مختصات رأس‌های آن $A(3, 5)$ ، $B(3, -1)$ و $C(7, 2)$ است، چگونه است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ متساوی‌الساقین} & (2) \text{ متساوی‌الاضلاع} \\ (3) \text{ مختلف‌الاضلاع} & (4) \text{ قائم‌الزاویه} \end{array}$$

۳ خط $6x - 8y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. اندازه شعاع دایره کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 1 & (1) \\ 2 & (2) \\ 4 & (3) \\ 9 & (4) \end{array}$$

۴ نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ ، سه رأس مستطیل ABCD هستند. مختصات رأس چهارم آن کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) (4, 2) & (2) (4, 1) \\ (3) (3, 1) & (4) (3, 0) \end{array}$$

۵ اگر خطوط $-bx + (a - b)y - 8 = 0$ و $3ax + by - c = 0$ در نقطه $(1, 2)$ همدیگر را قطع کنند و بر هم عمود باشند، آنگاه c کدام است؟ $(a \neq b, a \neq 0, b \neq 0)$

$$\begin{array}{ll} 1 & (1) \\ -1 & (2) \\ 4 & (3) \\ -4 & (4) \end{array}$$

۶ دو نقطه $A(-4, 7)$ و $B(1, 5)$ دو سر قطری از دایره هستند. معادله قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y + 4x = 0 & (1) \\ 5y - 2x = 0 & (2) \\ y - 4x = 0 & (3) \\ 2y - 5x = 0 & (4) \end{array}$$

۷ فاصله بین دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 1 & (1) \\ \frac{3}{13} & (2) \\ \frac{3}{2} & (3) \\ 3 & (4) \end{array}$$

۸ قرینه نقطه $A(3, 2)$ نسبت به خط $y = x - 3$ کدام است؟

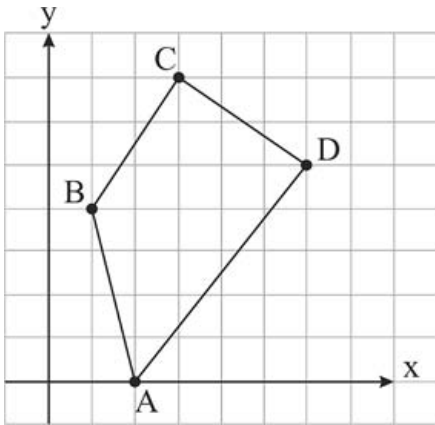
$$\begin{array}{ll} (4, 3) & (1) \\ (5, 0) & (2) \\ (\frac{11}{3}, \frac{9}{4}) & (3) \\ (\frac{11}{3}, \frac{9}{4}) & (4) \end{array}$$

۹ اگر یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله $y = x + 2$ و نقطه $A(3, -1)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۱۸
(۲) ۳۶
(۳) ۹
(۴) $\frac{6}{\sqrt{2}}$

۱۰ اگر قطر یک مربع منطبق بر خط به معادله $3x - 4y = 1$ و نقطه $A(1, -2)$ یک رأس این مربع باشد، محیط این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
(۲) $8\sqrt{2}$
(۳) $4\sqrt{2}$
(۴) $\sqrt{2}$



۱۱ در شکل زیر، چهار ضلعی ABCD رسم شده است، مجموع شیب‌های اضلاع (خطوط) کدام است؟

- (۱) $-\frac{23}{12}$
(۲) $\frac{23}{12}$
(۳) $\frac{23}{6}$
(۴) $-\frac{23}{6}$

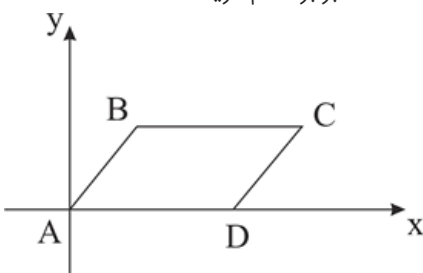
۱۲ عرض از مبدأ خط گذرا بر دو نقطه $(3, -2)$ و $(1, 2)$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) $\frac{4}{5}$
(۳) ۵
(۴) $\frac{5}{5}$

۱۳ برای رسیدن از نقطه A به نقطه B، ابتدا ۴ واحد به چپ و سپس ۳ واحد به طرف پایین حرکت می‌کنیم. اگر پاره‌خط AB، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع کند، معادله خط AB کدام است؟

- (۱) $3y + 4x = -8$
(۲) $4y - 3x = -18$
(۳) $4y - 3x = 18$
(۴) $4y + 3x = 8$

۱۴ در شکل زیر، چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. اگر اندازه ضلع BC برابر ۵ باشد و معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد، $y - 2x = 0$ باشد و معادله خطی که ضلع CD روی آن قرار دارد $ay + bx + 5 = 0$ باشد، آنگاه $a + b$ برابر کدام گزینه است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) -۱
(۴) $-\frac{1}{2}$

۱۵ کدام دو خط زیر بر هم عمود نیستند؟

- (۱) $x = 1$ و $y = -2$
 (۲) $y = x$ و $y = -x$
 (۳) $3x - y + 2 = 0$ و $y = -3x + 2$
 (۴) $y + 7 = -\frac{1}{5}x$ و $y - 5x + 3 = 0$

۱۶ نقطه $(a, 2a)$ مرکز دایره گذرنده بر دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) $2\sqrt{2}$
 (۴) $3\sqrt{2}$

۱۷ دایره‌ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
 (۲) ۲
 (۳) $\sqrt{5}$
 (۴) ۳

۱۸ نقطه A به طول ۴ واقع بر محور xها و نقطه B به عرض ۲ روی محور yها است. معادله خطی که از وسط AB بر آن عمود باشد، کدام است؟

- (۱) $2y + x = -3$
 (۲) $2y + x = 1$
 (۳) $y + 2x = 3$
 (۴) $y + 2x = 4$

۱۹ دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

- (۱) ۹ و ۱۵
 (۲) ۱۱ و ۱۵
 (۳) ۱۵ و ۱۱
 (۴) ۹ و ۱۱

۲۰ فاصله دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

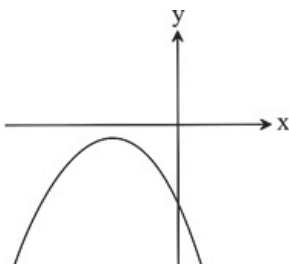
- (۱) $2 - \sqrt{3}$
 (۲) $\sqrt{3} - 1$
 (۳) $\sqrt{3} + 1$
 (۴) $2 + \sqrt{3}$

۲۱ به ازای چه مقادیری از m معادله $(m - 2)x^2 - 2x + (m - 3) = 0$ دارای دو ریشه حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟

- (۱) $m < 1$
 (۲) $m > 1$
 (۳) $2 < m < 5$
 (۴) $2 < m < 3$

۲۲ شکل زیر مربوط به سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) یکی از صفراهای تابع، منفی است.
 (۲) $c < 0$ و $b > 0$ و $a < 0$
 (۳) $c > 0$ و $b < 0$ و $a > 0$
 (۴) $bc > 0$ و $a < 0$



۲۳ در معادله $4x^2 - \lambda x + c = 0$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگ‌تر از ریشه دیگر است. در معادله $2x^2 - x + c = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

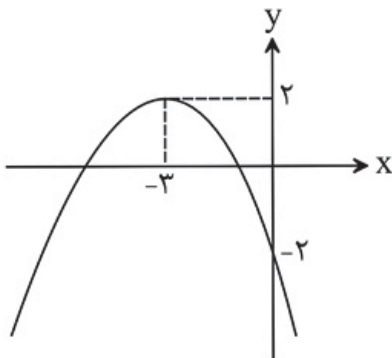
- (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$
 (۳) -5 (۴) 5

۲۴ مجموع ریشه‌های معادله $(x^2 - 1)^2 - 4x^2 + 7 = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ریشه ندارد.
 (۳) $4 + 2\sqrt{2}$ (۴) $2 + \sqrt{2}$

۲۵ معادله $(x + \frac{1}{x})^2 + 3(x + \frac{1}{x}) - 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۴
 (۳) ۱ (۴) ۲



۲۶ نمودار تابع $f(x) = a(3x + b)^2 - c$ به صورت زیر است. حاصل $9ab + c$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -4
 (۳) -6 (۴) -8

۲۷ ریشه‌های کدام یک از معادلات زیر، دو برابر ریشه‌های معادله $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (۲) $x^2 - 6x + 4 = 0$
 (۳) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (۴) $x^2 - 10x + 16 = 0$

۲۸ اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت

$\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸
 (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

۲۹ اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (k + 3)x^2 - 4x + k$ برابر با صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -1
 (۳) 1 (۴) 4

۳۰ ریشه‌های کدام یک از معادله‌های درجه دوم زیر $\sqrt{5} - 3$ و $\sqrt{5} + 3$ است؟

(۱) $x^2 - 4x + 6 = 0$ (۲) $x^2 + 4x + 6 = 0$
 (۳) $x^2 - 6x + 4 = 0$ (۴) $x^2 + 6x + 4 = 0$

۳۱ اگر k جواب معادله $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$ باشد، جواب معادله $\sqrt{x+k} = k$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۳
 (۳) ۱۵ (۴) ۹

۳۲ مجموعه جواب معادله $\sqrt{169 - x^2} = x - 17$ کدام است؟

(۱) $[-13, 13]$ (۲) R
 (۳) $[-13, 17]$ (۴) \emptyset

۳۳ اگر $x = 2$ جواب معادله $\frac{(x^2 + 1)^2}{(x + k)^2} = \frac{3x + 1}{(k + 2)^2} + 2$ باشد، مقدار k کدام است؟

(۱) -1 و -5 (۲) -2 و 1
 (۳) 1 و -5 (۴) 2 و 1

۳۴ تعداد جواب‌های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{1}{x^2-4}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱
 (۳) ۲ (۴) ۳

۳۵ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 - x$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳
 (۳) صفر (۴) ۱

۳۶ به ازای کدام مقدار k ، $x = -2$ یکی از ریشه‌های معادله $\frac{3}{2x-1} + \frac{5}{k} = \frac{9x}{2x+1}$ است؟

(۱) $\frac{7}{11}$ (۲) $\frac{33}{25}$
 (۳) $\frac{25}{33}$ (۴) $\frac{11}{7}$

۳۷ در مورد معادله $x + \sqrt{2x-1} = 3$ کدام درست است؟

- (۱) دو ریشه مثبت دارد. (۲) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.
 (۳) فقط یک ریشه مثبت دارد. (۴) فاقد ریشه است.

۳۸ معادله $\sqrt{2x-3} + \sqrt{8x-12} = x+1$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۳۹ معادله $9\sqrt{\frac{x}{2x+1}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x}} = 6$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار

۴۰ خط $2x + y = 4$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, 1)$ مماس است. اگر $A(1, 2)$ نقطه‌ای روی خط مماس داده شده باشد، طول مماس AM کدام است؟ (M نقطه تماس خط و دایره است)

- (۱) $2\sqrt{5}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
(۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۴۱ فاصله نقطه برخورد دو خط $y = 3x + 5$ و $y = -10$ از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) ۲۵
(۲) ۵
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) $2\sqrt{5}$

۴۲ اگر دو خط $y = 4x + 2$ و $y = 4x + m^2 - 7$ بر دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع منطبق باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) m هر عددی می‌تواند باشد.
(۲) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳
(۳) m هر عددی می‌تواند باشد به جز -3
(۴) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳ و -3

۴۳ اگر دو خط به معادله‌های $(m+2)y = x+3$ و $y = (2m+1)x+1$ بر هم عمود باشند، m کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $-\frac{2}{3}$
(۳) -1
(۴) ۱

۴۴ اگر خط به معادله $ay + x = b$ بر خط به معادله $ax + by = 1$ عمود باشد و از نقطه $A(1, -2)$ بگذرد، آنگاه $a + b$ کدام است؟ ($a, b \neq 0$)

- (۱) -1
(۲) ۱
(۳) صفر
(۴) -2

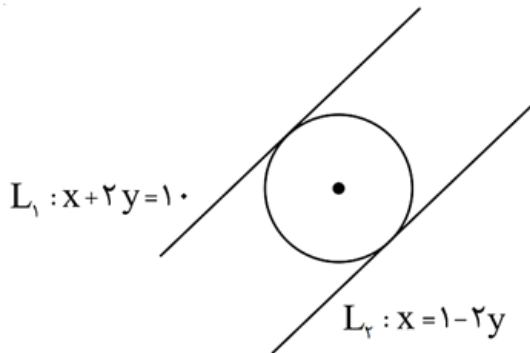
۴۵ دو خط به معادله $my - x = -7$ و $m^3x + y = 2$ بر دو ضلع مربع منطبق‌اند. در این صورت برای m چند جواب وجود دارد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۴۶ سه نقطه متمایز $A(3, 2)$ ، $B(m+1, m)$ و $C(m^2, m+1)$ روی یک خط قرار دارند. در این صورت عرض از مبدأ خط کدام است؟

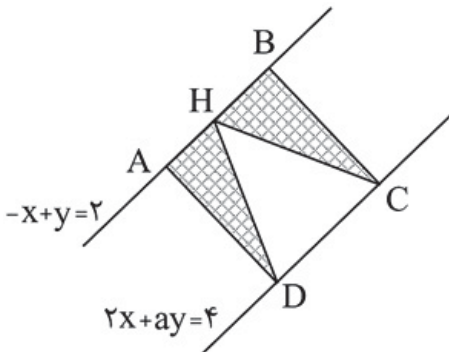
- (۱) -۴
(۲) ۵
(۳) -۱
(۴) ۱

۴۷ دایره‌ای مطابق شکل، بر دو خط L_1 و L_2 مماس است. مساحت دایره چقدر است؟



- (۱) $\frac{81\pi}{20}$
(۲) $\frac{83\pi}{20}$
(۳) $\frac{\pi}{20}$
(۴) $\frac{3\pi}{20}$

۴۸ در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ مربع و مثلث DCH متساوی‌الساقین است. مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) $\sqrt{8}$
(۳) ۸
(۴) ۲

۴۹ نقطه $A(-3, 2)$ رأس مربعی است که یک قطر آن منطبق بر خط $y - x = 4$ است. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) $\sqrt{2}$

۵۰ به ازای چه مقدار از k معادله $\frac{1}{x+2} + \frac{6}{k} = \frac{3x}{x-2}$ دارای جواب $x = 1$ است؟

- (۱) $1/8$
(۲) $-1/8$
(۳) $1/2$
(۴) $-1/2$

۵۱ مجموعه جواب معادله $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$ کدام است؟

- (۱) $\{-1, \frac{1}{2}\}$
(۲) $\{1, -\frac{1}{2}\}$
(۳) $\{-1, -\frac{1}{2}\}$
(۴) $\{1, \frac{1}{2}\}$

۵۲ فاصله نقطه‌ای به طول $\sqrt{3}$ روی خط $\sqrt{3}x - 2y = 1$ ، از خطی با شیب -2 که از نقطه $(3, 2)$ عبور می‌کند، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{7-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & (1) \\ \frac{9+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & (2) \\ \frac{7+2\sqrt{3}}{3} & (3) \\ \frac{9-2\sqrt{3}}{3} & (4) \end{array}$$

۵۳ اگر $A(3, 8)$ و B نقطه‌ای روی محور طول‌ها به طول -1 باشد، فاصله نقطه M وسط پاره‌خط AB از مبدأ مختصات کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \sqrt{10} & (1) \\ \sqrt{17} & (2) \\ 4 & (3) \\ 5 & (4) \end{array}$$

۵۴ نقاط $A(4, 2)$ ، $B(1, -1)$ و $C(6, -1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M و H به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} & (1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \\ 1 & (3) \\ \frac{1}{3} & (4) \end{array}$$

۵۵ نقاط $A(1, 4)$ ، $B(5, -2)$ و $C(0, 6)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (-4, 12) & (1) \\ (-4, 10) & (2) \\ (-3, 2) & (3) \\ (-3, 6) & (4) \end{array}$$

۵۶ خط به معادله $ax + by = 6$ عمودمنصف پاره‌خط AB است. اگر $A(2, -3)$ و $B(-4, 1)$ باشند، آنگاه $a + 3b$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 18 & (1) \\ -6 & (2) \\ 36 & (3) \\ 54 & (4) \end{array}$$

۵۷ مقدار m چقدر باشد تا فاصله دو نقطه $A(m, 2)$ و $B(2m + 1, -m)$ برابر با ۵ باشد؟

$$\begin{array}{ll} 3 \text{ یا صفر} & (1) \\ 2 \text{ فقط} & (2) \\ 2 \text{ یا } -5 & (3) \\ -5 \text{ فقط} & (4) \end{array}$$

۵۸ مثلث ABC با رئوس $A(1, 2)$ و $B(5, -1)$ و $C(4, 6)$ ، چه نوع مثلثی است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ متساوی‌الساقین غیرقائم‌الزاویه} & \\ (2) \text{ متساوی‌الاضلاع} & \\ (3) \text{ قائم‌الزاویه مختلف‌الاضلاع} & \\ (4) \text{ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین} & \end{array}$$

۵۹ اگر نقطه $(3, 4)$ وسط پاره‌خطی باشد که یک سر آن روی محور طول‌ها و سر دیگر آن روی محور عرض‌ها باشد، در این صورت معادله خط گذرنده از این سه نقطه کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 3x + 2y - 12 = 0 & (1) \\ 3y + 4x - 24 = 0 & (2) \\ 3y + 2x - 12 = 0 & (3) \\ 3x + 4y - 24 = 0 & (4) \end{array}$$

۶۰ فاصله نقطه $A(-1, 4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر با ۳ است. مقدار k کدام است؟ ($k > 0$)

- (۱) ۲۴
(۲) ۳۶
(۳) ۴۶
(۴) ۵۴

۶۱ اگر $A(x - 2, 0)$ و $B(x, 2x)$ و فاصله نقطه M وسط AB از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ باشد، مقادیر x کدام اند؟

- (۱) ۱ و -۱
(۲) ۱ و -۲
(۳) ۳ و -۱
(۴) ۲ و -۳

۶۲ اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، خط گذرا از نقاط $A(b, a)$ و $B(a, b)$ همواره بر کدام خط عمود است؟

- (۱) $y + x = 0$
(۲) $y - 2x = 0$
(۳) $y - x = 0$
(۴) $x - 2y = 0$

۶۳ فاصله نقطه $A(-2m + 1, 3m - 9)$ از دو محور مختصات به یک اندازه است. در این صورت OA برابر است با:

- (۱) ۳ یا ۵
(۲) $5\sqrt{2}$ یا $15\sqrt{2}$
(۳) $15\sqrt{2}$ یا $3\sqrt{2}$
(۴) ۲ یا ۸

۶۴ مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-1, 2)$ ، $B(2, 4)$ و $C(4, -1)$ برابر است با:

- (۱) ۱۹
(۲) $\frac{19}{2}$
(۳) ۹
(۴) ۳۸

۶۵ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + (c + 2)x + 8 = 0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ به صورت $\sqrt{\alpha\beta}$ و $2\sqrt{\alpha\beta}$ خواهد بود. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

- (۱) -۵
(۲) ۵
(۳) ۴
(۴) -۴

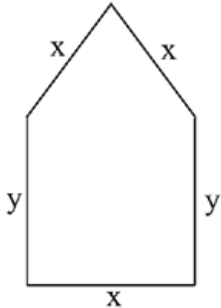
۶۶ اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x + 6 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{3\alpha - 1, 3\beta - 1\}$ است؟

- (۱) $x^2 - 2x - 4 = 0$
(۲) $x^2 - 6x - 13 = 0$
(۳) $x^2 + 6x - 13 = 0$
(۴) $x^2 + 2x - 4 = 0$

۶۷ سهمی به معادله $f(x) = -mx^2 + 2x + m - 1$ فقط از ناحیه اول و مبدأ نمی‌گذرد. حدود m کدام است؟

- (۱) $m > 0$
(۲) $m < 0$
(۳) $0 < m < 1$
(۴) هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود.

۶۸ می‌خواهیم پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد مستطیل چند متر



باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ ($\frac{\sqrt{3}}{4}$ را $\frac{5}{5}$ فرض کنید)

(۱) $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}$

(۲) $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$

(۳) $\frac{2}{5}, \frac{3}{2}$

(۴) $\frac{3}{4}, \frac{1}{5}$

۶۹ کدام معادله، تعداد جواب‌های کمتری نسبت به معادله بقیه گزینه‌ها دارد؟

(۱) $x^6 - 7x^2 + 12 = 0$

(۲) $x^6 + 8x^2 + 7 = 0$

(۳) $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 = 0$

(۴) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۷۰ اگر رأس سهمی $y = x^2 - mx + m + 1$ بر روی خط $y = x + 1$ واقع باشد، در این صورت مقدار m کدام است؟

(۱) ۱ یا ۳

(۲) ۱ یا -۳

(۳) صفر یا ۲

(۴) صفر یا -۲

۷۱ اگر محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 - kx + 1$ به صورت $x = -2$ باشد، کمترین مقدار سهمی کدام است؟

(۱) -۳

(۲) -۲

(۳) ۲

(۴) ۳

۷۲ جواب معادله گویای $\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = ax^{-1}$ ($a \neq 0$) کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}a$

(۲) $\frac{2}{3}a$

(۳) $\frac{1}{2}a$

(۴) $\frac{3}{2}a$

۷۳ اگر محل تلاقی نمودار یک سهمی با محور x ها، نقاطی به طول‌های ۱ و ۲ باشد و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند، طول رأس سهمی کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

۷۴ نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ را طوری رسم کنیم که مساحت آن ۱۲ سانتی‌متر مربع باشد و دو رأس آن روی خط d باشد. برای یافتن دو رأس مثلث، دایره‌ای به مرکز A و به چه شعاعی بزنیم؟

(۱) $4/5 \text{ cm}$

(۲) 5 cm

(۳) 6 cm

(۴) $4\sqrt{2} \text{ cm}$

۷۵ مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. اگر O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB و BC باشد، به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای می‌زنیم. این دایره کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در چهار نقطه دیگر قطع می‌کند.
 (۲) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در نقطه دیگری قطع نمی‌کند.
 (۳) در این دایره مرکز O همواره در خارج از مثلث قرار می‌گیرد.
 (۴) این دایره از هر سه رأس مثلث یعنی A ، B و C عبور می‌کند.

۷۶ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه امام متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری این مسیر را از شمال به جنوب با سرعت ثابت V کیلومتر بر ساعت و بدون توقف طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت قطار $10 \frac{km}{h}$ کم شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت می‌شود. سرعت برگشت قطار کدام است؟ $\left(\text{سرعت} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان}} \right)$

- (۱) $40 \frac{km}{h}$
 (۲) $30 \frac{km}{h}$
 (۳) $20 \frac{km}{h}$
 (۴) $10 \frac{km}{h}$

۷۷ نقطه C از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است و روی AB قرار ندارد، آنگاه کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

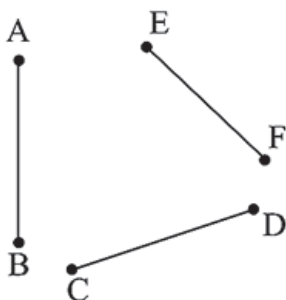
- (۱) وسط پاره‌خط AB روی نیمساز زاویه \hat{ACB} قرار دارد.
 (۲) وسط پاره‌خط AC از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است.
 (۳) روی عمودمنصف AB قرار دارد.
 (۴) مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۷۸ در شکل زیر نقطه‌ای وجود دارد که فاصله آن از A و B یکسان، از C و D یکسان و از E و F نیز یکسان است. چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

(الف) محل برخورد عمودمنصف‌های AB و EF روی عمودمنصف CD قرار دارد.

(ب) محل برخورد عمودمنصف‌های سه پاره‌خط AB ، CD و EF از شش نقطه A ، B ، C ، D ، E و F به یک فاصله است.

(پ) از امتداد سه پاره‌خط AB ، CD و EF مثلثی به دست می‌آید که عمودمنصف‌های آن مثلث همان عمودمنصف‌های سه پاره‌خط داده شده است.

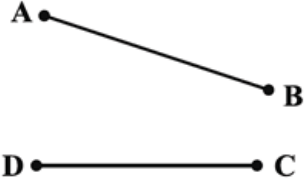


- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) هیچ

۷۹ محل برخورد قطرهای یک مربع، مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ است. اگر طول قطر مربع ۸ واحد باشد، دایره و مربع در چند نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟

- (۱) ۸
 (۲) ۴
 (۳) ۲
 (۴) صفر

۸۰ دو پاره‌خط AB و CD را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. نقطه‌ای را که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد، O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمودمنصف BC باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟



- (۱) AC و BD بر یکدیگر عمودند.
 (۲) نقطه O از دو پاره‌خط AB و CD به یک فاصله است.
 (۳) نقاط A, B, C و D روی یک دایره واقع‌اند.
 (۴) نقطه O از دو پاره‌خط AD و BC به یک فاصله است.

۸۱ اگر فاصله دو خط موازی d و d' برابر با ۶ باشد، در این صورت کدام گزینه نشانگر همه نقاطی است که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر با ۲ باشد؟

- (۱) یک خط موازی با d و d' و بین این دو
 (۲) دو خط موازی با d و d' و بین این دو
 (۳) دو خط موازی با d و d' و خارج این دو
 (۴) چهار خط موازی با d و d'

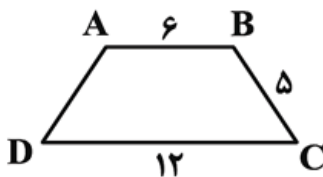
۸۲ پاره‌خط AB به طول L مفروض است. اگر باتوجه به مقدار L ، فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۶ باشد، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای L کدام است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۰
 (۴) ۹

۸۳ مربعی به ضلع ۴ مفروض است. اگر A ناحیه‌ای درون مربع باشد که هر نقطه درون آن ناحیه، فاصله‌اش از تمام رأس‌های مربع بیشتر از یک باشد، بیشترین مساحت ناحیه A کدام است؟

- (۱) $16 - \pi$
 (۲) $16 - 2\pi$
 (۳) π
 (۴) $\frac{\pi}{4}$

۸۴ در دوزنقه متساوی‌الساقین زیر، نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. فاصله O از ضلع BC کدام است؟



- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) $3/5$
 (۴) $2/5$

۸۵ اگر در یک مثلث، مجموع دو زاویه برابر با زاویه سوم باشد، آنگاه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟

- (۱) درون مثلث
 (۲) روی رأس بزرگ‌ترین زاویه
 (۳) بیرون مثلث
 (۴) روی بزرگ‌ترین ضلع

۸۶ اگر طول پاره‌خط MN برابر با ۷ واحد باشد، آنگاه چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از M به فاصله ۵ واحد و از N به فاصله ۴ واحد باشد؟

- (۱) هیچ
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) بی‌شمار

۸۷ چند نقطه روی یک دایره وجود دارد که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله باشد؟

- (۱) حداکثر ۲
(۲) حداقل ۲
(۳) حداکثر ۴
(۴) حداقل ۴

۸۸ داخل مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر هر سه ضلع آن مماس باشد. اگر O مرکز این دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) قطر دایره برابر با ضلع کوچک‌تر مثلث است.
(۲) نقطه O محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.
(۳) قطر دایره برابر با ضلع بزرگ‌تر مثلث است.
(۴) نقطه O محل برخورد سه عمودمنصف اضلاع مثلث است.

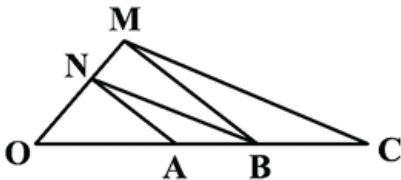
۸۹ همواره چند نقطه در صفحه می‌تواند وجود داشته باشد به طوری که فاصله آن‌ها از نقاط متمایز A, B, C و D در همان صفحه به یک اندازه باشد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) بی‌نهایت
(۴) صفر یا یک

۹۰ به مرکز O کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه xOy را در نقاط A و B قطع کند. حال به مراکز A و B کمان‌هایی به طول شعاع $\frac{3}{4}AB$ رسم می‌کنیم تا این دو کمان همدیگر را در نقطه C درون زاویه قطع کنند. در این صورت کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

- (۱) OC از وسط AB می‌گذرد.
(۲) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
(۳) OC نیمساز زاویه xOy است.
(۴) OC عمود بر پاره‌خط AB است.

۹۱ در شکل زیر، $NA \parallel MB$ و $NB \parallel MC$ است. اگر $OA = 2x - 8$ و $OB = x$ و $OC = x + 3$ باشد، اندازه پاره‌خط AB چقدر است؟

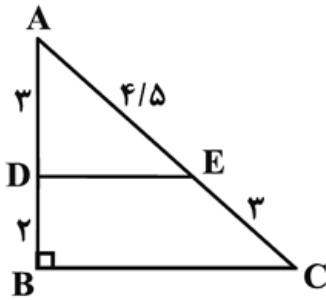


- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۹۲ می‌خواهیم با برهان خلف ثابت کنیم که اگر n عضو اعداد طبیعی باشد و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است. در این صورت کدام گزینه برای اثبات این مطلب با برهان خلف صحیح است؟

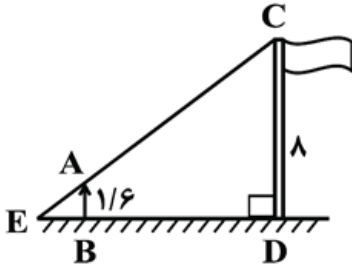
- (۱) فرض می‌کنیم که n عددی فرد است و سپس نشان می‌دهیم n^2 نیز فرد است.
(۲) فرض می‌کنیم که n عددی زوج است و سپس نشان می‌دهیم که n^2 فرد خواهد بود.
(۳) فرض می‌کنیم که n عددی زوج است و سپس نشان می‌دهیم که n^2 زوج خواهد بود.
(۴) فرض می‌کنیم که n عددی فرد است و سپس نشان می‌دهیم n^2 زوج خواهد بود.

۹۳ در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. طول پاره‌خط DE کدام است؟



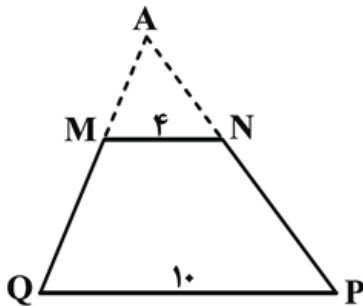
- (۱) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$
- (۲) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- (۳) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$
- (۴) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

۹۴ در شکل زیر پاره‌خط AB شخصی است که در فاصله ۴ متری از پای پرچمی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. اگر اندازه قد شخص $\frac{1}{6}$ متر باشد، طول کابل EC چند متر است؟



- (۱) $\sqrt{91}$
- (۲) $\sqrt{89}$
- (۳) ۱۱
- (۴) ۹

۹۵ در شکل زیر محیط دوزنقه $MNPQ$ برابر با ۲۳ است. امتداد ساق‌های این دوزنقه در A متقاطع‌اند. محیط مثلث AMN کدام است؟

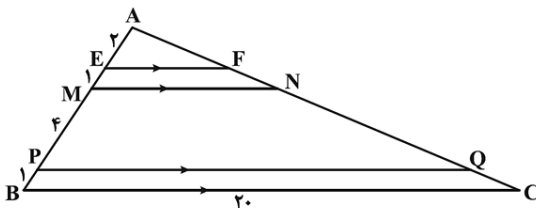


- (۱) ۱۴
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۸

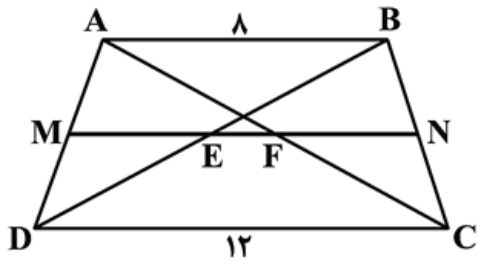
۹۶ در مربع $ABCD$ ضلع CD را از طرف C به اندازه ضلع مربع تا نقطه E امتداد می‌دهیم، به طوری که AE ضلع BC را در F قطع کند. مساحت چهار ضلعی $AFCD$ چند برابر مساحت مربع است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{4}{7}$

۹۷ در شکل زیر، حاصل $EF + MN + PQ$ کدام است؟



- (۱) ۲۸
- (۲) ۳۰
- (۳) ۳۲
- (۴) $\frac{61}{2}$



۹۸ در شکل زیر، ذوزنقه و M و N وسط دو ساق است. طول EF کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) ۱
- (۴) $\frac{3}{4}$

گزینه ۱

۱

مختصات نقطه‌ای به طول ۳- روی محور طول‌ها $(-۳, ۰)$ است.

$$۲x + ۳y = -۱ \Rightarrow ۳y = -۲x - ۱ \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۳} \Rightarrow m = -\frac{۲}{۳}$$

شیب خط موردنظر (خط عمود) برابر است با:

$$m' = \frac{-1}{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{معادله خط موردنظر: } y - ۰ = \frac{۳}{۲}(x - (-۳))$$

$$\Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲y = ۳x + ۹$$

گزینه ۱

۲

دو نقطه A و B هم‌طول هستند، پس:

$$AB = |y_A - y_B| = |۵ - (-۱)| = ۶$$

$$AC = \sqrt{(۷-۳)^2 + (۲-۵)^2} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

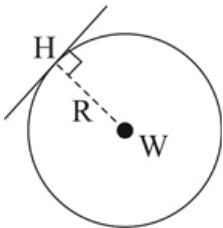
$$BC = \sqrt{(۷-۳)^2 + (۲-(-۱))^2} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

چون $BC = AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

گزینه ۲

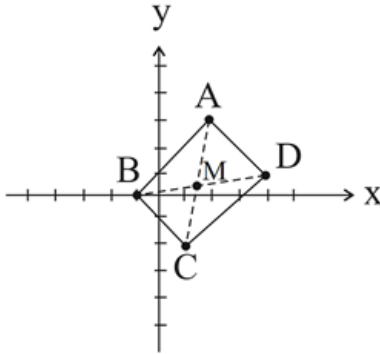
۳

می‌دانیم شعاع دایره، در نقطه تماس بر خط مماس بر دایره عمود است. لذا برای به دست آوردن اندازه شعاع دایره کافی است فاصله مرکز دایره به مختصات $(۲, -۱)$ تا خط مفروض را محاسبه کنیم:



$$R = WH = \frac{|۶ \times (۲) - ۸ \times (-۱)|}{\sqrt{۶^2 + ۸^2}} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲$$

می‌دانیم در یک مستطیل، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. لذا داریم:



$$M = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

از طرفی همان‌طور که اشاره شد، نقطه M وسط قطر BD نیز قرار دارد؛ بنابراین:

$$\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{-1 + x_D}{2}, \frac{0 + y_D}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} -1 + x_D = 2 \\ 0 + y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D = (3, 1)$$

هر دو خط از نقطه (۱, ۲) می‌گذرند.

$$\begin{cases} -b + (a-b)(2) - \lambda = 0 \Rightarrow 2a - 3b - \lambda = 0 \\ 3a(1) + b(2) - c = 0 \Rightarrow 3a + 2b - c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

از طرفی بنا بر فرض سؤال، دو خط بر هم عمودند. شیب آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$-bx + (a-b)y - \lambda = 0 \Rightarrow (a-b)y = bx + \lambda$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{(a-b)}x + \frac{\lambda}{(a-b)} \Rightarrow m_1 = \frac{b}{a-b}$$

$$3ax + by - c = 0 \Rightarrow by = -3ax + c \Rightarrow y = -\frac{3a}{b}x + \frac{c}{b} \Rightarrow m_2 = -\frac{3a}{b}$$

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{b}{a-b} \times \left(-\frac{3a}{b}\right) = -1$$

$$\xrightarrow{b \neq 0} \frac{-3a}{a-b} = -1 \Rightarrow 3a = a - b \Rightarrow 2a = -b$$

در رابطه‌های دستگاه (*) به جای $2a$ مقدار $-b$ قرار می‌دهیم:

$$2a - 3b - \lambda = 0$$

$$\xrightarrow{2a = -b} -b - 3b - \lambda = -4b - \lambda = 0 \Rightarrow b = -2, a = 1$$

$$3a + 2b - c = 0 \Rightarrow 3 \times (1) + 2 \times (-2) - c = 0 \Rightarrow 3 - 4 - c = 0 \Rightarrow c = -1$$

گزینه ۱

۶

مرکز دایره، وسط پاره خط AB قرار دارد. مختصات آن $O_1 = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2} \right) = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{5+7}{2} \right)$ است. معادله خطی را می‌خواهیم که از مبدأ مختصات و نقطه $O_1 \left(-\frac{3}{2}, 6 \right)$ می‌گذرد.

$$O(0,0), O_1\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$$

$$m = \frac{6-0}{-\frac{3}{2}-0} = \frac{6}{-\frac{3}{2}} = -4 \Rightarrow \text{معادله خط: } y = -4x$$

گزینه ۲

۷

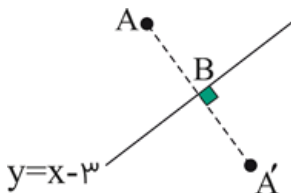
برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی کافی است یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.

نقطه $M(8, 4)$ در معادله خط $5x - 12y + 8 = 0$ صدق می‌کند، فاصله M از خط دیگر برابر است با:

$$d = \frac{|-10 \times (8) + 24 \times (4) + 8|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{128}{26} = 1$$

گزینه ۲

۸



معادله خطی که از نقطه A می‌گذرد و بر خط $y = x - 3$ عمود است را می‌نویسیم:

$$y - 2 = -1(x - 3) \Rightarrow y - 2 = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 5$$

برای به دست آوردن مختصات نقطه B ، محل برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow x - 3 = -x + 5 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow B(4, 1)$$

نقطه B وسط A و A' قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} 4 = \frac{3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 5 \\ 1 = \frac{2 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(5, 0)$$

گزینه ۱

۹

نقطه $A(3, -1)$ در معادله $y = x + 2$ صدق نمی‌کند، پس رأس A روی این خط قرار ندارد. اندازه ضلع مربع برابر با فاصله A تا خط $x - y + 2 = 0$ است.

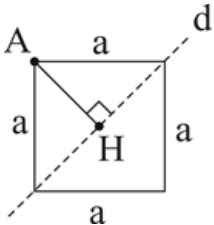
$$d = \frac{|3 - (-1) + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$S = \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{36}{2} = 18$$

گزینه ۲

۱۰

چون نقطه $A(1, -2)$ در معادله خط صدق نمی‌کند، بر آن واقع نیست و وضعیت خط و نقطه به صورت زیر است:



$$\text{قطر مربع} = a\sqrt{2}$$

$$d : 3x - 4y = 1 \Rightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$

$$\text{نصف قطر} = AH = \frac{|3(1) - 4(-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\text{محیط مربع} : P = 4a = 4\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

گزینه ۱

۱۱

باتوجه به شکل $-4 = m_{AB} = \frac{3}{2} m_{BC} = \frac{-2}{3} m_{CD} = \frac{5}{4} m_{DA}$ پس مجموع شیب‌ها برابر است با:

$$\text{مجموع} = -4 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{-48+18-8+15}{12} = \frac{-23}{12}$$

گزینه ۱

۱۲

ابتدا معادله خط گذرا از این دو نقطه را پیدا می‌کنیم. برای این کار، اول باید شیب خط را پیدا کنیم:

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 2}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$m = -2, A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2x + 2$$

$$\Rightarrow y = -2x + 2 + 2 \Rightarrow y = -2x + 4$$

عرض از مبدأ برابر ۴ است.

گزینه ۲

۱۳

$$\begin{cases} \Delta y = -3 \\ \Delta x = -4 \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط} : m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}, C \left| \begin{array}{l} 6 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{4}(x - 6)$$

$$\Rightarrow 4y = 3x - 18 \Rightarrow 4y - 3x = -18$$

گزینه ۴

۱۴

چهار ضلعی متوازی الاضلاع است، پس اضلاع روبه‌رو دوه‌دو مساوی و موازی هستند؛ بنابراین شیب خط DC برابر شیب خط AB و اندازه ضلع BC برابر اندازه ضلع AD است.

$$AB = DC \Rightarrow \text{شیب خط } DC = 2 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \text{خط } AB : y - 2x = 0$$

$$BC = AD = 5 \Rightarrow D(5, 0) \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

خط $(5, 0) \in$

$$\rightarrow y - 0 = 2(x - 5) \Rightarrow y = 2x - 10 \Rightarrow y - 2x + 10 = 0$$

تقسیم بر ۲

$$\rightarrow \frac{1}{2}y - x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳

۱۵

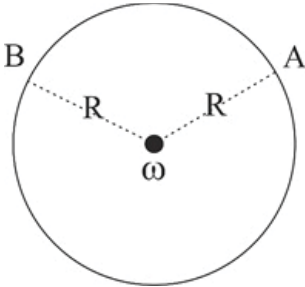
گزینه (۱): خطوط $x = a$ و $y = b$ بر هم عمودند، پس خطوط $y = -2$ و $x = 1$ بر هم عمودند.

گزینه (۲): شیب خط $y = -x$ برابر -۱ و شیب خط $y = x$ برابر ۱ است. چون حاصل ضرب شیب‌ها برابر -۱ است، بنابراین دو خط بر هم عمودند.

گزینه (۳): شیب خط $y = -3x + 2$ برابر -۳ و شیب خط $3x - y + 2 = 0$ برابر ۳ است. چون حاصل ضرب شیب‌ها برابر -۱ نیست، پس دو خط بر هم عمود نیستند.

گزینه (۴): شیب خط $y - 5x + 3 = 0$ برابر ۵ و شیب خط $y + 7 = -\frac{1}{5}x$ برابر $-\frac{1}{5}$ است. چون حاصل ضرب شیب‌ها برابر -۱ است، پس دو خط بر هم عمودند.

می‌دانیم که فاصله مرکز هر دایره، از همه نقاط واقع بر آن دایره، برابر با شعاع آن دایره است.



با در نظر گرفتن $\omega(a, 2a)$ به عنوان مرکز دایره و $A(2, 1)$ و $B(-1, 4)$ به عنوان دو نقطه واقع بر آن، مطابق شکل داریم $R = A\omega = B\omega$ پس:

$$\begin{aligned} A\omega = B\omega &\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2} \\ &\Rightarrow (a-2)^2 + (2a-1)^2 = (a+1)^2 + (2a-4)^2 \\ &\Rightarrow (a^2 - 4a + 4) + (4a^2 - 4a + 1) = (a^2 + 2a + 1) + (4a^2 - 16a + 16) \\ &\Rightarrow -8a + 5 = -14a + 17 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ &\omega(a, 2a) \xrightarrow{a=2} \omega(2, 4) \\ &\Rightarrow R = A\omega = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = 3 \end{aligned}$$

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله $x - y = 2$ قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را به صورت $\omega(\beta + 2, \beta)$ در نظر بگیریم. فاصله مرکز دایره از هر نقطه دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ بر این دایره واقعاند، پس:

$$\begin{aligned} R = \omega A = \omega B \\ &\Rightarrow R = \sqrt{(\beta + 2 - 0)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{(\beta + 2 - 3)^2 + (\beta - 0)^2} \\ &\Rightarrow (\beta + 2)^2 + (\beta - 1)^2 = (\beta - 1)^2 + \beta^2 \Rightarrow (\beta + 2)^2 = \beta^2 \\ &\Rightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 = \beta^2 \Rightarrow 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1 \\ &\Rightarrow R = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

نقطه A روی محور xها است، پس عرض آن صفر است، پس $A(۴, ۰)$ از طرفی نقطه B روی محور yها است، پس طول آن صفر است، پس $B(۰, -۲)$ بنابراین وسط آنها برابر است با:

$$\Rightarrow \text{وسط } AB : M \left(\frac{۴+۰}{۲}, \frac{۰-۲}{۲} \right) \Rightarrow M(۲, -۱)$$

$$AB \text{ شیب خط } : m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-۲-۰}{۰-۴} = \frac{-۲}{-۴} = \frac{۱}{۲}$$

خط مورد نظر بر خط AB عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب خط AB است، یعنی $m' = -۲$

$$M(۲, -۱) \text{ و } m' = -۲ \Rightarrow y - y_M = m'(x - x_M)$$

$$\Rightarrow y - (-۱) = -۲(x - ۲) \Rightarrow y + ۱ = -۲x + ۴ \Rightarrow y + ۲x = ۳$$

فرض کنیم نقطه $A(\alpha, \alpha - ۱)$ واقع بر خط به معادله $y = x - ۱$ ، از خط به معادله $۲x - ۳y - ۵ = ۰$ به فاصله $\sqrt{۱۳}$ باشد، داریم:

$$\sqrt{۱۳} = \frac{|۲\alpha - ۳(\alpha - ۱) - ۵|}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} \Rightarrow | -\alpha - ۲ | = ۱۳$$

$$\Rightarrow -\alpha - ۲ = \pm ۱۳ \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - ۲ = -۱۳ \Rightarrow \alpha = ۱۱ \\ -\alpha - ۲ = ۱۳ \Rightarrow \alpha = -۱۵ \end{cases}$$

راه حل اول:

دو خط موازی اند، فاصله بین دو خط موازی $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ از فرمول $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به دست می آید.

ابتدا دو معادله را به شکل گسترده می نویسیم:

$$-\sqrt{۳}x + y - ۲ = ۰ \Rightarrow y - \sqrt{۳}x - ۲ = ۰$$

$$\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰ \xrightarrow{\div \sqrt{۳}} y - \sqrt{۳}x + \frac{۶}{\sqrt{۳}} = ۰ \Rightarrow y - \sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow d = \frac{|۲\sqrt{۳}+۲|}{\sqrt{۱+۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}+۲}{۲} = \sqrt{۳} + ۱$$

راه حل دوم:

برای پیدا کردن فاصله دو خط موازی داده شده، فاصله نقطه دلخواه $(۰, -۲\sqrt{۳})$ روی خط $y - \sqrt{۳}x + ۲\sqrt{۳} = ۰$ را از خط $y - \sqrt{۳}x - ۲ = ۰$ به دست می آوریم.

$$d = \frac{|-۲\sqrt{۳}-۰-۲|}{\sqrt{۱+۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}+۲}{۲} = \sqrt{۳} + ۱$$

گزینه ۴

۲۱

جدول تعیین علامت

$$P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-2} < 0 \rightarrow 2 < m < 3$$

m		۲		۳	
m-۳	-	-	-	•	+
m-۲	-	•	+	•	+
$\frac{m-3}{m-2}$	+	+	-	•	+

ت.ن

گزینه ۴

۲۲

$a < 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی روبه پایین است

رأس در ربع سوم است $\Rightarrow x_s < 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$

$c < 0 \Rightarrow$ عرض از مبدأ سهمی، منفی است

ضمناً سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند، پس تابع دارای صفر نیست، پس $a < 0$ و $bc > 0$ است.

گزینه ۱

۲۳

اگر ریشه‌های معادله اولیه را α و β فرض کنیم، می‌توان چنین نوشت:

$$\alpha = \beta + 3$$

از طرفی مجموع ریشه‌های معادله $4x^2 - \lambda x + c = 0$ برابر است با:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 2$$

$$\alpha + \beta = 2 \xrightarrow{\alpha = \beta + 3} \beta + 3 + \beta = 2$$

$$\Rightarrow 2\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{2}$$

$$4x^2 - \lambda x + c = 0$$

$$\xrightarrow{\beta = x = \frac{-1}{2}} 4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \lambda\left(\frac{-1}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^2 - 4x^2 + 7 &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 + 1 - 2x^2) - 4x^2 + 7 &= 0 \Rightarrow x^2 - 6x^2 + 8 = 0 \\ \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 6t + 8 &= 0 \Rightarrow (t-2)(t-4) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \\ \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

نکته: مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ در صورت وجود صفر است.

با فرض $x + \frac{1}{x} = t$ معادله درجه دوم زیر حاصل می‌شود:

$$t^2 + 3t - 1 = 0$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$\Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

اگر x عددی حقیقی و غیرصفر باشد، آنگاه همواره $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \xrightarrow{|t_1| < 2} \text{غ.ق.ق} \\ t_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} < -2 \Rightarrow \text{ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = t_2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 1 = t_2 x \Rightarrow x^2 - t_2 x + 1 = 0 \quad (*)$$

معادله (*) دارای دو ریشه منفی است، زیرا:

$$t_2 < -2 \Rightarrow t_2^2 > 4 \Rightarrow t_2^2 - 4 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} : S = \frac{-b}{a} = t_2 < 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} : P = \frac{c}{a} = 1 > 0$$

بنابراین معادله اولیه، دارای دو ریشه حقیقی است.

در معادله به صورت $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ نقطه (α, β) رأس سهمی است.

$$f(x) = 9a(x + \frac{b}{9a})^2 - c \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{9a} = -3 \Rightarrow b = 9 \\ -c = 2 \Rightarrow c = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 9a(x + 3)^2 + 2$$

$$(0, -2) \in \text{سهمی} \Rightarrow -2 = 9a(0 + 3)^2 + 2 \Rightarrow a = -\frac{4}{81}$$

$$9ab + c = 9(-\frac{4}{81})(9) + (-2) = -6$$

گزینه ۴

۲۷

ابتدا معادله $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ را حل می‌کنیم، با فرض $\sqrt{x} = t$ داریم:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادله جدید باید $\alpha = 2$ و $\beta = 8$ باشد. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$S = \alpha + \beta = 2 + 8 = 10$$

$$P = \alpha\beta = 2 \times 8 = 16$$

با داشتن مجموع (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) می‌توان معادله را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت:

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

گزینه ۳

۲۸

با بازنویسی معادله $x(5x + 3) = 2$ خواهیم داشت:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

در این معادله $a + c = b$ پس $\alpha = -1$ و $\beta = \frac{2}{5}$ خواهد بود؛ بنابراین ریشه‌های معادله جدید عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{\alpha^2} = 1, \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4}$$

ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا $x = 1$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$4 - k + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

گزینه ۱

۲۹

چون تابع دارای ماکزیمم است، پس $k + 3 < 0$ (ضریب x^2): لذا $k < -3$ از طرفی در تابع درجه دوم، عرض نقطه ماکزیمم $-\frac{a}{2a}$ است. چون عرض نقطه ماکزیمم صفر است، پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4k(k + 3) = 0$$

$$\Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow k = 1, k = -4 \xrightarrow{k < -3} k = -4$$

گزینه ۳

۳۰

حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های این معادله درجه دوم عبارت‌اند از:

$$S = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6$$

$$P = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

گزینه ۱

۳۱

ابتدا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5})^2 &= 1 \\ \Rightarrow x+1+2x-5-2\sqrt{(x+1)(2x-5)} &= 1 \\ \Rightarrow (3x-5)^2 &= \left(2\sqrt{(x+1)(2x-5)}\right)^2 \\ \Rightarrow 9x^2-30x+25 &= 4x^2-12x-20 \\ \Rightarrow x^2-18x+45 &= 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x-15) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow k=3 \\ x=15 \text{ غ.ق.ق} \end{cases} \\ \sqrt{x+k} = k \xrightarrow{k=3} \sqrt{x+3} = 3 &\Rightarrow x+3=9 \Rightarrow x=6 \end{aligned}$$

گزینه ۴

۳۲

$$\begin{aligned} \sqrt{169-x^2} &= x-17 \\ \begin{cases} 169-x^2 \geq 0 \Rightarrow 169 \geq x^2 \Rightarrow -13 \leq x \leq 13 & (1) \\ x-17 \geq 0 \Rightarrow x \geq 17 & (2) \end{cases} &\xrightarrow{(1) \cap (2)} \emptyset \end{aligned}$$

گزینه ۳

۳۳

$$\begin{aligned} x=2 \Rightarrow \frac{(2^2+1)^2}{(2+k)^2} &= \frac{3 \times 2 + 1}{(k+2)^2} + 2 \\ \Rightarrow \frac{25}{(2+k)^2} &= \frac{7+2(k+2)^2}{(k+2)^2} \\ (k+2)^2 = t \Rightarrow \frac{25}{t} &= \frac{7+2t}{t} \\ \xrightarrow{t \neq 0} 7+2t &= 25 \Rightarrow t=9 \\ \Rightarrow (k+2)^2 = 9 &\Rightarrow \begin{cases} k+2=3 \Rightarrow k=1 \\ k+2=-3 \Rightarrow k=-5 \end{cases} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۳۴

توجه کنید که $x \neq 2$ و $x \neq -2$ زیرا ریشه‌های مخرج هستند. با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج‌ها $((x-2)(x+2))$ داریم:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + x(x+2) &= 8 \\ \Rightarrow 2x^2 - 2x + 4 &= 8 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \Rightarrow x = -1, x = 2 \end{aligned}$$

$x = 2$ قابل قبول نیست، پس $x = -1$ و معادله فقط یک ریشه دارد.

گزینه ۴

۳۵

$x - 1$ را به اتحاد مزدوج به صورت $(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} - (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = 0$$

$$(1 - \sqrt{x}) \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} - (1 + \sqrt{x}) \right) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (\text{ق.ق}) \\ \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow 1 = (1 + \sqrt{x})^2 \Rightarrow 1 + \sqrt{x} = \pm 1 \end{cases}$$

$$1 + \sqrt{x} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{ق.ق}) \\ 1 + \sqrt{x} = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \quad (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای دو ریشه $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ است و مجموع ریشه‌ها $x_1 + x_2 = 1$ خواهد بود.

گزینه ۳

۳۶

از آنجایی که جواب‌های هر معادله در آن معادله صدق می‌کنند، $x = -2$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{3}{2(-2) - 1} + \frac{5}{k} = \frac{9(-2)}{2(-2) + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{-5} + \frac{5}{k} = \frac{-18}{-3} = 6 \Rightarrow -\frac{3}{5} + \frac{5}{k} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{5}{k} = 6 + \frac{3}{5} = \frac{33}{5} \Rightarrow 33k = 25 \Rightarrow k = \frac{25}{33}$$

گزینه ۳

۳۷

$$\sqrt{2x - 1} = t \Rightarrow \frac{t^2 + 1}{2} = x$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{t^2 + 1}{2} + t = 3 \Rightarrow t^2 + 2t - 5 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

فقط $t = -1 + \sqrt{6}$ قابل قبول است و به ازای آن یک مقدار مثبت برای x به دست می‌آید.

گزینه ۳

۳۸

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4(2x-3)} = x+1 \Rightarrow 3\sqrt{2x-3} = x+1$$

$$\Rightarrow 9(2x-3) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=14 \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول اند چون در معادله صدق می کنند.

گزینه ۲

۳۹

$$\sqrt{2 + \frac{1}{x}} = a \Rightarrow \sqrt{\frac{2x+1}{x}} = a \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2x+1}} = \frac{1}{a}, (a \neq 0)$$

$$9\left(\frac{1}{a}\right) + a = 6 \Rightarrow 9 + a^2 = 6a$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow (a-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow \sqrt{2 + \frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 9 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$x = \frac{1}{7}$ در معادله صدق می کند.

گزینه ۳

۴۰

شعاع دایره برابر است با فاصله مرکز دایره تا خط مماس یعنی فاصله نقطه $O(1,1)$ تا خط مماس $2x + y - 4 = 0$ در نتیجه:

$$R = OM = \frac{|2 \times 1 + 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

دو نقطه O و A هم طول هستند، پس:

$$OA = |y_A - y_O| = |2 - 1| = 1$$

طبق رابطه فیثاغورس اگر M نقطه تماس باشد، طول مماس رسم شده از A را به دست می آوریم:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

گزینه ۲

۴۱

برای به دست آوردن محل برخورد دو خط از حل دستگاه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ 2x + y = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + (3x + 5) = -10 \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x = -3$$

$$\xrightarrow{y=3x+5} y = 3 \times (-3) + 5 = -4$$

مبدأ مختصات (۰, ۰)

نقطه برخورد (-۳, -۴)

$$\Rightarrow d = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

گزینه ۴

۴۲

دو خط به معادله $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ (با فرض اینکه a و b و c مخالف صفر باشند) موازی و متمایزند؛ به شرط آنکه:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

دو خط مذکور، دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند؛ لذا این دو خط نسبت به هم موازی و متمایزند، پس کافی است شرط منطبق نبودن این دو خط را بررسی کنیم:

$$\frac{4}{4} \neq \frac{m^2 - 7}{2} \Rightarrow m^2 - 7 \neq 2 \Rightarrow m^2 \neq 9 \Rightarrow m \neq \pm 3$$

پس m هر عددی به جز ۳ و -۳ می‌تواند اختیار کند.

گزینه ۳

۴۳

شرط عمود بودن دو خط بر یکدیگر آن است که حاصل ضرب شیب‌های آن دو، برابر با -۱ شود.

$$I : (m + 2)y = x + 3 \Rightarrow m_I = \frac{1}{m + 2}$$

$$d : y = (2m + 1)x + 1 \Rightarrow m_d = 2m + 1$$

لذا داریم:

$$m_I \cdot m_d = -1 \Rightarrow \frac{1}{(m + 2)} \times (2m + 1) = -1$$

$$\Rightarrow 2m + 1 = -m - 2 \Rightarrow 3m = -3 \Rightarrow m = -1$$

$$\begin{cases} ay + x = b \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{a} \\ ax + by = 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{a}{b} \end{cases}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow -\frac{1}{a} \times -\frac{a}{b} = -1 \xrightarrow{a \neq 0} \frac{1}{b} = -1 \Rightarrow b = -1$$

روی خط $A(1, -2)$ $ay + x = b$

$$\xrightarrow{b=-1} -2a + 1 = -1$$

$$\Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow a + b = 0$$

این دو خط یا از دو ضلع مجاور می‌گذرند یا از دو ضلع روبه‌رو.

(۱) این دو خط موازی نیستند، زیرا شیب آن‌ها هرگز باهم برابر نمی‌شود، چون اگر $m_1 = m_2$ آنگاه:

$$m_1 = \frac{1}{m}, m_2 = -m^3 \xrightarrow{m_1 = m_2} \frac{1}{m} = -m^3 \Rightarrow m^4 = -1$$

معادله جواب ندارد.

(۲) بنابراین این دو خط باید بر هم عمود باشند؛ یعنی:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_1 = \frac{1}{m}, m_2 = -m^3 \Rightarrow \frac{1}{m} \times (-m^3) = -1 \quad (m \neq 0 \text{ به شرط } m \neq 0)$$

$$\Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

اگر $m = 0$ در این صورت نیز این دو خط بر هم عمود خواهند بود؛ بنابراین مسئله سه جواب دارد.

$$m = 0 \text{ یا } \pm 1$$

A ، B و C وقتی روی یک خط قرار دارند که $m_{AB} = m_{AC}$ پس:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-m}{3-m-1} = \frac{2-m}{2-m} = 1 \\ m_{AC} = \frac{m+1-2}{m^2-3} = \frac{m-1}{m^2-3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m-1}{m^2-3} = 1 \Rightarrow m^2 - 3 = m - 1 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = -1$$

چون سه نقطه A ، B و C متمایزند، پس $m = 2$ غیرقابل قبول است؛ زیرا اگر $m = 2$ باشد، $A = B$ می‌شود.

پس $m = -1$ بنابراین:

$$A(3, 2), B(0, -1), C(1, 0)$$

معادله خط گذرنده از این نقاط را می‌نویسیم:

$$AB \text{ شیب} = \frac{-1-2}{0-3} = 1$$

$$\text{معادله خط: } y = x + h \xrightarrow{(3,2)} 2 = 3 + h$$

$$\Rightarrow h = -1 \text{ (عرض از مبدأ)}$$

دو خط داده شده، موازی هستند؛ لذا فاصله بین آن‌ها، برابر با طول قطر دایره خواهد بود:

$$\left. \begin{aligned} L_1: x + 2y - 10 &= 0 \\ L_2: x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

برای به دست آوردن فاصله دو خط موازی L_1 و L_2 ، فاصله نقطه دلخواه $(0, 5)$ روی خط $x + 2y = 10$ را از خط $x + 2y - 1 = 0$ دست می‌آوریم:

$$\text{قطر} = \frac{|0 + 10 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع} = \frac{\text{قطر}}{2} = \frac{9}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \text{مساحت} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{9}{2\sqrt{5}} \right)^2$$

$$= \pi \times \frac{81}{20} = \frac{81\pi}{20}$$

چون $ABCD$ مربع است، پس AB و DC موازی‌اند؛ لذا شیب‌های دو خط باید یکسان باشد.

$$-x + y = 2 \Rightarrow m = 1 \quad m=m' \rightarrow \frac{-2}{a} = 1 \Rightarrow a = -2$$

$$2x + ay = 4 \Rightarrow m' = -\frac{2}{a}$$

نکته: می‌توان ثابت کرد که فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از فرمول $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به دست می‌آید.

حال از فرمول فاصله دو خط موازی استفاده کرده و طول ضلع مربع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

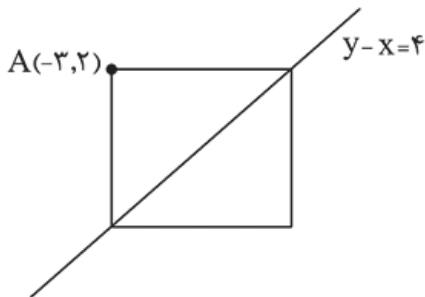
$$\Rightarrow AD = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4-(-4)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{8}} = \sqrt{8}$$

چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس H وسط AB بوده و لذا:

$$AH = HB = \frac{\text{ضلع}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = 2 \times S_{\triangle ADH} = 2 \times \frac{AD \times AH}{2} = \sqrt{8} \times \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

فاصله نقطه A از قطر مربع برابر با نصف طول قطر مربع است؛ بنابراین:



$$\text{فاصله مورد نظر} = \frac{|2 - (-3) - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نصف طول قطر مربع} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{طول قطر مربع} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$S = \left(\frac{\text{طول قطر مربع}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

گزینه ۲

۵۰

جواب معادله در معادله صدق می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{6}{k} = \frac{3x}{x-2}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{1}{3} + \frac{6}{k} = -3 \xrightarrow{\times 3k} k + 18 = -9k$$

$$\Rightarrow -10k = 18 \Rightarrow k = -1/8$$

گزینه ۳

۵۱

دو طرف تساوی را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود؛ بنابراین داریم:

$$(x-3)(x+4) \left[\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \right]$$

$$\xrightarrow{x \neq 3, -4} 2x(x+4) + (x+1)(x-3) = (x-1)(x+4)$$

$$\Rightarrow (2x+1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱

۵۲

معادله خطی که از نقطه (۳, ۲) گذشته و شیب آن -۲ باشد، به صورت زیر است:

$$y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 2 = -2x + 6$$

$$\Rightarrow 2x + y - 8 = 0$$

مختصات نقطه‌ای به طول $\sqrt{3}$ روی خط $\sqrt{3}x - 2y = 1$ برابر است با:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2y = 1 \Rightarrow -2y = -2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (\sqrt{3}, 1)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{3} + 1 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

گزینه ۲

۵۳

نقطه B به طول -۱ روی محور طول‌ها است، پس مختصات آن (-۱, ۰) است.

$$AB \text{ وسط } M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

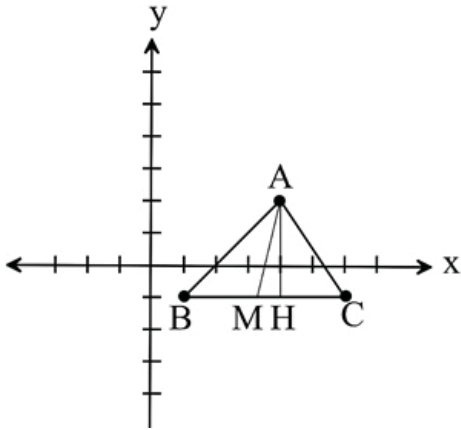
$$M = \left(\frac{3 - 1}{2}, \frac{1 + 0}{2} \right) = (1, 1/2)$$

فاصله M از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OM = \sqrt{1^2 + (1/2)^2} = \sqrt{1 + 1/4} = \sqrt{5/4} = \sqrt{17}/2$$

نقطه H پای ارتفاع است، پس بنا بر فرضیات سؤال و شکل زیر طول آن همان x_A و عرضش همان $y_B = y_C$ است:

$H(۴, -۱)$



نقطه M نیز وسط BC است؛ بنابراین:

$$M\left(\frac{۶+۱}{۲}, \frac{-۱-۱}{۲}\right) = \left(\frac{۷}{۲}, -۱\right)$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{\left(۴ - \frac{۷}{۲}\right)^2 + (-۱ + ۱)^2} = \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$

در متوازی‌الاضلاع دلخواه $ABCD$ ، اگر A, B, C و D رأس‌های متوالی باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow ۱ + ۰ = ۵ + x_D \Rightarrow x_D = -۴$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow ۴ + ۶ = -۲ + y_D \Rightarrow y_D = ۱۲$$

$$\Rightarrow (-۴, ۱۲) : \text{مختصات رأس چهارم متوازی‌الاضلاع}$$

عمودمنصف AB ، از وسط AB می‌گذرد و بر AB عمود است؛ بنابراین:

$$M \Rightarrow M \left(\frac{-۴+۲}{۲}, \frac{۱-۳}{۲} \right) = (-۱, -۱)$$

خط از نقطه M می‌گذرد، پس $-a - b = ۶$ ؛ بنابراین:

$$a + b = -۶$$

$$m_{AB} = \frac{-۳ - ۱}{۲ + ۴} = \frac{-۴}{۶} = \frac{-۲}{۳} \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = \frac{۳}{۲}$$

$$ax + by = ۶$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{a}{b} \Rightarrow -\frac{a}{b} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲a + ۳b = ۰$$

$$\begin{cases} a + b = -۶ \\ ۲a + ۳b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - ۲b = ۱۲ \\ ۲a + ۳b = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = ۱۲ \Rightarrow ۲a + ۳۶ = ۰ \Rightarrow ۲a = -۳۶ \Rightarrow a = -۱۸$$

$$\Rightarrow a + ۳b = -۱۸ + ۳ \times (۱۲) = ۱۸$$

$$AB = ۵ \Rightarrow \sqrt{(۲m + ۱ - m)^2 + (-m - ۲)^2} = ۵$$

$$\Rightarrow (m + ۱)^2 + (m + ۲)^2 = ۲۵$$

$$\Rightarrow m^2 + ۲m + ۱ + m^2 + ۴m + ۴ = ۲۵ \Rightarrow ۲m^2 + ۶m - ۲۰ = ۰$$

$$\Rightarrow m^2 + ۳m - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (m + ۵)(m - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow m = -۵ \text{ یا } m = ۲$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(۵ - ۱)^2 + (-۱ - ۲)^2} = \sqrt{۴^2 + ۳^2} = ۵ \\ AC &= \sqrt{(۴ - ۱)^2 + (۶ - ۲)^2} = \sqrt{۳^2 + ۴^2} = ۵ \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = AC$$

از طرفی رابطه فیثاغورس بین اضلاع این مثلث صادق است:

$$BC = \sqrt{(۴ - ۵)^2 + (۶ - (-۱))^2} = \sqrt{۱^2 + ۷^2} = ۵\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

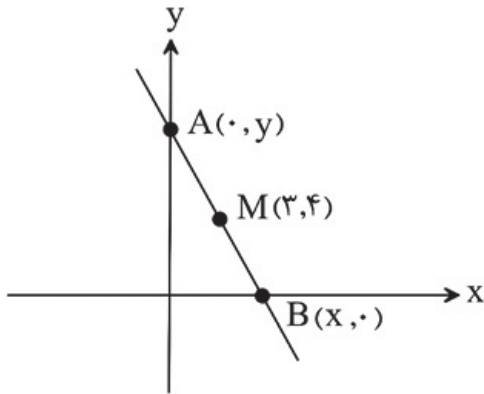
لذا مثلث مذکور علاوه بر متساوی‌الساقین بودن، در رأس A قائمه نیز می‌باشد.

نقطه $A(0, y)$ روی محور y ها و نقطه $B(x, 0)$ روی محور x ها است و M نقطه وسط AB است؛ بنابراین داریم:

$$M = (3, 4) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{y+0}{2} \right) \Rightarrow x = 6, y = 8$$

حال کافی است شیب خط گذرا از نقاط A و B را به دست آوریم:

$$m_{AB} = \frac{0-8}{6-0} = -\frac{4}{3}$$



بنابراین معادله خط مذکور برابر است با:

$$y = -\frac{4}{3}x + 8 \Rightarrow 3y + 4x - 24 = 0$$

فاصله نقطه A تا خط $8x + 6y - k = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|\lambda \times (-1) + 6 \times (4) - k|}{\sqrt{\lambda^2 + 6^2}}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{|16 - k|}{10} \Rightarrow |16 - k| = 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 - k = 30 \Rightarrow k = -14 & (\text{ع.ق.ق}) \\ 16 - k = -30 \Rightarrow k = 46 & (\text{ق.ق}) \end{cases}$$

باتوجه به شرط ($k > 0$) مقدار $k = 46$ قابل قبول است.

ابتدا مختصات وسط AB را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \left(\frac{x-1+x}{2}, \frac{0+2x}{2} \right) = (x-1, x)$$

حال از آنجایی که فاصله این نقطه تا مبدأ مختصات یعنی نقطه $O(0, 0)$ $\sqrt{5}$ است؛ لذا داریم:

$$\sqrt{(x-1)^2 + x^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-1)^2 + x^2 = 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -1$$

گزینه ۳

۶۲

ابتدا شیب خط AB را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b - a}{a - b} = -1$$

حال اگر شیب خط عمود بر AB را m' در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:

$$m \times m' = -1 \Rightarrow m' = 1$$

تنها خطی که در بین گزینه‌ها دارای شیب ۱ است، خط $y = x$ یا همان $y - x = 0$ است.

گزینه ۳

۶۳

اگر نقطه‌ای بخواید فاصله یکسانی از دو محور مختصات داشته باشد، باید روی یکی از دو خط $y = x$ یا $y = -x$ قرار داشته باشد، پس:

$$y = x \Rightarrow 3m - 9 = -2m + 1$$

$$\Rightarrow 5m = 10 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow A(-3, -3)$$

$$OA = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

$$y = -x \Rightarrow 3m - 9 = 2m - 1 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow A(-15, 15)$$

$$OA = \sqrt{225 + 225} = \sqrt{2 \times 225} = 15\sqrt{2}$$

گزینه ۲

۶۴

$$BC = \sqrt{(2 - 4)^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$BC \text{ شیب خط } m_{BC} = \frac{4 + 1}{2 - 4} = -\frac{5}{2}$$

$$BC \text{ معادله خط } y - 4 = -\frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow y - 4 = -\frac{5}{2}x + 5$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x + y - 9 = 0 \Rightarrow 5x + 2y - 18 = 0$$

ارتفاع AH برابر است با فاصله نقطه $A(-1, 2)$ از خط $5x + 2y - 18 = 0$.

$$AH = \frac{|-5 + 4 - 18|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{|-19|}{\sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{19}{\sqrt{29}} \times \sqrt{29} = \frac{19}{2}$$

$$2x^2 + (c+2)x + \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(c+2)}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\lambda}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\text{ریشهٔ معادلهٔ جدید} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \sqrt{\alpha\beta} \\ t_2 = 2\sqrt{\alpha\beta} \end{cases}$$

$$S_{\text{جدید}} = t_1 + t_2 = \sqrt{\alpha\beta} + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$= 3\sqrt{\alpha\beta} = 3\sqrt{P} = 3\sqrt{4} = 6$$

$$P_{\text{جدید}} = t_1 t_2 = \sqrt{\alpha\beta} (2\sqrt{\alpha\beta}) = 2\alpha\beta = 2P = 2 \times (4) = 8$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x^2 + bx + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c = 8$$

$$2x^2 + (c+2)x + \lambda = 0 \xrightarrow{c=8} 2x^2 + 10x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-10}{2} = -5$$

در معادله $-3x^2 - 4x + 6 = 0$ داریم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$S' = 3\alpha - 1 + 3\beta - 1 = 3(\alpha + \beta) - 2 = 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 2 = -6$$

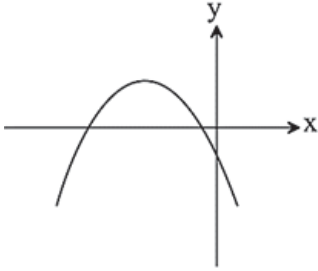
$$\begin{aligned} P' &= (3\alpha - 1)(3\beta - 1) = 9\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 1 \\ &= 9 \times (-2) - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = -13 \end{aligned}$$

معادلهٔ جدید برابر است با:

$$x^2 - S'x + P' = 0$$

$$x^2 - (-6)x - 13 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 13 = 0$$

شکل تقریبی سهمی به صورت زیر است:



باید معادله $f(x) = 0$ دو ریشه منفی داشته باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(-m)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 + 4m^2 - 4m > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2 - m + 1}_{\Delta < 0} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$\left. \begin{array}{l} P > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{-m} > 0 \Rightarrow 0 < m < 1 \\ S < 0 \Rightarrow \frac{1}{m} < 0 \Rightarrow m < 0 \end{array} \right\} \text{اشتراک} \rightarrow \emptyset$$

$$\text{محیط پنجره} = 6 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

مساحت مثلث + مساحت مستطیل = مساحت کل

$$= xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = xy + o/\Delta x^2$$

$$\text{مساحت کل} = x\left(-\frac{3}{2}x + 3\right) + o/\Delta x^2 = -x^2 + 3x$$

برای آنکه پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد، باید مساحت حداکثر باشد؛ بنابراین:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{3}{4}$$

گزینه ۱: با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$\begin{aligned} x^6 - 7x^2 + 12 &= 0 \\ \Rightarrow t^3 - 7t + 12 &= 0 \Rightarrow (t-4)(t-3) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ t=4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} &\Rightarrow \text{چهار جواب دارد} \end{aligned}$$

گزینه ۲: با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$\begin{aligned} t^2 + 8t + 7 &= 0 \Rightarrow (t+1)(t+7) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t = -7 \Rightarrow x^2 = -7 \\ t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \end{cases} &\Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{aligned}$$

گزینه ۳: با فرض $x^2 + x = t$ داریم:

$$\begin{aligned} t^2 - 14t + 24 &= 0 \Rightarrow (t-2)(t-12) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } -2 \\ t=12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } -4 \end{cases} &\Rightarrow \text{چهار جواب دارد} \end{aligned}$$

گزینه ۴: با فرض $x^3 = t$ داریم:

$$4x^6 + 1 = 5x^3 \Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x=1 \\ t=\frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

ابتدا مختصات رأس سهمی را به دست می آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{m}{2}$$

حال با جایگذاری مقدار x در معادله سهمی، عرض رأس سهمی را نیز به دست می آوریم:

$$y = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1 = \frac{-m^2 + 4(m+1)}{4}$$

اکنون باتوجه به اینکه رأس سهمی بر روی خط $y = x + 1$ قرار دارد، بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط مذکور صدق می کند. پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{-m^2 + 4(m+1)}{4} &= \frac{m}{2} + 1 \\ \Rightarrow 2m + 4 &= 4m + 4 - m^2 \Rightarrow m^2 - 2m = 0 \\ \Rightarrow m(m-2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

گزینه ۱

۷۱

چون $a = 1 > 0$ (دهانه سهمی روبه بالا) به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ (محور تقارن سهمی) کمترین مقدار تابع یعنی همان عرض رأس سهمی به دست می‌آید.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-k)}{2 \times (1)} = -2 \Rightarrow k = -4$$

$$\Rightarrow y = x^2 - (-4)x + 1 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 1$$

معادله تابع را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 4 + 1$$

$$\Rightarrow y = (x + 2)^2 - 3 \xrightarrow{x=-2} y = -3 \text{ کمترین مقدار}$$

گزینه ۲

۷۲

طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها $[(a-x)(x)]$ ضرب می‌کنیم.

$$x(a-x) \left[\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} - \frac{a}{x} \right] = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (a-x)^2 - a(a-x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - a^2 + 2ax - x^2 - a^2 + ax = 0$$

$$\Rightarrow 3ax - 2a^2 = 0 \Rightarrow 3ax = 2a^2 \xrightarrow{a \neq 0} x = \frac{2}{3}a$$

گزینه ۳

۷۳

محل تلاقی سهمی با محور x ها، همان صفرهای تابع درجه دوم اند؛ یعنی $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$. از طرفی معادله سهمی در این حالت به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ درمی‌آید.

نقطه $(0, 4)$ روی سهمی است.

$$\Rightarrow y = a(x - 1)(x - 2) \Rightarrow 4 = a(0 - 1)(0 - 2)$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2(x - 1)(x - 2) = 2x^2 - 6x + 4$$

$$\text{طول رأس سهمی : } x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \times (2)} = \frac{3}{2}$$

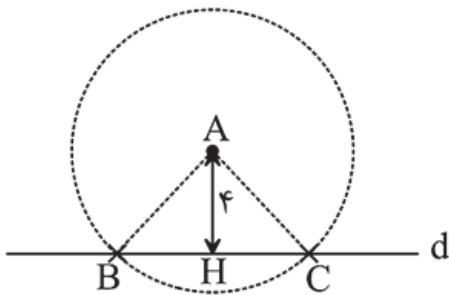
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} (BC)(4)$$

$$\Rightarrow 12 = 2BC \Rightarrow BC = 6cm$$

$$\Rightarrow BH = HC = 3cm$$

$$\triangle AHC \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4^2 + (3)^2 \Rightarrow AC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5cm$$



چون محل برخورد عمودمنصفها یکتا است، بنابراین نقطه O محل برخورد هر سه عمودمنصف است. همچنین اگر O روی عمودمنصف AB باشد، $OA = OB$ است و نیز O روی عمودمنصف BC است، پس $OB = OC$ است و همین طور O روی عمودمنصف AC است پس $OA = OC$ خواهد بود؛ بنابراین $OA = OB = OC = r$ است؛ یعنی اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OA = r$ بزنیم از سه رأس A, B, C عبور می‌کند که اصطلاحاً می‌گوییم این دایره محیط بر مثلث است.

در ضمن اگر مثلث یک زاویه بیشتر از 90° درجه داشته باشد، محل برخورد عمودمنصفها خارج از مثلث است و اگر یک زاویه 90° داشته باشد، محل برخورد عمودمنصفها روی وتر است و اگر هر سه زاویه مثلث حاده باشد، محل برخورد عمودمنصفها داخل مثلث است. بنابراین گزینه "۳" نیز غلط است و فقط گزینه "۴" صحیح است.

$$\text{زمان رفت} = t = \frac{x}{V} = \frac{60}{V}$$

$$\text{زمان برگشت} = t' = \frac{x}{V'} = \frac{60}{V-10}$$

$$\text{طبق فرض} : t = t' - 0.5 \Rightarrow \frac{60}{V} = \frac{60}{V-10} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \times 60(V-10) = 2 \times 60V - V(V-10)$$

$$\Rightarrow V^2 - 10V - 1200 = 0 \Rightarrow (V-40)(V+30) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = 40 \frac{km}{h} \Rightarrow V' = V - 10 = 40 - 10 = 30 \frac{km}{h} \\ V = -30 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

گزینه ۲

۷۷

نقطه C از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است، پس باید روی عمودمنصف پاره خط AB باشد. از طرفی چون $AC = BC$ پس مثلث ABC متساوی الساقین است. نیمساز زاویه رأس (C) و عمودمنصف بر هم منطبق اند. پس تنها گزینه "۳" می تواند نادرست باشد.

گزینه ۱

۷۸

چون نقطه ای وجود دارد که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله و از دو سر پاره خط EF به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف های AB و EF قرار دارد. همچنین از دو سر پاره خط CD به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف CD قرار دارد. پس مورد (الف) درست است؛ اما لزوماً مورد (ب) و (پ) درست نیست.

گزینه ۲

۷۹

می دانیم در مربع، قطر ها عمودمنصف یکدیگرند. حال با توجه به اینکه شعاع دایره دقیقاً برابر با نصف قطر مربع است ($\frac{r}{\frac{1}{2}} = 4$)، لذا دایره مذکور، مربع را در رأس هایش یعنی در ۴ نقطه قطع می کند.



گزینه ۳

۸۰

نقاطی که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله اند، روی عمودمنصف آن پاره خط واقع اند و بالعکس. لذا داریم:

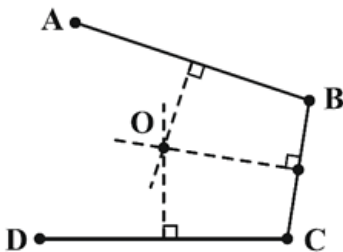
(۱) از نقاط A و B به یک فاصله است، در نتیجه داریم: $OA = OB$

(۲) از نقاط C و D به یک فاصله است، در نتیجه داریم: $OC = OD$

(۳) O روی عمودمنصف BC است، در نتیجه داریم: $OB = OC$

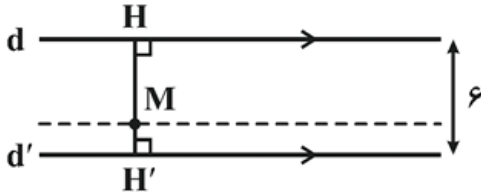
با توجه به روابط (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می گیریم که:

$$OA = OB = OC = OD$$



بنابراین نقاط A, B, C و D روی دایره ای به مرکز O واقع اند.

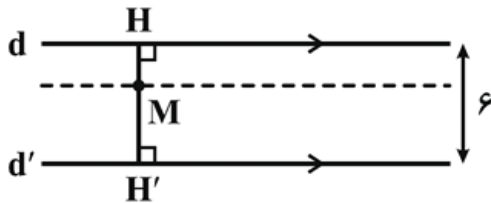
با فرض اینکه نقطه M بین دو خط و نزدیک به خط d' باشد، داریم:



$$\begin{cases} MH + MH' = 6 \\ MH - MH' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH = 4 \\ MH' = 2 \end{cases}$$

بنابراین نقاطی که روی خطی موازی با دو خط d و d' و به فاصله ۲ از خط d' باشند، ویژگی‌های مسئله را دارا هستند.

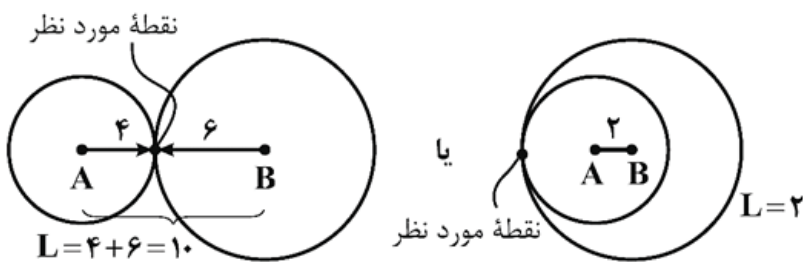
مشابه همین حالت برای زمانی رخ می‌دهد که نقطه M بین دو خط و این بار نزدیک خط d باشد.



$$\begin{cases} MH + MH' = 6 \\ MH' - MH = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MH = 2 \\ MH' = 4 \end{cases}$$

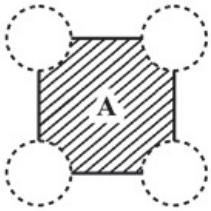
دقت کنید که اگر نقطه M خارج دو خط باشد، تفاضل فاصله آن از دو خط، دقیقاً برابر با فاصله بین دو خط بوده و همواره مقداری ثابت است.

در صورتی که L یکی از دو مقدار ۲ یا ۱۰ را داشته باشد، نقطه مورد نظر تنها یک نقطه در صفحه است که از A به فاصله ۴ و از B به فاصله ۶ است.



پس ۲ یا $L = 10$ بوده که جمع آن‌ها $12 = 10 + 2$ است.

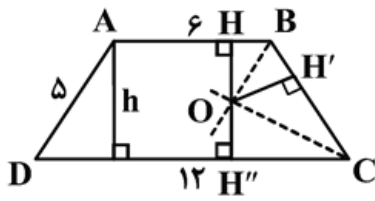
۴ دایره به مرکز رئوس مربع و به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. ناحیه A ، ناحیه هاشورخورده مطابق شکل است که برای محاسبه مساحت آن کافی است از مساحت مربع، ۴ تا مساحت ربع دایره (مساحت ۱ دایره کامل) را حذف کنیم:



مساحت ناحیه A = مساحت مربع - مساحت ربع دایره (4×4)

$$= 16 - 4 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} = 16 - \pi$$

طبق خاصیت نیمساز داریم:

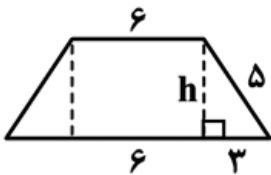


$$\begin{cases} \text{روی نیمساز زاویه } B \text{ است } O : OH = OH' \\ \text{روی نیمساز زاویه } C \text{ است } O : OH' = OH'' \end{cases} \Rightarrow OH = OH' = OH''$$

ارتفاع دوزنقه برابر است با:

$$h = OH + OH'' \xrightarrow{OH=OH''} h = 2OH \xrightarrow{OH=OH'} h = 2OH'$$

باتوجه به ابعاد داده شده، ارتفاع دوزنقه را می‌یابیم:



$$h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = 4$$

$$2OH' = 4 \Rightarrow OH' = 2$$

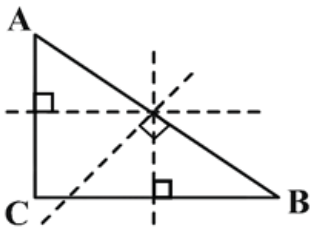
بنابراین:

پس فاصله O از ضلع BC که همان OH' است، برابر با ۲ می‌شود.

مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است. حال اگر رئوس مثلث را A ، B و C بنامیم، داریم:

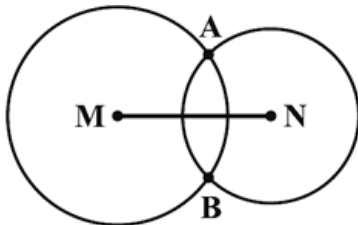
$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow 2\hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

بنابراین $\triangle ABC$ یک مثلث قائم‌الزاویه است، در نتیجه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث دقیقاً در وسط ضلع AB وتر مثلث (بزرگ‌ترین ضلع مثلث) قرار دارد.



می‌دانیم تمامی نقاطی که از یک نقطه مشخص به فاصله ثابت قرار دارند، روی محیط دایره‌ای به مرکز همان نقطه و به شعاعی به اندازه فاصله تعیین شده قرار می‌گیرند.

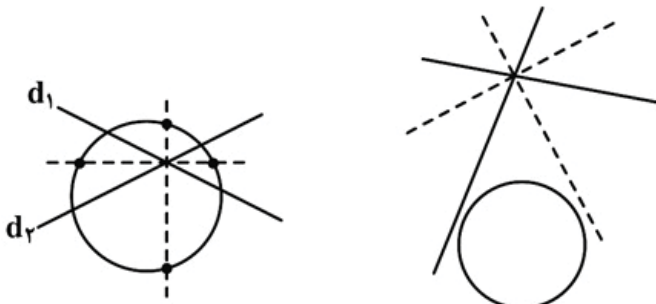
لذا کافی است دایره‌ای به مرکز M و به شعاع ۵ واحد و دایره دیگری به مرکز N و به شعاع ۴ واحد رسم کنیم. محل تلاقی این دو دایره (نقاط A و B) جواب‌های مسئله هستند.



گزینه ۳

۸۷

نقاطی که روی نیمساز یک زاویه قرار دارند، از دو ضلع آن به یک فاصله‌اند. لذا باتوجه به وضعیت دو خط متقاطع با دایره، نیمسازهای چهار زاویه تشکیل شده با دایره مفروض حداکثر در ۴ نقطه متقاطع هستند.



۴ نقطه تقاطع دارد.

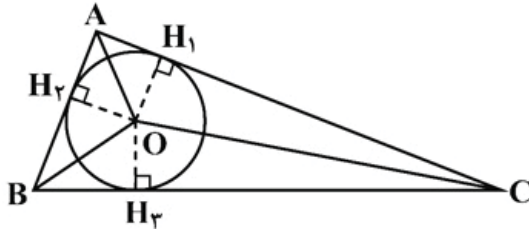
هیچ نقطه تقاطعی وجود ندارد.

پس گزینه "۳" درست است.

گزینه ۲

۸۸

مرکز دایره از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؛ بنابراین محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.



$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = r$$

گزینه ۴

۸۹

جواب مسئله، نقاط حاصل از برخورد عمودمنصف پاره‌های AB ، CD و BC (یا AD) است. این عمودمنصف‌ها ممکن است همدیگر را در یک نقطه قطع نکنند (همرس نباشند) یا در یک نقطه قطع کنند (همرس باشند)؛ بنابراین مسئله می‌تواند صفر یا یک جواب داشته باشد.

گزینه ۲

۹۰

OC عمودمنصف AB و نیمساز xOy است. ABC متساوی‌الساقین است ولی لزوماً متساوی‌الاضلاع نیست، بنابراین گزینه "۳" نادرست است.

$$\left. \begin{aligned} \triangle OMB \Rightarrow NA \parallel MB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ON}{OM} &= \frac{OA}{OB} \\ \triangle OMC \Rightarrow NB \parallel MC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ON}{OM} &= \frac{OB}{OC} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{2x-8}{x} = \frac{x}{x+3}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 6 & \text{ق.ق} \Rightarrow \begin{cases} OA = 2x - 8 = 2 \times 6 - 8 = 4 \\ OB = x = 6 \\ OC = x + 3 = 6 + 3 = 9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{باتوجه به شکل } AB = OB - OA = 6 - 4 = 2$$

طبق برهان خلف باید حکم را غلط فرض کنیم یعنی فرض کنیم که n عددی زوج است، یعنی $n = 2k$ و $k \in \mathbb{N}$ سپس نشان می‌دهیم که در این صورت n^2 نیز زوج است که با فرض مسئله که گفته است n^2 عددی فرد است، تناقض دارد و حکم ثابت می‌شود؛ بنابراین فرض زوج بودن عدد n صحیح نیست.

$$\frac{3}{2} = \frac{4/5}{3}$$

پس $DE \parallel BC$ است.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 5^2 + BC^2 = 7/5^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 5^2 = \frac{225}{4} - 25 = \frac{125}{4}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{DE}{\frac{5\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow DE = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{2} \times 3}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

گزینه ۲

۹۴

چون میله پرچم و شخص هر دو بر زمین عمود هستند، پس باهم موازی‌اند و طبق قضیه تالس داریم: $(EB = x)$

$$\frac{x}{x+4} = \frac{1/6}{8}$$

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = x+4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 = EB$$

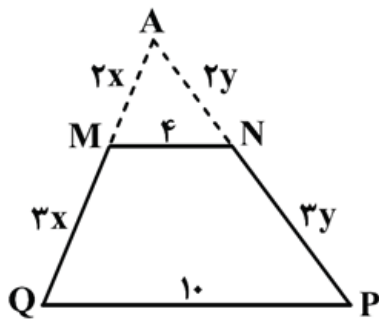
$$ED = EB + BD = 1 + 4 = 5$$

اکنون در مثلث EDC ، طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$EC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$$

گزینه ۳

۹۵



پاره خط MN موازی با QP است. چون نسبت $\frac{MN}{QP} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ است، پس نسبت $\frac{AM}{AQ} = \frac{AN}{AP}$ نیز باید $\frac{2}{5}$ باشد.

از طرفی محیط دوزنقه برابر با 23 است؛ بنابراین:

$$3x + 3y + 4 + 10 = 23 \Rightarrow 3(x+y) = 23 - 14$$

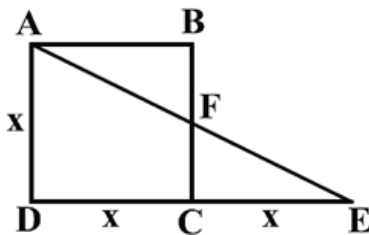
$$\Rightarrow 3(x+y) = 9 \Rightarrow x+y = 3$$

$$\Delta AMN \text{ محیط مثلث } = 4 + 2x + 2y = 4 + 2(x+y) = 4 + 2 \times 3 = 10$$

گزینه ۳

۹۶

در مثلث AED می‌دانیم $AD \parallel CF$ است. مساحت دوزنقه $AFCD$ را پیدا می‌کنیم:



$$\frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow \frac{CF}{x} = \frac{x}{2x} \Rightarrow CF = \frac{x}{2}$$

مساحت دوزنقه برابر است با:

$$\frac{(\frac{x}{2} + x) \times x}{2} = \frac{\frac{3x}{2} \times x}{2} = \frac{3x^2}{4}$$

نسبت مساحت دوزنقه به مساحت مربع برابر است با:

$$\frac{\frac{3x^2}{4}}{x^2} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۲

۹۷

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{EF}{20} \Rightarrow EF = 5$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{MN}{20} \Rightarrow MN = \frac{15}{2}$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{PQ}{20} \Rightarrow PQ = \frac{35}{2}$$

$$EF + MN + PQ = 5 + \frac{15}{2} + \frac{35}{2} = 30$$

گزینه ۱

۹۸

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = 1 \Rightarrow MN \parallel AB \parallel DC$$

$$ME \parallel AB \xrightarrow[\text{در } \triangle ADB]{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{2} \Rightarrow ME = \frac{1}{2}AB = 4$$

$$MF \parallel DC \xrightarrow[\text{در } \triangle DAC]{\text{طبق قضیه تالس}} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MF = \frac{1}{2}DC = 6$$

$$\Rightarrow EF = MF - ME = 6 - 4 = 2$$

تنظیم : مهندس صادق طاهری (مشاور برتر کنکور) ، تماس : ۰۹۱۷ ۴۴۵ ۷۱ ۴۴

۱	●○○○○	۱۱	●○○○○	۲۱	○○○○●	۳۱	●○○○○	۴۱	○●○○○	۵۱	○○●○○
۲	●○○○○	۱۲	●○○○○	۲۲	○○○○●	۳۲	○○○○●	۴۲	○○○○●	۵۲	●○○○○
۳	○●○○○	۱۳	○●○○○	۲۳	●○○○○	۳۳	○○●○○	۴۳	○○●○○	۵۳	○●○○○
۴	○●○○○	۱۴	○○○○●	۲۴	●○○○○	۳۴	○●○○○	۴۴	○○●○○	۵۴	○○○○●
۵	○●○○○	۱۵	○○○○●	۲۵	○○○○●	۳۵	○○○○●	۴۵	○○○○●	۵۵	●○○○○
۶	●○○○○	۱۶	●○○○○	۲۶	○○○○●	۳۶	○○○○●	۴۶	○○○○●	۵۶	●○○○○
۷	○●○○○	۱۷	○○○○●	۲۷	○○○○●	۳۷	○○○○●	۴۷	●○○○○	۵۷	○○○○●
۸	○●○○○	۱۸	○○○○●	۲۸	○○○○●	۳۸	○○○○●	۴۸	●○○○○	۵۸	○○○○●
۹	●○○○○	۱۹	○●○○○	۲۹	●○○○○	۳۹	○●○○○	۴۹	○●○○○	۵۹	○●○○○
۱۰	○●○○○	۲۰	○○○○●	۳۰	○○○○●	۴۰	○○○○●	۵۰	○●○○○	۶۰	○○○○●
۶۱	●○○○○	۷۱	●○○○○	۸۱	○●○○○	۹۱	○●○○○				
۶۲	○○○○●	۷۲	○○○○●	۸۲	○○○○●	۹۲	○○○○●				
۶۳	○○●○○	۷۳	○○●○○	۸۳	●○○○○	۹۳	○●○○○				
۶۴	○●○○○	۷۴	○○○○●	۸۴	●○○○○	۹۴	○●○○○				
۶۵	●○○○○	۷۵	○○○○●	۸۵	○○○○●	۹۵	○○○○●				
۶۶	○○○○●	۷۶	○○○○●	۸۶	○○○○●	۹۶	○○○○●				
۶۷	○○○○●	۷۷	○○○○●	۸۷	○○○○●	۹۷	○●○○○				
۶۸	○●○○○	۷۸	●○○○○	۸۸	○●○○○	۹۸	●○○○○				
۶۹	○●○○○	۷۹	○●○○○	۸۹	○○○○●						
۷۰	○○○○●	۸۰	○○○○●	۹۰	○●○○○						