۱. اگر $g(x)=\sqrt{۲x}$ و $f(x)=x^۲-x$ حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x)-f(۲)g(۲)}{\Delta x}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۲. مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر ۳ است. اگر $f'(۱)=-۴, f(۱)=۰$ و $g'(۱)$ موجود باشد مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۳. مقدار مشتق $y=\sin^۳\sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi^۲}{۹}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۹}{۱۶\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۳) $\frac{۲۷}{۱۶\pi}$ ۴) $\frac{۲۷}{۸\pi}$

۴. اگر $f(x)=\sin ۲x$ و $g(x)=\sqrt{x}$، مقدار مشتق تابع gof در $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۳}{۴}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۵. اگر $f(x)=|x-۲|+\sqrt{۲x}$ حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۶. مشتق چپ تابع $f(x)=x^۲[x]$ در $x=۳$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) وجود ندارد.

۷. مقدار مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=\sin\frac{x}{y}+۱$ در نقطه‌ی $(\pi,۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\pi-۱}$ ۲) $\frac{۱}{\pi+۱}$ ۳) $\frac{-۱}{\pi+۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱-\pi}$

۸. از رابطه‌ی $y=y^۲e^{\sin ۲x}+\sin x$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه‌ی $(۰,۱)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) ۳

۹. اگر $xy^۲+ye^{\frac{۱}{۲}x-۱}=۱$ مقدار مشتق y برحسب x در نقطه $(۲,\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۱۰. در تابع با ضابطه‌ی $y=Ln(۱+\sin x)$ آهنگ لحظه ای تغییر y در واحد تغییر x، در نقطه ای به طول $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ای به طول $x=a$ است، a کدام می‌باشد؟

۱) ۱۱٫۷۵ ۲) ۱۲٫۲۵ ۳) ۱۲٫۵ ۴) ۱۳٫۵

۱۲. آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع r در $r_۰=۱۰$ کدام است؟

۱) ۱۰π ۲) ۱۵π ۳) ۲۵π ۴) ۲۰π

۱۳. در تابعی با ضابطه‌ی $f(t)=\frac{۲۴۰}{t}$، آهنگ آنی تغییر f در $t=۴$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه‌ی $t=۳$ تا $t=۵$ بیش‌تر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۴. اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر f در واحد تغییر x در $x=۲$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ باشد، آن‌گاه حد عبارت $\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$ وقتی $h\to ۰$ برابر کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۱۵. اگر $y=\cos\sqrt{۲}x+\sin\sqrt{۲}x$ باشد، حاصل $\frac{y''}{y}$ برابر کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۶. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x+۱}{۲x-۱}$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) $۳y=x+۱$ ۲) $۳y=-x+۵$ ۳) $y=-۳x+۷$ ۴) $y=۳x-۵$

۱۷. معادله‌ی خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x+۱}{۲x-۱}$ در نقطه ای به طول -۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y-۳x=۳$ ۲) $y+۳x=-۳$ ۳) $۳y-x=۱$ ۴) $۳y+x=-۱$

۱۸. در یک نقطه از منحنی به معادله‌ی $\sqrt{y}+yx\sqrt{x}-۶x=۰$ خط مماس بر منحنی موازی محور xها است. طول آن نقطه کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۹. اگر نمودارهای دوتابع با ضابطه‌های $y=۲x+b$ و $y=ax^۲+bx-۳$ روی محور x ها در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع باشند، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۰. نمودارهای دو تابع $y=2x^2+ax+b$ و $y=2x+b$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر روی محور xها متقاطع اند. a کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱. خط $y=-1$ بر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2x^2-x+a$ مماس است. a کدام است؟

۱) $-\frac{9}{8}$ ۲) $-\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۲۲. نمودارهای دو تابع $y=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$ و $y=3^x+\frac{8}{3}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی $(-1,1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{5}$

۲۳. به ازای کدام مقدار a، منحنی به معادله‌ی $ay=x^2+5x+4$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۲۴. مشتق $f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ برابر -2 است. شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2x-1}{x+1}$، در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه‌ی $(-1\ ,\ 0)$ می گذرد. α کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۲۶. عرض از مبداء خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه‌ی تقاطعش با محور طول‌ها کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۲۷. نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبداء مختصات است.
آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه‌ای به طول $x=7$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{16}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & x\geq 1 \\ x^2+ax+b & x<1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1-\sqrt{2})$ کدام می‌باشد؟

۱) $3-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $2-2\sqrt{2}$ ۴) $3-2\sqrt{2}$

۲۹. تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} (x-1)\,|x-1| & x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$ در نقطه ی $x=1$ مشتق پذیر است و a کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

۳۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & ; \quad x<1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\sin x & x\geq 0 \\ ax^n & x<0 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=0$ مشتق مرتبه‌ی سوم دارد. a کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۲. خط مماس بر نمودار $y^3+3xy^2-3x^3y=1$ در نقطه‌ی $(1,1)$ از کدام نواحی صفحه‌ی مختصات می‌گذرد؟

۱) اول و سوم ۲) اول و چهارم ۳) اول و دوم و سوم ۴) اول و دوم و چهارم

۳۳. اگر تابع f در $x=4$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=\frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y=\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۴. اگر تابع f در $x=-2$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y=x^2f(x)$ در $x=-2$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳۵. عرض از مبدأ خط قائم بر نمودار $x^3+y^3=3xy+3$ ، در نقطه‌ی $(1,2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۶. کدام خط بر منحنی به معادله‌ی $e^{x+y}+x+y-1=0$ در مبدأ مختصات مماس است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$ ۳) $y=2x$ ۴) $y=-2x$

۳۷. خط قائم بر نمودار $x^2y-Ln(2x-y)=12$، در نقطه‌ی $(2,3)$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -5 ۲) -4 ۳) ۱ ۴) ۲

۳۸. اگر $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۳۹. خط به معادله‌ی $y=mx+4$ با منحنی به معادله‌ی $y=-x^2+2x$، هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند. مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m<0$ ۲) $m>4$ ۳) $-1<m<4$ ۴) $-2<m<6$

۴۰. نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_{۲}^{\frac{۱}{x}}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) $f(x)$ بالاتر ۲) $g(x)$ بالاتر ۳) منطبق‌اند ۴) فقط در یک نقطه متقاطع

۴۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\frac{۱}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $h+۲$ تغییر کند برابر $\frac{۸}{۹}$ است، h کدام است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳

۴۲. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y=-۲x+b$، در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور xها متقاطع اند. طول‌های دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟

۱) ۲ و ۱− ۲) ۳ و ۱−
۳) ۱− و صفر ۴) ۲ و صفر

۴۳. مقدار مشتق تابع $y=\tan^{۳}x-\cot ۲x$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۴

۴۴. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱۴۴}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x_۱=۵$ تا $x_۲=۹$ کدام است؟

۱) ۰٫۴ ۲) ۰٫۵ ۳) ۰٫۶ ۴) ۰٫۷

۴۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۳x^{۲}+۴x-۲$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در $x=a+\frac{h}{۲}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a+h$ تغییر کند، کدام است؟

۱) h ۲) $۲h$ ۳) $۳h$ ۴) ۰

۴۶. خط به معادله‌ی $f(x)=۲x-۵$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله‌ی $g(x)=ax^{۲}+bx+۱$ مماس است. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۷. اگر $f(x)=\sqrt{۲\sin \pi x^{۲}}$، آنگاه $f'(\frac{۱}{\sqrt{۶}})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\pi\sqrt{۲}$ ۴) $\pi\sqrt{۳}$

۴۸. مقدار مشتق $y=\sin x\cos ۳x$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

۴۹. اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{\pi}\sqrt{۳+۲\cos\frac{\pi}{x}}$ به ازای $x=۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۰. در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه‌ی $[۲/۲۵, ۲/۵۶]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چه قدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۱}$

۵۱. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۶}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ی $[۰, ۳]$ ، از آهنگ لحظه ای تابع در $x=\sqrt{۲}$ چقدر کمتر است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۵۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳$، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x=۳$ و $\Delta x=۰/۱$، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه ای به طول $x=۳$ چه قدر بیش‌تر است؟

۱) ۰/۳۱ ۲) ۰/۴۲ ۳) ۰/۶۲ ۴) ۰/۹۱

۵۳. در تابع $f(x)=\frac{x}{x-۱}$، روی بازه‌ی $[۲ , ۲/۰۲]$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۲$ چه‌قدر بیش‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۱}$ ۳) $\frac{۱}{۵۱}$ ۴) $\frac{۲}{۵۱}$

۵۴. اندازه‌ی مشتق تابع $y=\frac{۱-\tan ۲x}{۱+\tan ۲x}$، به ازای $x=\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۵. مقدار مشتق تابع $y=\frac{۱+\cos ۲x}{\cos ۲x}$، به ازای $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۵۶. اگر $y=\tan^۲(\pi u)$ و $u=x+\sqrt{x}$، آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) -۸π ۲) -۴π ۳) ۴π ۴) ۸π

۵۷. $y=\sqrt{۲u}-\frac{۱}{u}$ و $u=\sin^۲ x-\cos ۲x$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۵۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تابع از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۳$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۹. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1=4$ تا $x_2=12$، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=4$، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{7}{540}$ ۲) $\frac{11}{540}$ ۳) $\frac{7}{270}$ ۴) $\frac{11}{270}$

۶۰. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{x-1}$، آهنگ متوسط از $x_1=2$ تا $x_2=5$، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. α کدام است؟

۱) ۲٫۵ ۲) $1+\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1=4$ تا $x_2=6.25$، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=4$، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{5}{72}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۶۲. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x^2+3x}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۶۳. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{3}$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y=-\frac{3}{4}$ ۲) $y=\frac{3}{4}$ ۳) $y=-x+\frac{\pi}{3}-1$ ۴) $y=x+\frac{\pi}{3}$

۶۴. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y=\tan^2 x+\cos 2x$ در $x=\frac{\pi}{4}$ واقع بر منحنی کدام است؟

۱) $y+x=1+\frac{\pi}{4}$ ۲) $y+x=1-\frac{\pi}{4}$ ۳) $y+2x=1-\frac{\pi}{2}$ ۴) $y-2x=1-\frac{\pi}{2}$

۶۵. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=x^3-x^2$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر A قطع می‌کند. عرض نقطه‌ی A کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

۶۶. مشتق تابع $y=2\sin^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$، به ازای $x=\frac{\pi}{3}$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

۶۷. مقدار مشتق $y=\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۶۸. مقدار مشتق تابع $y=\cos^{۲}\dfrac{\pi}{۳x}$ به ازای $x=۴$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{۹۶}$ ۲) $\dfrac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\dfrac{\pi}{۴۸}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۳۲}$

۶۹. مشتق $y=\sin^{۳}\sqrt{۲x}$، به ازای $x=\dfrac{\pi^{۲}}{۱۸}$، کدام است؟

۱) $\dfrac{۹}{۸\pi}$ ۲) $\dfrac{۹}{۴\pi}$ ۳) $\dfrac{۲۷}{۸\pi}$ ۴) $\dfrac{۲۷}{۴\pi}$

۷۰. مقدار مشتق تابع $y=\cos^{۲}(\dfrac{\pi}{۳}+\dfrac{x}{۴})$، به ازای $x=\dfrac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۸}$ ۳) $\dfrac{۱}{۸}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

۷۱. مقدار مشتق عبارت $y=\sqrt{۱+\tan^{۲}\dfrac{۱}{x}}$، به ازای $x=\dfrac{۳}{\pi}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{-۲\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\dfrac{-۲\pi^{۲}}{۹}$ ۳) $\dfrac{۲\pi^{۲}}{۹}$ ۴) $\dfrac{۲\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۹}$

۷۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=۱$ با نمو متغیر ۰٫۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۲۱}$ ۳) $\dfrac{۳}{۴۲}$ ۴) $\dfrac{۲}{۲۱}$

۷۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در $x=۱$ با نمو ۰٫۴۴، از آهنگ لحظه ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳۰}$ ۲) $\dfrac{۱}{۲۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۱۲}$ ۴) $\dfrac{۱}{۶}$

۷۴. معادله‌ی خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y=\dfrac{۱}{\sqrt{x}}+x$، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $y-۲x=۰$ ۲) $۲y-x=۰$ ۳) $y+x=۳$ ۴) $y+۲x=۴$

۷۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\dfrac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۳}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ ، کدام است؟

۱) -۲۱ ۲) -۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۷۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\dfrac{۴x+۵}{x+۳}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ ، کدام است؟

۱) $\dfrac{۷}{۴۸}$ ۲) $\dfrac{۵}{۲۴}$ ۳) $\dfrac{۷}{۲۴}$ ۴) $\dfrac{۷}{۱۶}$

۷۷. مشتق تابع $y=۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۶}$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۷۸. مشتق عبارت $\sin^۴ x+\cos^۴ x$، به‌ازای $x=\frac{\pi}{۸}$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۷۹. مشتق تابع $y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۸۰. مشتق عبارت $\tan^۳ ۲x$، به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۵۴ ۴) ۷۲

۸۱. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶$ ، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

۱) -۴ ۲) $-۱۲,۴$ ۳) $۱۲,-۴$ ۴) ۱۲

۸۲. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y=۲^x$ و $y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴$، از نقطه‌ی $A(۰,۴)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax-a & x<۱ \\ x^۲-x & x\geq ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

۸۴. منحنی‌های توابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^۲+bx+۳$ بر خط به معادله‌ی $y=۷$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۵. اندازه‌ی مشتق تابع $y=Lne^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۶}$، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$

۸۶. اگر $f(x)=x|\sin \pi x|$، $f'(۱^+)$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) π

۸۷. از رابطه‌ی $\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}=۶$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه‌ی $(۱,۴)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۸. در تابع ضمنی $۴\sqrt{xy}+\frac{۱}{y}-۲x=۱$ ، تابع y برحسب متغیر x منظور شده است. معادله‌ی خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $(۴,۱)$ ، کدام است؟

۱) $y+۲x=۹$ ۲) $۲y-x=-۲$ ۳) $۳y+x=۷$ ۴) $۳y-x=-۱$

۸۹. خط قائم بر منحنی $y=xe^{x^۲-۴}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۹۰. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=Ln\sqrt{\frac{\sin x}{۱+\cos x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۲}$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۹۱. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+۴ & ; \quad x\geq -۲ \\ x^۳-x & ; \quad x<-۲ \end{cases}$، همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۹۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sin^۲ x-\cos ۲x & ; \quad ۰<x\leq \frac{\pi}{۴} \\ a\tan x+b\sin ۲x & ; \quad \frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲} \end{cases}$، در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۹۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} & ; \quad x>۱ \\ ax+b & ; \quad x\leq ۱ \end{cases}$ ، مقدار $f'(۱)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۹۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \frac{۳}{x}-۵ & x\geq ۱ \\ x^۲+ax+b & x<۱ \end{cases}$، در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{۱+\cos x} & ; x>۰ \\ \sin ۲x & ; x\leq ۰ \end{cases}$ ، مقدار $f'_{-}(۰)-f'_{+}(۰)$ ، کدام است؟

۱) ۰٫۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱٫۲۵ ۴) ۱٫۵

۹۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-۱|$ ، مقدار $f'_{+}(۱)+۳f'_{-}(۱)$ ، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

۹۷. اگر $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|$ و $g(x)=4x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) مشتق ندارد.

۹۸. اگر $f(x)=x^3-\left[2x^2\right]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})$ کدام است؟(با تغییر)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱   ۴) ۲

۹۹. از رابطه‌ی $y=\sin(x-2y)+\sqrt{x-y}$ مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۱۰۰. از نقطه‌ی $A(0,4.5)$ ، خطی بر منحنی $y=x^2$ عمود شده است. طول پای عمود با علامت مثبت، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲   ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۲٫۵

۱۰۱. به‌ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y=5x+a$، بر نمودار تابع $y=2x^2-3x+6$، مماس است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲   ۴) ۳

۱۰۲. اگر $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & x\leq 0 \\ Ln(x^2+1) & x>0 \end{cases}$ آنگاه $f'(0^+)-f'(0^-)$ کدام است؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) -1 ۴) -2

۱۰۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|\cdot[x]$، مقدار $f'(0^-)-f'(0^+)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۲

۱۰۴. از رابطه‌ی $y^2=\sqrt{x+2y}+x-2y$، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(5,2)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{15}$ ۲) $\frac{7}{34}$ ۳) $\frac{4}{17}$ ۴) $\frac{4}{15}$

۱۰۵. معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=Ln(2x-5)$، در نقطه‌ی تلاقی آن با محور xها کدام است؟

۱) $x+2y=3$ ۲) $x-2y=3$ ۳) $2x+y=6$ ۴) $2x-y=6$

۱۰۶. شیب خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $\sqrt{7x^2-2y}+y^2=10$، در نقطه‌ی $(1,3)$، کدام است؟

۱) $\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۱۰۷. شیب خط قائم بر منحنی، به معادله‌ی $\sqrt{2x-3y}+xy^2=3$، در نقطه‌ی $(2,1)$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۰۸. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{2x}\cdot e^{2-x}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می کند؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۱۰۹. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $x\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=9$ در نقطه‌ی $(4,1)$، کدام است؟

۱) $y+9x=37$ ۲) $y+6x=25$ ۳) $2y+3x=14$ ۴) $y+3x=13$

۱۱۰. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه‌ی $(2,\frac{1}{2})$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۱۱. خط به معادله‌ی $x+y=0$ قائم بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x^2-2x+Ln(x-1)$ است. طول پای قائم کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y^2+y=2e^{2x-1}$، در نقطه‌ی $(\frac{1}{2},1)$ کدام است؟

۱) $y-4x=-1$ ۲) $y+2x=2$ ۳) $3y-4x=1$ ۴) $3y+4x=5$

۱۱۳. خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $e^{2y}+Lnx+\frac{y}{x}=1$ در نقطه‌ی $(1,0)$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 1

۱۱۴. در نقاطی از منحنی به معادله‌ی $x^2-4xy+3y^2+1=0$ ، خط مماس بر منحنی موازی محور xها است. طول نقاط تماس، کدام است؟

۱) ۱ و -2 ۲) ۲ و -2 ۳) ۱ و -1 ۴) ۲ و -1

۱۱۵. عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y^2=yLn(x^2-3)+2x$ در نقطه‌ی $(2,-2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۱۶. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $x^2y-2x\sqrt{y}=8$ در نقطه‌ی $(2,4)$، کدام است؟

۱) $y-2x=0$ ۲) $y+2x=8$ ۳) $2y+x=10$ ۴) $y+4x=12$

۱۱۷. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $Ln(x^2-y)=\sqrt{y+1}-x$، در نقطه‌ی $(2,3)$ نیمساز ناحیه‌ی اول را با کدام طول قطع می کند؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۱۸. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=x^3+3x^2+1$، بر خط به معادله‌ی $x-3y=2$ عمود است. این خط مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) (۱ و ۳) ۲) (۱ و ۴) ۳) (۲ و -4) ۴) (۲ و -6)

۱۱۹. در نقطه‌ای از منحنی به معادله‌ی $x+\sqrt{xy}+y=12$ ، خط مماس بر منحنی، عمود بر نیمساز ربع اول است. طول نقطه‌ی تماس، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۰. عرض از مبداء خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=Ln\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

۱۲۱. به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=mx+2$ ، بر منحنی به معادله‌ی $x^2+y^2-2x=3$ مماس است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ و ۰ ۲) $\frac{4}{3}$ و ۰ ۳) $-\frac{2}{3}$ و ۱ ۴) $\frac{2}{3}$ و ۱

۱۲۲. اگر آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^2+6x-1$ در $[3,7]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در $x=a$ برابر باشد، a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{11}{2}$

۱۲۳. اگر $f(x)=2\sin^3 x+\cos^4 2x$، مقدار $f'(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ۲) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{25\sqrt{2}}{2}$ ۴) صفر

۱۲۴. اگر $y=\sqrt{3u+1}+\sqrt[3]{7u+1}$ و $u=3x^3-4x^2+x+1$، حاصل y'_x در $x=1$ چقدر است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{10}{3}$

۱۲۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه‌ی $x=1$ ، کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $-\frac{3}{8}$ ۴) $-\frac{3}{16}$

۱۲۶. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=e^{2x}$ در نقطه‌ی $(0,1)$ کدام است؟

۱) $y+2x=1$ ۲) $y-2x=1$ ۳) $2y+x=2$ ۴) $2y-x=2$

۱۲۷. اختلاف آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^3-x^2+5$ در بازه‌ی $[1,3]$ با آهنگ لحظه‌ای این تابع در نقطه‌ای به طول $x=2$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲۸. خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=2\sin 3x-\cos 2x$ در نقطه‌ی $A(\pi,-1)$ ، کدام است؟

۱) $y+6x=6\pi+1$ ۲) $y+6x=6\pi-1$ ۳) $y-6x=6\pi+1$ ۴) $y-6x=6\pi-1$

۱۲۹. اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۳x-۱}{x-۲}}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵\sqrt{۲}}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۵\sqrt{۲}}{۸}$ ۴) $-\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

۱۳۰. اگر $\lim\limits_{x\to -۴}\frac{f(x)-f(-۴)}{x+۴}=۳$ ، مشتق تابع $y=f(x^۳-۵x)$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۸ ۳) -۴۴ ۴) -۱۷۶

۱۳۱. مقدار مشتق تابع $f(x)=۳\sqrt{x-a}+۲$ به ازای $x=۴$، برابر $\frac{۱}{۳}$ است. a کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۴}$ ۲) $\frac{-۶۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۳۳}{۲}$

۱۳۲. شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{\pi}\sin \pi x$ در نقطه‌ای به طول $x=۰$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{\pi}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{\pi}$

۱۳۳. اگر $۹x^۲-۲xy^۳+\sin \pi y=۷$، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(۱,۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۶+\pi}$ ۴) $\frac{۶+\pi}{۱۶}$

۱۳۴. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ نسبت به متغیر x در بازه‌ی $[۴٫۲۵,۴٫۵۶]$ ، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۳۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳۱}$ ۴) $\frac{۵}{۳۱}$

۱۳۵. اگر $Ln\,|x+۱|+\sin(۲x+۳y)+۳\cos xy+۲e^{۳y}=۵$، آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطه‌ی $A\,(۰,۰)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۳۶. اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{۲-x}=۱$ ، مشتق تابع $g(x)=۲f(x)+x$ در نقطه‌ی $x=۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۳۷. اگر $y=u^۳-۲u^۲+\cos \pi u$ و $u=\tan \pi x+\cot ۲\pi x$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲π ۴) π

۱۳۸. اگر $f(x)=(x^۴+۱)(x^۸+۱)(x^{۱۶}+۱)$ ، حاصل عبارت $(x^۴-۱)f'(x)+۴x^۳f(x)$ کدام است؟

۱) $۳۲x^{۳۱}$ ۲) $۵۴x^{۳۱}$ ۳) $۶۴x^{۶۳}$ ۴) $۶۴x^{۳۱}$

۱۳۹. اگر $g(x)=5\sin(2x-3g(x))$ و $g(0)=0$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{5}{8}$ ۲) $\dfrac{5}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) $-\dfrac{5}{7}$

۱۴۰. در چند نقطه از نمودار منحنی $x^2+y^2-xy=12$، خط مماس بر نمودار با خط $y=5$ موازی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

۱۴۱. شیب خط قائم بر منحنی $f(x)=xe^{x^2-9}$ در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) $\dfrac{1}{19}$ ۳) -19 ۴) $-\dfrac{1}{19}$

۱۴۲. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x\geq 1 \\ x^3-2x & x<1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر باشد.، حاصل a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۲۶ ۴) ۳۴

۱۴۳. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & x<2 \\ ax^2-bx+1 & x\geq 2 \end{cases}$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) $\dfrac{85}{4}$ ۳) ۲۲ ۴) $\dfrac{43}{2}$

۱۴۴. اگر $f(x)=e^{x^5-5x}+Ln(x^2-3x)$، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\dfrac{1}{4}$ ۳) $e^4-\dfrac{1}{4}$ ۴) $-\dfrac{5}{4}$

۱۴۵. اگر $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+2h)-g(1)}{h}=5$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^3+x$ در $[1,2]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع g در $x=1$ بیشتر است؟

۱) ۵ ۲) ۵٫۵ ۳) ۶ ۴) ۶٫۵

۱۴۶. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $e^x+e^{2y}+x+3y=2$ ، در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$ ۳) $y=-\dfrac{2}{5}x$ ۴) $y=\dfrac{5}{2}x$

۱۴۷. معادله‌ی خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $2x^6+y^6+xy^3-4=0$ در نقطه‌ی $A(1,1)$ کدام است؟

۱) $13y-9x=4$ ۲) $13x-9y=4$
۳) $13x+9y=22$ ۴) $13y-7x=6$

۱۴۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} e^{ax}+2 & x>0 \\ bLn(e+2x) & x\leq 0 \end{cases}$، مقدار $f'(0)$ موجود است حاصل ab کدام است؟

۱) $\dfrac{9}{e}$ ۲) $\dfrac{12}{e}$ ۳) $\dfrac{18}{e}$ ۴) $\dfrac{24}{e}$

۱۴۹. کدام یک از توابع زیر در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\geq 1 \\ x^4-x & x<1 \end{cases}$

۲) $g(x)=(x+1)^2[x]$

۳) $h(x)=\begin{cases} 4\sqrt{x-1} & x\geq 1 \\ -\sqrt{1-x} & x<1 \end{cases}$

۴) $k(x)=|x|+\left|x^3+1\right|$

۱۵۰. اگر $f(x)=4\cos^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{12})$، حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x^2-\pi^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{6\pi}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{12\pi}$ ۳) $\frac{1}{6\pi}$ ۴) $\frac{1}{12\pi}$

۱۵۱. فرض کنید $f(x)=(e^{3x}+2)^3(e^{\sin x}-1)Ln(e+x)$، در این صورت $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲۷ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۱۵۲. نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$ با چه زاویه‌ی حاده‌ای محور xها را قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{12}$

۱۵۳. در رابطه‌ی ضمنی $\sqrt[3]{y^2}=x+y-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}$، مشتق y نسبت به x کدام است؟ $(xy\neq 0)$

۱) $-\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$ ۲) $-\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}$ ۳) $-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$ ۴) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

۱۵۴. خط به معادله‌ی $y=5x+1$ در نقطه‌ای به طول $x=3$ بر منحنی پیوسته‌ی $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^2(x)-16f(x)}{3-x}$ کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۰− ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۶۰−

۱۵۵. اگر $f(x)=(\sqrt{e^{2x}+x^4}+x^2)^5$ و $g(x)=(\sqrt{e^{2x}+x^4}-x^2)^5$، حاصل عبارت $A=\frac{f'(0)g(0)+g'(0)f(0)}{f(0)+g(0)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) صفر

۱۵۶. در تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی $[1,5]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{8}{3}$، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{72}$ ۲) $\frac{1}{144}$ ۳) $\frac{1}{48}$ ۴) $\frac{1}{288}$

۱۵۷. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} xe^{2x} & x\geq 0 \\ aLn(x+1)+b & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $f'_+(0)+f'_-(0)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۱۵۸. اگر $f(x)=\dfrac{\cos ۲x}{\cos x+\sin x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

۱۵۹. از رابطه‌ی $y=\cos(۴x-y)+\sqrt{۴y-۷x}$، مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(۱,۴)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۷}{۴}$ ۲) $\dfrac{۷}{۲}$ ۳) $-\dfrac{۷}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۷}{۲}$

۱۶۰. خط‌های $y=k_۱$ و $y=k_۲$ بر نمودار تابع $y=۹x+\dfrac{۱}{x}$ مماس هستند. حاصل $|k_۱-k_۲|$ کدام است؟$(k_۱,k_۲\in R)$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۱۶۱. اگر $g(x)=Ln\dfrac{(x-۱)\sqrt{۲x-۳}}{(۳x-۵)^۲}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{g(۲+h)-g(۲)}{h}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۸ ۴) صفر

۱۶۲. اگر $f(x)=Ln\dfrac{\sqrt{۵x+۱}}{(x^۲-۸)(x-۲)}$، حاصل $f'(۳)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{-۲۱۵}{۱۶}$ ۲) $\dfrac{-۲۱۷}{۳۲}$ ۳) $\dfrac{-۲۱۹}{۳۲}$ ۴) $\dfrac{-۲۲۱}{۱۶}$

۱۶۳. از نقطه‌ی $A(۳,۰)$ چند خط می‌گذرد که بر سهمی $y=x^۲$ عمود باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۴. معادله‌ی خطی با شیب منفی که از نقطه‌ی $A(۰,۳)$ بگذرد و بر نمودار تابع $f(x)=x^۲$ عمود باشد، کدام است؟

۱) $y=-\dfrac{\sqrt{۱۰}}{۲}x+۳$ ۲) $y=-\dfrac{\sqrt{۱۰}}{۲۰}x+۳$

۳) $y=-\dfrac{\sqrt{۱۰}}{۵}x+۳$ ۴) $y=-\dfrac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}x+۳$

۱۶۵. اگر $f(x)=(x^۳-۲)|x|$، کدام‌یک از موارد زیر درست است؟

۱) $f'(۰)=-۲$ ۲) $f'_+(۰)=-۲$ ۳) $f'_-(۰)=-۲$ ۴) $f'(۱)=-۱$

۱۶۶. در چند نقطه از نمودار منحنی $x^۲-xy+y^۲=۳$، خط مماس بر منحنی با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۶۷. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{۲}\sin ۲x$ در مبدا مختصات با چه زاویه‌ای محور xها را قطع می‌کند؟

۱) ۳۰° ۲) $۲۲/۵^\circ$ ۳) ۴۵° ۴) ۱۵°

۱۶۸. تابع $f(x)=\begin{cases} mx^{2}-2x+1 & x\geq 2 \\ nx+Ln\sqrt[3]{3x-5} & \frac{5}{3}<x<2 \end{cases}$ ، در $x=2$ مشتق‌پذیر است. مقدار m کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۱۶۹. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} aLnx+x^{2} & x\geq 1 \\ be^{x-1} & x<1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) صفر

۱۷۰. اگر $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ حاصل $f'_{-}(0)$ کدام است؟

۱) موجود نیست ۲) ۱ ۳) -1 ۴) صفر

۱۷۱. شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=Ln\sqrt[3]{\dfrac{\cos 3x}{1+\sin 2x}}$ در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر منحنی کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{9}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۷۲. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $x^{3}+\sqrt{xy}+y^{2}=3$ در نقطه‌ی $(1,1)$ کدام است؟

۱) $5y+7x=12$ ۲) $7y+5x=12$ ۳) $y=x$ ۴) $y=-x+2$

۱۷۳. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\dfrac{24}{x^{3}}+1$ در بازه‌ی $[1,2]$، چقدر از آهنگ لحظه‌ای این تابع در $x=1$ بیش‌تر است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۰ ۳) ۵۱ ۴) ۵۲

۱۷۴. اگر $\cos x+2y^{5}+x^{3}-Ln(x+1)+Ln(4y+1)+3e^{2x-y}=4$، آهنگ لحظه‌ای تغییر y نسبت به x در مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) -20 ۲) -10 ۳) -7 ۴) -5

۱۷۵. از نقطه‌ی $A(0,\frac{17}{2})$ خطی بر منحنی $f(x)=x^{2}$ عمود شده است. طول پای عمود کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) -2 ۳) $-4\sqrt{2}$ ۴) -4

۱۷۶. شیب خط مماس بر نمودار منحنی $2\sin(x-y)+\sqrt{xy}+2x^{2}=3y$ در نقطه‌ی $(1,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{9}$ ۲) $-\frac{13}{9}$ ۳) $\frac{9}{13}$ ۴) $-\frac{9}{13}$

۱۷۷. تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}e^{\sin x}$ با چه زاویه‌ای محور xها را قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۷۸. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ae^{۵x}+b & x\geq ۰ \\ Ln(e-x) & x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{۵e+۱}{۲۵e^۲}$ ۲) $\frac{-۵e-۱}{۲۵e^۲}$ ۳) $\frac{۵e-۱}{۲۵e^۲}$ ۴) $\frac{-۵e+۱}{۲۵e^۲}$

۱۷۹. متحرکی بر روی منحنی به معادله‌ی $۱=Ln\sqrt{۲x-۱}+۳\,Ln\sqrt[۳]{۳y-۲}+e^{x-y}$ در حرکت است. آهنگ تغییر y نسبت به x در نقطه‌ی $(۱,۱)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۱۸۰. شیب خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=Ln\frac{\sqrt[۳]{۳x-۵}}{x^۲+۲x-۷}$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ واقع بر منحنی کدام است؟

۱) -۵ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) ۵

۱۸۱. عرض از مبدا خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=Ln\frac{\sqrt[۳]{۴x-۳}}{(x^۲+x-۱)(۳x-۲)}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) ۵

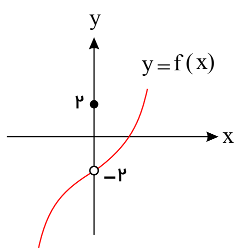
۱۸۲. شکل مقابل، تابع $y=f(x)$ است. مقدار مشتق تابع $g(x)=۳xf(x)$ در $x=۰$ چقدر است؟

۱) وجود ندارد.

۲) -۶

۳) ۶

۴) ۱۲



۱۸۳. در رابطه‌ی $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}-۳x\sqrt{y}=-۳y\sqrt{x}$، آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطه‌ی $(۴,۴)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۶ ۴) صفر

۱۸۴. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $x^۳y^۲+\sqrt{xy}+۲y^۵=۴$ در نقطه‌ی $(۱,۱)$ کدام است؟

۱) $y=\frac{۳۲}{۲۵}x-\frac{۷}{۲۵}$ ۲) $y=-\frac{۷}{۲۵}x+\frac{۷}{۲۵}$

۳) $y=\frac{۷}{۲۵}x-\frac{۷}{۲۵}$ ۴) $y=-\frac{۷}{۲۵}x+\frac{۳۲}{۲۵}$

۱۸۵. اگر $f(x)=\sqrt[۳]{\frac{x^۴+۴x^۲+۴}{(۵x^۲-۱)^۲}}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{\frac{x^۲+۲}{۵x^۲-۱}}$ حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲۲x}{(۵x^۲-۱)^۲}$ ۲) $\frac{-۴۴x}{(۵x^۲-۱)^۲}$ ۳) $\frac{-۱۱x}{(۵x^۲-۱)^۳}$ ۴) $\frac{-۲۰x}{(۵x^۲-۱)^۴}$

۱۸۶. مقدار مشتق تابع $f(x)=(\frac{x^{۲}+۱}{\sqrt{۳x+۱}})^{۳}$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۸۷. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=Ln\sqrt{۱+\cos x}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۲}$ روی منحنی، کدام است؟

۱) $۴y-۲x=-\pi$ ۲) $۲y+۲x=\pi$

۳) $۴y+۲x=\pi$ ۴) $۲y-۲x=\pi$

۱۸۸. خط عمود بر منحنی $y=\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۲}}{۲}-x$ در نقطه‌ای با طول مثبت، با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی ۱۳۵° می‌سازد. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۵}{۶}$

۱۸۹. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+۲x$ هنگامی که متغیر از $x_۱=-۱$ به $x_۲=۲$ تغییر می کند، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) ۱۰

۱۹۰. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x+۱}$ نسبت به تغییر x در بازه‌ی $[۰,۸]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۹۱. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=\sin ۲x$ در $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۹۲. معادله‌ی خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۱}{x}$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y=-۰/۲۵x+۱$ ۲) $y=۰/۲۵x$

۳) $y=۴x-۷/۵$ ۴) $y=-۴x+۸/۵$

۱۹۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+۲ & ; \quad x\geq ۱ \\ ۱۶x-۹ & ; \quad x<۱ \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ مشتق‌پذیر است. $a-b$ کدام است؟

۱) -۱۷ ۲) ۱۷ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۱۹۴. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+۱ & x\geq ۲ \\ x^{۳} & x<۲ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۵ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۹۵. مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}}$ در $x=-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۹۶. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{x}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) $y=\frac{۱}{۲}x$ ۲) $y=-۲x+۵$

۳) $y=\frac{-۱}{۲}x+۲$ ۴) $y=۲x-۳$

۱۹۷. به‌ازای کدام مقدار b، منحنی $f(x)=ax^۲+۲x$ بر خط $g(x)=x+b$ در $x=۱$ مماس است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۹۸. اگر $f(x)=\begin{cases} e^{ax}-e^{bx} & , \quad x\geq ۰ \\ Ln(۱-۲ax) & , \quad x<۰ \end{cases}$ در $x=۰$ مشتق پذیر باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) نشدنی

۱۹۹. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲-\sqrt{۳x+۱}$ نسبت به تغییر x در بازه‌ی $[۱,۵]$، چند برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در ابتدای این بازه است؟

۱) ۲٫۲ ۲) ۳٫۲ ۳) ۴٫۴ ۴) ۶٫۴

۲۰۰. خط به معادله‌ی $y=\frac{۱}{۲}(x-b)$ بر منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x}$ مماس است، b کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۲۰۱. اگر $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=۲$ ، آن‌گاه مشتق تابع $y=f(\tan\pi x-۱)$ در $x=۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۲π ۴) -۲π

۲۰۲. مشتق تابع $y=Ln(Ln\frac{۱}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{Lnx}$ ۲) $\frac{۱}{xLnx}$ ۳) $\frac{-x}{Lnx}$ ۴) $\frac{-۱}{xLnx}$

۲۰۳. مشتق دوم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۴)^۲\sqrt{x}$ در $x=۴$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱

۲۰۴. زاویه‌ی منحنی $f(x)=\tan x$ با جهت مثبت محور xها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

۲۰۵. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ۳x+۷ & x\geq a \\ x^۲+۹ & x<a \end{cases}$ در مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است؟

۱) $\{۱,۲\}$ ۲) $\{۲\}$ ۳) $\{۱\}$ ۴) هیچ مقدار a

۲۰۶. در نقطه‌ای که مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\tan^{2}x-\cot x$ صفر است، مقدار مشتق تابع کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۶

۲۰۷. اگر مشتق چپ تابع $f(x)=ax|\tan \pi x+\sqrt{3}|$ در $x=\frac{2}{3}$ برابر -4π باشد، a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۲۰۸. یکی از خط‌های مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=(x+2)^{2}$، محور xها را در یک نقطه با طول یک قطع می‌کند. مجموع طول و عرض نقطه‌ی تماس منحنی با خط مورد نظر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۲۰۹. نمودارهای $f(x)=(\frac{1}{2})^{ax-1}$ و $g(x)=32^{x-1}$ در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع‌اند. در این صورت نمودار $f^{-1}(x)$، خط $x=\frac{1}{16}$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{7}{5}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{14}{25}$ ۴) $\frac{43}{7}$

۲۱۰. اگر $f(x)=(x^{2}-x-2)^{2}$ و $g(x)=(\frac{x+2}{x+1})^{2}$، آن‌گاه حاصل $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -12 ۳) ۶ ۴) -6

۲۱۱. نقطه‌ی A با طول $2-h$ و نقطه‌ی B با طول ۲ بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sin \pi x$ واقع اند. شیب پاره خط AB، زمانی که $h\to 0$ کدام است؟

۱) 2π ۲) -2π ۳) π ۴) $-\pi$

۲۱۲. اگر $f(x)=\sqrt{4-2|x|}$، آنگاه حاصل $f'_{-}(0)-f'_{+}(0)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) -1

۲۱۳. خط قائم بر منحنی $y=Ln\frac{3x-5}{x+1}$، در نقطه‌ی تلاقی آن با محور طول‌ها از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(2,3)$ ۲) $(5,2)$ ۳) $(-1,8)$ ۴) $(-3,10)$

۲۱۴. اگر $g(x)=\frac{1}{2+\frac{1}{x}}$ و $f(x)=\sqrt{x(x-5)}$، آن‌گاه مشتق تابع gof در نقطه‌ای به طول $x=9$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{143}$ ۲) $\frac{1}{169}$ ۳) $\frac{1}{182}$ ۴) $\frac{1}{156}$

۲۱۵. اگر $y=\sin^{2}(\pi\sqrt{x})$ و $x=t^{2}-1$ باشند، آنگاه مقدار $\frac{dy}{dt}$ در $t=\frac{5}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{3}$ ۲) $-\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

۲۱۶. مشتق چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|ax+b|$ در $x=۲$ به ترتیب برابر -۳ و ۳ است. مقدار مثبت b کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱٫۵ ۴) ۰٫۷۵

۲۱۷. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(۶x+۲)^{\frac{۲}{۳}}$ در بازه‌ی $[۱,\frac{۲۵}{۶}]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در شروع این بازه کمتر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۱۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

۲۱۸. اگر منحنی $f(x)=ax^{۲}-bx+۲$ بر خط $g(x)=bx-۶$ در $x=۲$ مماس باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۱۹. اگر $f(x)=\sqrt{\frac{\sin x}{۱+\cos x}}$ و $g(x)=\pi\cos x$ باشد، مشتق $(fog)(x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\pi$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\pi$ ۴) $-\frac{۱}{۴}\pi$

۲۲۰. مشتق تابع $f(x)=Ln(Ln|۲x|)$ در $x=\frac{e}{۲}$ کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{۴}{e}$ ۳) $\frac{۲}{e}$ ۴) $\frac{e}{۲}$

۲۲۱. اگر $f(x)=x^{۲}[x^{۲}]$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(\sqrt{۲})-f(\sqrt{۲}-h)}{h}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $-۴\sqrt{۲}$

۲۲۲. در معادله‌ی $۲\tan\frac{\pi}{x}+y=e^{x-۲y}+۳$ مقدار مشتق y نسبت به x در نقطه‌ی $(۴,۲)$، چه‌قدر از $\frac{\pi}{۱۲}$ بیش‌تر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۲۳. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲^{x}-۲$ محور xها را با زاویه‌ی α قطع می‌کند. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $Ln۴$ ۲) $Ln۲$ ۳) $\frac{۲}{Ln۲}$ ۴) ۱

۲۲۴. اگر $f(x)=\sin^{۳}x\cos^{۳}x$، آن‌گاه $f'(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۳۲}$ ۲) $-\frac{۹}{۳۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۳۲}$ ۴) $-\frac{۳\sqrt{۳}}{۳۲}$

۲۲۵. تابع $f(x)=[x](۲^{x}-۱)$ مفروض است. حاصل $f'_-(۰)-f'_+(۰)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $Ln۲$ ۴) $-Ln۲$

۲۲۶. از رابطه‌ی $2x^2+\sin 2y=2+Ln(1+y^2)$ ، آهنگ لحظه‌ای تغییر y نسبت به تغییر x در نقطه‌ای با طول منفی که عرض آن صفر است، کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۲۲۷. عرض از مبدا خط قائم بر منحنی $y^2x^2+yx-6=0$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر منحنی در ربع چهارم چقدر است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{7}{3}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{11}{3}$

۲۲۸. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y^2-xy+x^2=3$ در نقطه‌ای با طول مثبت موازی محور xهاست. این طول کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۹. اگر $y=u^2-2u$ و $u=[\sin x]x-\cos x$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{3\pi}{2}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)

۱) $4\pi+6$ ۲) $4\pi-6$ ۳) $6\pi+4$ ۴) وجود ندارد.

۲۳۰. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $Ln(\frac{y-x^2}{4})+x+1=\sqrt{y+1}$ در نقطه‌ی $(2,8)$ نیمساز ناحیه‌ی دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) -6 ۴) -8

۲۳۱. آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+a\sqrt{x}$، وقتی x از ۱ به ۴ تغییر می‌کند، دو برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x=1$است، a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۳۲. اگر $f(x)=(\frac{\sqrt{x}}{x-3})^3$، حاصل $\lim_{x\to 4}\frac{f(4)-f(x)}{4-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{-7}{4}$ ۲) $\frac{-21}{4}$ ۳) -7 ۴) -21

۲۳۳. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a\cdot e^{2x}+2b & , \quad x\geq 0 \\ a\sin 3x+x & , \quad x<0 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۳۴. اگر $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$ باشد، آنگاه مشتق تابع $gof(x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{12}$ چه قدر است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۲۳۵. اگر $y=\frac{u}{۲}\sqrt[۳]{۳u+۲}$ و $u=x^{۲}+۲x-۱$، آن‌گاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=۱$، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۱۰

۲۳۶. معادله‌ی خط مماس بر تابع $y=x^{۳}-۵x^{۲}+۷x+۱$ در $x=۱$ واقع بر منحنی، وتری با چه طول روی سهمی $y=x^{۲}-۵x+۶$ جدا می‌کند؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۹}$

۲۳۷. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y+۷۰=۲\sqrt{x}+x^{۲}y^{۲}-۲x^{۳}+۳۵$ در نقطه‌ی $(۴,۱)$، از نقطه‌ی $(۱۰\alpha,\alpha)$ می‌گذرد. α کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۳۸. اگر $f(x)=\frac{۱}{\cos^{۳}\frac{\pi}{\sqrt{x}}}$، مقدار $\frac{df}{dx}$ در نقطه‌ای با طول ۳۶ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{-\pi}{۷۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۷۲}$ ۳) $\frac{-\pi}{۱۶۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۱۶۲}$

۲۳۹. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}\sin\pi x$ حاصل $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) ۲π

۲۴۰. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}$، آهنگ متوسط در بازه‌ی $[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ چه‌قدر از آهنگ لحظه‌ای در ابتدای بازه بیش‌تر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴۱. تابع $f(x)=\begin{cases}Ln\frac{e^{۲}}{x} & ;\ x>۱\\ x^{۲}+ax+b & ;\ x\le ۱\end{cases}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۲۴۲. اگر $f(x)=([x]+[-x])\left|x^{۲}-x\right|$ آن‌گاه مشتق چپ تابع f در $x=۱$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

۲۴۳. اگر $f(x)=x^{۲}+۳|x|$ باشد، مشتق تابع $y=f(\sqrt{f(x)})$ در $x=-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۴}$ ۴) $-\frac{۳۵}{۴}$

۲۴۴. اگر خط $ay+x=2$، قائم بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=4x+e^{-2x}$ در نقطه‌ای به طول $x=0$ واقع بر آن باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

۲۴۵. اگر $f(x)=\sqrt{e^{x-x^2}}$، عرض از مبدأ معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع f در $x=1$ روی منحنی کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -2 ۴) -1

۲۴۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

۲۴۷. کدام بیان در مورد پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع درست است؟

۱) اگر تابعی در x_0 پیوسته نباشد ممکن است مشتق‌پذیر باشد.

۲) اگر تابعی در x_0 پیوسته باشد الزاماً در x_0 مشتق‌پذیر است.

۳) اگر تابعی در x_0 مشتق‌پذیر باشد، ممکن است پیوسته نباشد.

۴) اگر تابعی در x_0 مشتق‌پذیر باشد الزاماً در x_0 پیوسته است.

۲۴۸. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(5x-2)^2} & x\geq 2\\ ax+b & x<2\end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر است b کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۲۴۹. مشتق عبارت $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3$ به ازای $x=\frac{3}{4}$ کدام است؟

۱) ۱۶٫۸ ۲) ۱۸٫۴ ۳) ۱۹٫۲ ۴) ۱۹٫۶

۲۵۰. اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=1+\cos x$ مشتق تابع $y=\sqrt{(\frac{f}{g})(x)}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) $(3)^{-\frac{3}{2}}$ ۲) $(3)^{-\frac{3}{4}}$ ۳) $(3)^{-\frac{1}{2}}$ ۴) $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$

۲۵۱. مشتق تابع $y=\sqrt[3]{1+\cos 2x}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{3}$ به صورت $-\frac{1}{3}\sqrt[6]{A}$ است. A کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۲۳۴ ۳) ۳۲۴ ۴) ۴۳۲

۲۵۲. اگر $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x)=\tan x$ باشند، مشتق تابع $(fog)(\sqrt{x})$ به ازای $x=\frac{\pi^2}{144}$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{\pi}$ ۲) $\frac{4}{\pi}$ ۳) $\frac{-8}{\pi}$ ۴) $\frac{-6}{\pi}$

۲۵۳. مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=Ln\dfrac{|۲x-۵|}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ در نقطه‌ی $x=۲$ کدام است؟

۱) $-۲٫۴$ ۲) $۱٫۸$ ۳) $-۱٫۶$ ۴) $۱٫۴$

۲۵۴. مشتق عبارت $y=Ln\dfrac{x^{۲}\sqrt{x+۲}}{(۲x+۱)^{۳}}$ به ازای $x=۲$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲۰}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴۰}$ ۳) $-\dfrac{۳}{۲۰}$ ۴) $-\dfrac{۳}{۴۰}$

۲۵۵. مشتق عبارت $y=Ln\dfrac{x\sqrt{x+۲}}{\sqrt[۳]{۴x}}$ به ازای $x=۲$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۵}{۱۲}$ ۲) $\dfrac{۷}{۱۲}$ ۳) $\dfrac{۱۱}{۲۴}$ ۴) $\dfrac{۱۳}{۲۴}$

۲۵۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}+\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}$ مقدار $f'_{+}(۲)-f'_{-}(۲)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۵۷. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-\dfrac{x|x+۱|}{x+۱}$ مقدار $f'_{-}(-۱)-f'_{+}(-۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۲۵۸. از رابطه‌ی $x^{۲}+۲y^{۲}-xy+۲x=۹$ آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطه‌ی $(۱,۲)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۵}$ ۲) $\dfrac{۳}{۷}$ ۳) $-\dfrac{۲}{۷}$ ۴) $-\dfrac{۲}{۵}$

۲۵۹. مشتق مرتبه‌ی سوم تابع $y=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۴۰}{۹}$ ۲) $\dfrac{۴۰}{۹}$ ۳) $\dfrac{۴۰}{۲۷}$ ۴) $\dfrac{۸۰}{۲۷}$

۲۶۰. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{۲x-۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول -۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y=۷x+۹$ ۲) $y=۶x+۷$ ۳) $y=-۷x+۹$ ۴) $y=۴x+۳$

۲۶۱. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $۲y+\sqrt{xy}-x=۲$ ، در نقطه‌ی $\left(-۲,-\dfrac{۱}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $۴y-۵x=۸$ ۲) $۴y-۳x=۴$

۳) $۲y-۵x=۹$ ۴) $۲y-۳x=۵$

۲۶۲. در نقطه‌ای با کدام طول، خط مماس بر نمودار تابع $y=x^{۲}-۳x+۲$ موازی خط گذرابر دو نقطه‌ی $(۱,۴)$ و $(۳,۲)$ است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۶۳. عرض از مبداء خط قائم بر منحنی $y=x\sqrt[۳]{۲x-۵}$ در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱-

۲۶۴. معادله‌ی خط قائم بر منحنی $x^۲+\sqrt{x+۲y}-y^۲=۵$ در نقطه‌ای $(۲,۱)$ کدام است؟

۱) $۱۷y+۶x=۲۹$ ۲) $۱۷y-۶x=۵$

۳) $۶y+۱۱x=۲۸$ ۴) $۱۴y-۵x=۴$

۲۶۵. شیب خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{x-\sqrt{x^۲+۶x}}{۲x-۱}$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۹}{۳۶}$ ۲) $\dfrac{۱۳}{۳۶}$ ۳) $\dfrac{۵}{۹}$ ۴) $\dfrac{۴}{۹}$

۲۶۶. خط قائم بر منحنی $y=\tan(\cos x)$ در نقطه‌ای $x=\dfrac{\pi}{۲}$ واقع بر آن، نیمساز ناحیه‌ی چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\dfrac{\pi}{۴}$ ۲) $۱+\dfrac{\pi}{۴}$ ۳) $۱-\dfrac{\pi}{۴}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۲}$

۲۶۷. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{e^x\sqrt[۳]{۱+۴x}}{۳x+۲}$ در نقطه‌ی تلاقی آن با محور yها کدام است؟

۱) $۶y-x=۳$ ۲) $۱۲y-۵x=۶$ ۳) $۱۲y+۵x=۶$ ۴) $۶y+x=۳$

۲۶۸. بر روی منحنی $y=\sqrt{x^۲-۱۶}$ دو نقطه‌ی A و B به طول‌های ۴ و ۸ انتخاب شده است. خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی C واقع بر آن موازی خط AB است. طول نقطه‌ی C کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۶۹. خط $y=ax+b$ نمودار تابع $f(x)=\log_۲^{x+۱}$ را دو نقطه به طول‌های $-\dfrac{۱}{۲}$ و ۳ قطع می‌کند. $(۷a)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۷۰. دو منحنی به معادلات $y=x^۲+۲x-۴a$ و $y=\dfrac{۱}{۲}x^۲+ax$ با کدام طول بر هم مماس هستند؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۴-

۲۷۱. تانژانت زاویه‌ی نمودار تابع $y=xe^x$ با محور xها است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) ۱- ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۱.گزینه ۴

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x)-f(۲)g(۲)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(f\times g)(۲+\Delta x)-(f\times g)(۲)}{\Delta x}=(f\times g)'(۲)$$

حاصل عبارت، تعریف مشتق $f(x)\times g(x)$ در نقطه‌ی $x_۰=۲$ است. یعنی مشتق اولی در دومی به اضافه‌ی مشتق دومی در اولی.

$$y'=(۲x-۱)\sqrt{۲x}+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}(x^۲-x)\Rightarrow y'(۲)=(۲(۲)-۱)\sqrt{۴}+\frac{۲}{۲\sqrt{۴}}(۴-۲)=۶+۱=۷$$

۲.گزینه ۱

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^۲}=۳\Rightarrow\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{(g(۱))^۲}=۳$$

$$\Rightarrow\frac{-۴g(۱)-۰}{(g(۱))^۲}=۳\Rightarrow ۳g(۱)=-۴\Rightarrow g(۱)=-\frac{۴}{۳}$$

۳.گزینه ۳

$$y=\sin^۳\sqrt{x}\to y'=(۳\sin^۲\sqrt{x})(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\cos\sqrt{x})$$

$$\to y'(\frac{\pi^۲}{۹})=(۳\sin^۲\frac{\pi}{۳})(\frac{۱}{\frac{۲\pi}{۳}})(\cos\frac{\pi}{۳})=(۳)(\frac{۳}{۴})(\frac{۳}{۲\pi})(\frac{۱}{۲})=\frac{۲۷}{۱۶\pi}$$

۴.گزینه ۱

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{\sin ۲x}\to\quad \text{مشتق } gof(x)=\frac{۲\cos ۲x}{۲\sqrt{\sin ۲x}}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۱۲}}\frac{\cos\frac{\pi}{۶}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{۶}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}=\sqrt{\frac{۶}{۴}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

۵.گزینه ۲

می‌دانیم که $\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}=f'_-(۲)$ است.

دقت کنید وقتی $x\to ۲^-$ داخل قدر مطلق منفی است پس داریم:

$$f(x)=-x+۲+\sqrt{۲x}\Rightarrow f'(x)=-۱+\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}}\Rightarrow f'_-(۲)=-۱+\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۲}$$

۶.گزینه ۴ ابتدا پیوستگی چپ تابع $f(x)$ را در $x=۳$ بررسی می کنیم. لذا داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}x^۲[x]=\lim_{x\to ۳^-}x^۲\times ۲=۲(۳^۲)=۱۸$$

$$f(۳)=۳^۲[۳]=۳^۲\times ۳=۲۷$$

از آن جا که تابع f در $x=۳$ پیوستگی چپ ندارد لذا مشتق چپ نیز در $x=۳$ ندارد.

۷.گزینه ۱ ابتدا همه‌ی جملات را به یک تساوی می‌آوریم و سپس مشتق گیری ضمنی انجام می‌دهیم .

$$y-\sin\frac{x}{y}-۱=۰$$

$$y'=\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-(\frac{y-۰(x)}{y^۲})\cos\frac{x}{y}}{۱-\left(\frac{۰(y)-۱(x)}{y^۲}\right)\cos\frac{x}{y}}=-\frac{-۱(-۱)}{۱-(-\pi)(-۱)}=-\frac{۱}{۱-\pi}=\frac{۱}{\pi-۱}$$

۸.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y=e^{u}\rightarrow y'=u'e^{u}}$

ابتدا همه‌ی جملات را به یک طرف تساوی می‌آوریم و سپس مشتق‌گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$y^{۲}e^{\sin ۲x}+\sin x-y=۰$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲y^{۲}\cos ۲x e^{\sin ۲x}+\cos x}{۲ye^{\sin ۲x}-۱}\xrightarrow{x=۰\ ,\ y=۱}y'=-\frac{۲+۱}{۲-۱}=-۳$$

۹.گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{y=e^{u}\rightarrow y'=u'e^{u}}$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{y^{۲}+\frac{۱}{۲}ye^{\frac{x}{۲}-۱}}{۲xy+e^{\frac{x}{۲}-۱}}\xrightarrow{x=۲\ ,\ y=\frac{۱}{۲}}y'=-\frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})}{۲+۱}=-\frac{۱}{۶}$$

۱۰.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y=Lnu\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$

آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

$$y'=\frac{\cos x}{۱+\sin x}\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۶})=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۱.گزینه ۲

آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۲۵)-f(۴)}{۲۵-۴}=\frac{۵-۲}{۲۱}=\frac{۱}{۷}\quad \text{و}\quad \text{آهنگ لحظه‌ای}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}$$

$$\frac{۱}{۲\sqrt{a}}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۴۹}\Rightarrow ۴a=۴۹\Rightarrow a=۱۲/۲۵$$

۱۲.گزینه ۴ از آن‌جا که مساحت دایره برابر $S=\pi r^{۲}$ است و آهنگ آنی تغییر S نسبت به شعاع برابر مشتق S نسبت به r است، لذا داریم:

$$S=\pi r^{۲}\ \rightarrow\ \frac{dS}{dr}=۲\pi r\ \xlongequal{r=۱۰}\ ۲۰\pi$$

۱۳.گزینه ۱ همانگونه که می‌دانیم آهنگ آنی تغییر تابع f در نقطه‌ی $t=۴$ برابر با مشتق تابع در این نقطه است. پس داریم:

$$f'(t)=-\frac{۲۴۰}{t^{۲}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{-۲۴۰}{۱۶}=-۱۵$$

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۵)-f(۳)}{۵-۳}=\frac{\frac{۲۴۰}{۵}-\frac{۲۴۰}{۳}}{۲}=\frac{۴۸-۸۰}{۲}=-۱۶$$

پس آهنگ آنی یک واحد از آهنگ متوسط بیشتر است.

۱۴.گزینه ۳ با توجه به این که آهنگ لحظه‌ای تغییر f در $x=۲$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ است، در نتیجه $f'(۲)=-\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

$$\text{پس}:\ \lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$$

$$=-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=-f'(۲)=-(-\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

۱۵.گزینه ۱

$$y'=-\sqrt{۲}\sin\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}\cos\sqrt{۲}x \quad , \quad y''=-۲\cos\sqrt{۲}x-۲\sin\sqrt{۲}x$$

$$\frac{y''}{y}=\frac{-۲\cos\sqrt{۲}x-۲\sin\sqrt{۲}x}{\cos\sqrt{۲}x+\sin\sqrt{۲}x}=\frac{-۲(\cos\sqrt{۲}x+\sin\sqrt{۲}x)}{(\cos\sqrt{۲}x+\sin\sqrt{۲}x)}=-۲$$

۱۶.گزینه ۴

$$۱)\ x=۲\to y=۱\to A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y'=\frac{۱(۲x-۱)-۲(x+۱)}{(۲x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(۲x-۱)^۲}\to m_{\text{مماس}}=\frac{-۳}{۹}=-\frac{۱}{۳}\to m_{\text{قائم}}=۳$$

$$۳)\ y-۱=۳(x-۲)\to y=۳x-۵$$

۱۷.گزینه ۱

$$۱)\ x=-۱\to y=۰\to A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y'=\frac{۱(۲x-۱)-۲(x+۱)}{(۲x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(۲x-۱)^۲}\to m_{\text{مماس}}=\frac{-۳}{۹}=-\frac{۱}{۳}\to m_{\text{قائم}}=۳$$

$$۳)\ y-۰=۳(x+۱)\to y=۳x+۳\to y-۳x=۳$$

۱۸.گزینه ۲ هر خطی موازی محور x است شیب آن صفر است، بنابراین کافی است که از رابطه‌ی داده شده مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم.

$$\sqrt{y}+yx^{\frac{۳}{۲}}-۶x=۰\Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}\cdot y-۶}{\frac{۱}{۲\sqrt{y}}+x^{\frac{۳}{۲}}}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۲}\sqrt{x}y-۶=۰\Rightarrow ۳\sqrt{x}y-۱۲=۰\Rightarrow\sqrt{x}y=۴$$

در منحنی به جای $\sqrt{x}y$ مقدار ۴ را می گذاریم $\Rightarrow\sqrt{y}+۴x-۶x=۰\Rightarrow\sqrt{y}=۲x\xrightarrow{\text{توان ۲}}y=۴x^۲$

از طرفی $\sqrt{x}y=۴\Rightarrow\sqrt{x}(۴x^۲)=۴\Rightarrow x^۲\cdot\sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱$

۱۹.گزینه ۴

چون دو نمودار در یک نقطه متقاطع‌اند، پس مختصات این نقطه‌ی مشترک ($A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$) در هر دو تابع صدق می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=۲x+b}۰=-۲+b\to b=۲$$

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=ax^۲+bx-۳}۰=a+۲(-۱)-۳\to a=۵$$

۲۰.گزینه ۱ کافی‌است نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ را در دو تابع صدق دهیم.

$$A\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{y=2x+b} 0=4+b \Rightarrow b=-4$$

$$A\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{y=2x^2+ax+b} 0=8+2a+b \Rightarrow 0=8+2a-4 \Rightarrow a=-2$$

۲۱.گزینه ۲ با توجه به این که خط $y=-1$ بر نمودار تابع $f(x)$ مماس است، لذا معادله‌ی تلاقی خط و تابع درجه‌ی دوم، ریشه‌ی مضاعف دارد.

معادله‌ی تلاقی : $2x^2-x+a=-1 \Rightarrow \boxed{2x^2-x+(a+1)=0}$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=0 \xrightarrow{b^2-4ac=0} (-1)^2-4(2)(a+1)=0 \Rightarrow 1-8a-8=0 \Rightarrow a=-\frac{7}{8}$

۲۲.گزینه ۳ برای پیدا کردن محل تقاطع دو تابع، کافی است که دو تابع را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} y=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x} \\ y=3^x+\frac{8}{3}\end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}=3^x+\frac{8}{3} \to (\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3})^{2x}=3^x+\frac{8}{3} \to (3^{-\frac{1}{2}})^{2x}=3^x+\frac{8}{3}$$

$$\to 3^{-x}=3^x+\frac{8}{3} \to 3^x-\frac{1}{3^x}+\frac{8}{3}=0 \xrightarrow{3^x=A} A-\frac{1}{A}+\frac{8}{3}=0$$

$$\xrightarrow{\times 3A} 3A^2-3+8A=0 \to 3A^2+8A-3=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \Delta=64+36=100$$

$$\to \begin{cases} A=\frac{-8+10}{6}=\frac{1}{3} \to 3^x=\frac{1}{3}=3^{-1} \to x=-1 \xrightarrow{y=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}} y=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{-2}=(\frac{3}{\sqrt{3}})^2=\frac{9}{3}=3 \\ A=\frac{-8-10}{6}=-3 \to 3^x=-3 : \text{امکان ندارد}\end{cases}$$

نقطه‌ی تلاقی این دو تابع $A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

$$A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right. \quad , \quad B\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \to AB=|3-1|=2$$

۲۳.گزینه ۴

منحنی داده شده و خط $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را تلاقی می‌دهیم.

معادله‌ی تلاقی : $\begin{cases} ay=x^2+5x+4 \\ y=x\end{cases} \to ax=x^2+5x+4 \to \boxed{x^2+(5-a)x+4=0}$

شرط ریشه‌ی مضاعف :$\Delta=0 \xrightarrow{b^2-4ac=0} (5-a)^2-16=0 \Rightarrow a-5=\pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ a=1\end{cases}$

$$a=9 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2-4x+4=0 \to (x-2)^2=0 \to x=2 \ \checkmark$$

$$a=1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2+4x+4=0 \to (x+2)^2=0 \to x=-2 \ \times$$

دقت کنید در ناحیه‌ی اول، x مثبت است.

۲۴.گزینه ۱

می دانیم: $\boxed{y=f(u) \to y'=u'f'(u)}$

$$y=f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right) \Rightarrow y'=\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f'(\sqrt[3]{6x+2}) \xrightarrow{x=1} y'=\frac{6}{12}f'(2)=-2 \Rightarrow f'(2)=-4$$

شیب خط قائم، عکس و قرینه‌ی شیب خط مماس است. بنابراین $m_{\text{قائم}}=\frac{1}{4}$ است.

۲۵.گزینه ۴ ابتدا شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه به طول α محاسبه می کنیم:

$$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow m=f'(\alpha)=\frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

با توجه به این که این خط از نقطه‌ی $\left(\alpha\ ,\ \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ می‌گذرد، معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(x-\alpha)$$

نقطه‌ی $(-1,0)$ روی خط فوق است؛ بنابراین با قرار دادن مختصات نقطه‌ی $(-1,0)$ به جای x و y در معادله‌ی این خط داریم:

$$0-\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1-\alpha)\Rightarrow 2\alpha-1=3\Rightarrow\alpha=2$$

۲۶. گزینه ۲ در نقطه‌ی تلاقی با محور طول، $y=0$ است.

$$1)\ y=0\to 0=\frac{2x-1}{x+1}\to x=\frac{1}{2}\to A\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ 0\end{array}\right.$$

$$2)\ y=\frac{2x-1}{x+1}\to y'=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} m_{\text{مماس}}=\frac{3}{\frac{9}{4}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\to m_{\text{قائم}}=\frac{-3}{4}$$

$$3)\ y-0=-\frac{3}{4}(x-\frac{1}{2})\xrightarrow{x=0}y=-\frac{3}{4}(-\frac{1}{2})=\frac{3}{8}$$

۲۷. گزینه ۱ فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدأ مختصات از رابطه‌ی $\sqrt{x^2+y^2}$ به‌دست می‌آید و می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای همان مشتق است.

$$T=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{x+8})^2}=\sqrt{x^2+x+8}\to T'_x=\frac{1(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+8}}\overset{x=7}{=\!=}\frac{15}{2\sqrt{64}}=\frac{15}{16}$$

۲۸. گزینه ۳

$$\text{شرط پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-\frac{1}{x})=1-1=0\\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+ax+b)=1+a+b\\ f(1)=1-1=0\end{cases}\Rightarrow 1+a+b=0$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست وچپ}: f'_+(1)=f'_-(1)\to 1+\frac{1}{x^2}=2x+a\to 1+1=2+a\to a=0\ ,\ b=-1$$

پس $f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x} & x\geq 1\\ x^2-1 & x<1\end{cases}$ می‌باشد.

$$f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2-1=1+2-2\sqrt{2}-1=2-2\sqrt{2}$$

۲۹. گزینه ۱ چون تابع در $x=1$ مشتق پذیر است لذا تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)\overset{\text{ضابطه‌ی بالا}}{=\!=\!=}0\Rightarrow f(1)=a=0$$

۳۰.گزینه ۲

شرط مشتق پذیری تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی :}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} ۲\sqrt{۴x-۳}=۲\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^۳+bx)=a+b\Rightarrow a+b=۲ \quad (I)\\ f(۱)=۲\end{cases}$$

تساوی مشتق‌های راست وچپ: $f'_+(۱)=f'_-(۱)\to ۲\times\dfrac{۴}{۲\sqrt{۴x-۳}}=۳ax^۲+b\to ۴=۳a+b \quad (II)$

از I و II جواب $a=۱$ و $b=۱$ بدست می‌آید.

۳۱.گزینه ۲

$$f'(x)=\begin{cases}۱-\cos x & x\geq ۰\\ n\,ax^{n-۱} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\sin x & x\geq ۰\\ n(n-۱)ax^{n-۲} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'''(x)$$
$$=\begin{cases}\cos x & x>۰\\ n(n-۱)(n-۲)ax^{n-۳} & x<۰\end{cases}$$

برای اینکه مشتق سوم در $x=۰$ وجود داشته باشد باید در $f''(x)$، ضابطه‌ی پایین فاقد متغیر x باشد یعنی توان x باید صفر شود. در این صورت $n-۳=۰\to n=۳$ است.

$$f'''_+(۰)=f'''_-(۰)\Rightarrow ۱=n(n-۱)(n-۲)a\Rightarrow ۳(۳-۱)\cdot(۳-۲)\cdot a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۶}$$

۳۲.گزینه ۱ با توجه به تابع ضمنی $y^۳+۳xy^۲-۳x^۳y-۱=۰$. مقدار y' در نقطه‌ی $(۱,۱)$ برابر است با:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۳y^۲-۹x^۲y}{۳y^۲+۶xy-۳x^۲}\underset{(۱,۱)}{=}-\frac{۳-۹}{۳+۶-۳}=۱=m_{\text{مماس}}$$

در نتیجه خط مماس در نقطه‌ی $(۱,۱)$ با شیب ۱، خط $y=x$ است که از نواحی اول و سوم می گذرد.

۳۳.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=\frac{f(۴)+۷}{۰}\xrightarrow[\text{کسر}\frac{۰}{۰}\text{بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است}]{\text{چون جواب حد، عدد شده است پس این}} f(۴)+۷=۰\to f(۴)=-۷$$

$$\text{پس :}\ \lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{f'(x)}{۱}=f'(۴)=-\frac{۳}{۲}$$

اکنون مشتق $y=\dfrac{f(۲x)}{x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{f(۲x)}{x}\to y'=\frac{۲f'(۲x)\cdot x-۱f(۲x)}{x^۲}\to y'(۲)=\frac{۴f'(۴)-f(۴)}{۴}=\frac{۴(-\frac{۳}{۲})-(-۷)}{۴}=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۳۴.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)}$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{f(-۲)+۳}{۰}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس این کسر $\frac{۰}{۰}$ بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است.

$f(-۲)+۳=۰ \to f(-۲)=-۳$

پس : $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۲+h)+۳}{h}=\dfrac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f'(-۲+h)}{۱}=f'(-۲)=\dfrac{۱}{۲}$

$y=x^۲\cdot f(x)\to y'=۲x\cdot f(x)+x^۲\cdot f'(x)\to y'(-۲)=(-۴)f(-۲)+۴f'(-۲)$

$\to y'(-۲)=(-۴)(-۳)+۴(\dfrac{۱}{۲})=۱۲+۲=۱۴$

۳۵.گزینه ۴ با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی شیب خط مماس را پیدا می‌کنیم البته قبل از مشتق‌گیری، تمام جملات را به یک طرف تساوی می‌آوریم.

$x^۳+y^۳-۳xy-۳=۰\to y'=-\dfrac{f'_x}{f'_y}=-\dfrac{۳x^۲-۳y}{۳y^۲-۳}\xrightarrow{x=۱,y=۲}m_{\text{مماس}}=-\dfrac{۳-۶}{۱۲-۳}=-\dfrac{-۳}{۹}=\dfrac{۱}{۳}$

$\to m_{\text{قائم}}=-۳$

معادله‌ی خط قائم : $y-۲=-۳(x-۱)\xrightarrow{x=۰}y-۲=-۳(-۱)\to y=۳+۲=۵$

۳۶.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y=e^u\to y'=u'e^u}$

$y'=-\dfrac{f'_x}{f'_y}=-\dfrac{e^{x+y}+۱}{e^{x+y}+۱}\xrightarrow{x=۰\ ,\ y=۰}m_{\text{مماس}}=-\dfrac{e^۰+۱}{e^۰+۱}=-۱$

معادله‌ی خط مماس : $y-۰=-۱(x-۰)\to y=-x$

۳۷.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{y=Lnu\to y'=\dfrac{u'}{u}}$

با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی، شیب خط مماس را پیدا می‌کنیم.

$y'=-\dfrac{f'_x}{f'_y}=-\dfrac{۲xy-\dfrac{۲}{۲x-y}}{x^۲-\dfrac{-۱}{۲x-y}}\xrightarrow{x=۲\ ,\ y=۳}m_{\text{مماس}}=-\dfrac{۱۲-۲}{۴+۱}=-۲\to m_{\text{قائم}}=\dfrac{۱}{۲}$

معادله‌ی خط قائم : $y-۳=\dfrac{۱}{۲}(x-۲)\xrightarrow{y=۰}-۳=\dfrac{۱}{۲}(x-۲)\to x-۲=-۶\to x=-۴$

۳۸.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{(uv)'=u'v+v'u}$

$\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{f(-۱+\Delta x)-f(-۱)}{\Delta x}=f'(-۱)$

کافی است که از تابع داده شده، مشتق بگیریم و سپس $x=-۱$ را جایگزین کنیم.

$f(x)=(x-۲)\cdot\sqrt[۳]{x^۲}\to f'(x)=\sqrt[۳]{x^۲}+\dfrac{۲(۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}(x-۲)$

$\to f'(-۱)=۱+\dfrac{-۶}{۳(-۱)}=۱+۲=۳$

۳۹.گزینه ۴ یعنی اگر خط و منحنی را تلاقی دهیم معادله‌ی تلاقی نباید ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

$\begin{cases}y=-x^۲+۲x\\y=mx+۴\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}-x^۲+۲x=mx+۴\Rightarrow\boxed{x^۲+(m-۲)x+۴=۰}$: معادله‌ی تلاقی

برای اینکه معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta<۰$ باشد.

$\Delta<۰\Rightarrow b^۲-۴ac<۰$

$\Rightarrow(m-۲)^۲-۱۶<۰\Rightarrow(m-۲)^۲<۱۶\Rightarrow-۴<m-۲<۴\Rightarrow-۲<m<۶$

۴۰.گزینه ۳ دامنه‌ی هر دو تابع f و g برابر با $x>۰$ است. حال دو تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\log_{۲}^{\frac{۱}{x}}=\log_{۲}^{x^{-۱}}=-\log_{۲}^{x} \\ g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}=\log_{۲^{-۱}}^{x}=-\log_{۲}^{x} \end{array}\right. \to f(x)=g(x)$$

چون ضابطه و دامنه‌ی توابع f و g یکسان هستند، در نتیجه نمودار این دو تابع، منطبق بر هم می‌باشند.

۴۱.گزینه ۳

$$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow\frac{۲+h+\frac{۱}{۲+h}-۲-\frac{۱}{۲}}{h}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow ۸h=۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲}$$

$$h=\frac{۹}{۲}-\frac{۹}{۲+h}\Rightarrow h=\frac{۱۸+۹h-۱۸}{۲(۲+h)}\Rightarrow ۱=\frac{۹}{۲(۲+h)}\Rightarrow ۴+۲h=۹\Rightarrow h=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۴۲.گزینه ۳ چون نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y+۲x=b$ در نقطه‌ای به طول یک روی محور xها متقاطع هستند پس نقطه‌ی $\left|\begin{array}{l}۱\\ ۰\end{array}\right.$ در ضابطه‌ی تابع و خط صدق می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^{۳}+ax+b\xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}۱\\ ۰\end{smallmatrix}\right.} ۰=۱+a+b \\ y+۲x=b\xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}۱\\ ۰\end{smallmatrix}\right.} ۰+۲=b \end{array}\right\}\to b=۲\ ,\ a=-۳$$

برای پیدا کردن طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر منحنی و خط، باید آنها را تلاقی دهیم.

$$x^{۳}+ax+b=b-۲x\xrightarrow{a=-۳\ ,\ b=۲}x^{۳}-۳x+۲=۲-۲x$$

$$\to x^{۳}-x=۰\to x(x^{۲}-۱)=۰\to\begin{cases}x=۰\\ x=۱\\ x=-۱\end{cases}$$

۴۳.گزینه ۴

$$y=\tan^{۳}x-\cot ۲x\Rightarrow y'=۳\tan^{۲}x(۱+\tan^{۲}x)+۲(۱+\cot^{۲}۲x)$$

$$\to y'(\frac{\pi}{۶})=۳(\frac{۱}{۳})(\frac{۴}{۳})+۲(\frac{۴}{۳})=\frac{۴}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

توجه کنید که $\tan\frac{\pi}{۶}=\cot\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است.

۴۴.گزینه ۲

$$\frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۴۵.گزینه ۴

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=\text{مشتق}=۶x+۴\xrightarrow{x=a+\frac{h}{۲}}۶(a+\frac{h}{۲})+۴=۶a+۳h+۴$$

$$a+h \text{ تا } a \text{ آهنگ متوسط از}=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{۳(a+h)^{۲}+۴(a+h)-۲-۳a^{۲}+۴a-۲}{h}$$

$$=\frac{۶ah+۳h^{۲}+۴h}{h}=۶a+۳h+۴$$

واضح است تفاضل این دو مقدار برابر صفر است.

روش دوم: در تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ آهنگ متوسط در هر بازه با مشتق تابع در وسط آن بازه برابر است. در تابع درجه‌ی دوم داده شده آهنگ متوسط در بازه‌ی $[a\ ,\ a+h]$ با آهنگ لحظه‌ای در وسط این بازه $\frac{a+a+h}{۲}\ (a+\frac{h}{۲})$ برابر است و تفاضل آن‌ها صفر است.

۴۶. گزینه ۴ هرگاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند آنگاه $\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$ است.

$$\left.\begin{array}{l} f(۱)=g(۱)\rightarrow ۲-۵=a+b+۱\rightarrow a+b=-۴ \\ f'(۱)=g'(۱)\rightarrow ۲=۲ax+b\rightarrow ۲a+b=۲ \end{array}\right. \rightarrow a=۶\ ,\ b=-۱۰$$

۴۷. گزینه ۱

$$f(x)=\sqrt{۲\sin \pi x^{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲\times ۲\pi x\times \cos(\pi x^{۲})}{۲\sqrt{۲\sin \pi x^{۲}}}\Rightarrow f'(\frac{۱}{\sqrt{۶}})=\frac{(۲\pi)(\frac{۱}{\sqrt{۶}})(\cos\frac{\pi}{۶})}{\sqrt{۲\sin\frac{\pi}{۶}}}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۱}{\sqrt{۶}})=(۲\pi)(\frac{۱}{\sqrt{۶}})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۸. گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(uv)'=u'v+v'u}$

$$y=\sin x\cdot\cos ۳x\Rightarrow y'=\cos x\cdot\cos ۳x-۳\sin ۳x\cdot\sin x$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۴})=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})-۳(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=-۲$$

دقت کنید $\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \sin\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌باشد.

۴۹. گزینه ۱

$$f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{\pi}\sqrt{۳+۲\cos\frac{\pi}{x}}\rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{۳}}{\pi}\times\frac{-(\frac{-۲\pi}{x^{۲}})\sin\frac{\pi}{x}}{۲\sqrt{۳+۲\cos\frac{\pi}{x}}}$$

$$\rightarrow f'(۳)=\frac{\sqrt{۳}}{\pi}\times\frac{-(\frac{-۲\pi}{۹})\sin\frac{\pi}{۳}}{۲\sqrt{۳+۲\cos\frac{\pi}{۳}}}=\frac{\sqrt{۳}}{\pi}\times\frac{\frac{۲\pi}{۹}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۳+۱}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۵۰. گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۲/۵۶)-f(۲/۲۵)}{۲/۵۶-۲/۲۵}=\frac{\sqrt{۲/۵۶}-\sqrt{۲/۲۵}}{۲/۵۶-۲/۲۵}=\frac{۱/۶-۱/۵}{۰/۳۱}=\frac{۰/۱}{۰/۳۱}=\frac{۱۰}{۳۱}$$

$$\text{آهنگ آنی (لحظه‌ای)}=f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۲/۲۵)=\frac{۱}{۲\times ۱/۵}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}-\frac{۱۰}{۳۱}=\frac{۱}{۹۳}$$

.۵۱ گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰} = \frac{۵-۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱۶}} \Rightarrow f'(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین تفاضل آهنگ متوسط و لحظه‌ای، برابر صفر است.

.۵۲ گزینه ۴

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } x \text{ تا } x+\Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \xlongequal[\Delta x=۰/۱]{x=۳} \frac{f(۳/۱)-f(۳)}{۰/۱}$$

$$= \frac{(۳/۱)^۳-۳^۳}{۰/۱} = \frac{۲۹/۷۹۱-۲۷}{۰/۱} = ۲۷/۹۱$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x=۳ = f'(۳) = ۳x^۲ \xlongequal{x=۳} ۲۷$$

بنابراین تفاضل آنها می‌شود $۲۷/۹۱-۲۷=۰/۹۱$ است.

.۵۳ گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۲/۰۲)-f(۲)}{۲/۰۲-۲} = \frac{\frac{۲/۰۲}{۲/۰۲-۱}-۲}{۰/۰۲} = \frac{\frac{۲/۰۲}{۱/۰۲}-۲}{۰/۰۲} = \frac{\frac{-۲}{۱۰۲}}{\frac{۲}{۱۰۰}} = -\frac{۵۰}{۵۱}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x=۲ = f'(۲) = \frac{x-۱-x}{(x-۱)۲} = -۱$$

$$\text{پس}: -\frac{۵۰}{۵۱}-(-۱) = -\frac{۵۰}{۵۱}+۱ = \frac{۱}{۵۱}$$

.۵۴ گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha) = \frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}}$

$$y = \frac{۱-\tan ۲x}{۱+\tan ۲x} = \tan(\frac{\pi}{۴}-۲x)$$

$$y'(\frac{\pi}{۸}) = -۲(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۴}-۲x)) = -۲(۱+\tan^۲ ۰) = -۲$$

.۵۵ گزینه ۴

اگر کسر را تفکیک کنیم مشتق گیری آسان تر می‌شود.

$$y = \frac{۱}{\cos ۲x}+۱ \Rightarrow y' = \frac{۰-(-۲\sin ۲x)}{\cos^۲ ۲x} = \frac{۲\sin ۲x}{\cos^۲ ۲x}$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{۲\sin\frac{\pi}{۶}}{\cos^۲\frac{\pi}{۶}} = \frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴}{۳}$$

۵۶.گزینه ۱

مشتق‌گیری زنجیری می‌باشد. از y نسبت به u و از u نسبت به x مشتق گرفته و در هم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

توجه کنید: $x=\frac{1}{4}\to u=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$$=(2\tan\pi u)(\pi)(1+\tan^2\pi u)(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})\overset{x=\frac{1}{4}}{=\!=\!=}(2)(-1)(\pi)(2)(1+1)=-8\pi$$

دقت کنید $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ است.

۵۷.گزینه ۴

هرگاه y برحسب u و خود u برحسب x باشد برای مشتق‌گیری از y نسبت به x، از y نسبت به u و از u نسبت به x مشتق گرفته و در هم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\frac{1}{\sqrt{2u}}+\frac{1}{u^2})(2\sin x\cos x+2\sin 2x)$$

دقت کنید وقتی $x=\frac{\pi}{4}$ است، $u=\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

پس: $\frac{dy}{dx}=(\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{4}})\left(2(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})+2(1)\right)=(1+4)(1+2)=15$

۵۸.گزینه ۴

آهنگ متوسط $=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{4-9}{1}=-5$

آهنگ لحظه‌ای $=f'(x)=\frac{-72x}{x^4}=\frac{-72}{x^3}\overset{x=\sqrt[3]{12}}{=\!=\!=}\frac{-72}{12}=-6$

پس آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ آنی بیشتر است.

۵۹.گزینه ۲

$$f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{آهنگ متوسط از ۴ تا ۱۲}=\dfrac{f(12)-f(4)}{12-4}=\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=\dfrac{\frac{-2}{15}}{\frac{8}{1}}=-\dfrac{1}{60}\\[2ex] \text{مشتق=آهنگ لحظه‌ای}=\dfrac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1}\overset{x=4}{=\!=\!=}\dfrac{-\frac{2}{6}}{9}=-\dfrac{1}{27}\end{array}\right\}\Rightarrow-\frac{1}{60}-(-\frac{1}{27})=\frac{11}{540}$$

۶۰.گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(۵)-f(۲)}{۵-۲} = \frac{\frac{۵}{۴}-۲}{۳} = \frac{۵-۸}{۱۲} = \frac{-۳}{۱۲} = \frac{-۱}{۴}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-۱-x}{(x-۱)^۲} = \frac{-۱}{(x-۱)^۲} \xrightarrow[\text{در } x=\alpha]{\text{آهنگ لحظه‌ای}} f'(\alpha) = \frac{-۱}{(\alpha-۱)^۲}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای} = \text{آهنگ متوسط} \Rightarrow \frac{-۱}{۴} = \frac{-۱}{(\alpha-۱)^۲} \Rightarrow (\alpha-۱)^۲ = ۴$$

$$\alpha-۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲+۱ = ۳ \\ \alpha = -۲+۱ = -۱ \end{cases}$$

۶۱.گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۶/۲۵)-f(۴)}{۶/۲۵-۴} = \frac{\sqrt{۶/۲۵}-\sqrt{۴}}{۲/۲۵} = \frac{۲/۵-۲}{۲/۲۵} = \frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}} = \frac{۲}{۹}$$

$$\text{مشتق} = \text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \overset{x=۴}{=\!=} \frac{۱}{۴}$$

پس تفاضل آنها $\frac{۱}{۳۶} = \frac{۲}{۹} - \frac{۱}{۴}$ می‌شود.

۶۲.گزینه ۲

$$۱)\ x=۱ \to y = \sqrt{۴} = ۲ \to A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y' = \frac{۱(۲x+۳)}{۲\sqrt{x^۲+۳x}} \to m_{\text{مماس}} = \frac{۵}{۴}$$

$$۳)\ y-۲ = \frac{۵}{۴}(x-۱) \xrightarrow{x=۰} y-۲ = -\frac{۵}{۴} \to y = \frac{۳}{۴}$$

۶۳.گزینه ۱

$$۱)x = \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{\text{تابع}} y = \frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲}) - \frac{۱}{۲} = -\frac{۳}{۴} \to A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۳}\\-\frac{۳}{۴}\end{matrix}\right.$$

$$۲)y' = -\sin ۲x + \sin x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -\sin\frac{۲\pi}{۳} + \sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰$$

$$۳)y + \frac{۳}{۴} = ۰(x - \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}$$

۶۴. گزینه ۴

$$1)\ x=\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\text{تابع}} y=1+0=1 \ \to\ A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\ 1\end{matrix}\right.$$

$$2)\ y=\tan^2 x+\cos 2x \Rightarrow y'=2\tan x(1+\tan^2 x)-2\sin\ 2x \Rightarrow m_{\text{مماس}}=2(1)(2)-2(1)=2$$

$$3)\ y-1=2(x-\frac{\pi}{4})\Rightarrow y-2x=1-\frac{\pi}{2}$$

۶۵. گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول $x=1$ را نوشته و سپس معادله‌ی تلاقی این خط و منحنی را تشکیل داده و حل می‌کنیم.

$$1)\ x=1\xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \ \to\ A\left|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right.$$

$$2)\ y'=3x^2-2x\to m_{\text{مماس}}=3-2=1$$

$$3)\ y-0=1(x-1)\to y=x-1$$

$$\begin{cases} y=x^3-x^2\\ y=x-1\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}} x^3-x^2=x-1\Rightarrow x^3-x^2-x+1=0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0\Rightarrow (x-1)(x^2-1)=0 \ \to\ \begin{cases} x=1\\ x=-1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=-1-1=-2\end{cases}$$

۶۶. گزینه ۳

روش اول: می‌دانیم: $\boxed{\sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u}$

$$y=2\sin^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\Rightarrow y'=(4\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}))(-\frac{1}{4})(\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}))$$

$$\Rightarrow y'=-\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\cdot\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} y'=-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\Rightarrow y'-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=$$
$$-\frac{1}{4}$$

روش دوم: می‌دانیم $\boxed{1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha}$

$$y=2\sin^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\Rightarrow y=1-\cos 2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\to y=1-\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})$$

$$y'=-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} y'=-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{4}$$

۶۷. گزینه ۴

$$y = \frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{-\sin^2 x + 2}$$

شکل کلی تابع فوق به صورت $y = \dfrac{au+b}{cu+d}$ است که در آن $u = \sin^2 x$ است. پس داریم:

$$y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \times u' \to y' = \frac{2-0}{(-\sin^2 x+2)^2}\underbrace{(2\sin x\cos x)}_{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2\sin 2x}{(-\sin^2 x+2)^2}$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{(-\sin^2\frac{\pi}{4}+2)^2} = \frac{2(1)}{(\frac{3}{2})^2} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9}$$

۶۸. گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\sin u\cos u = \frac{1}{2}\sin 2u}$

$$y = \cos^2\frac{\pi}{3x} \to y' = (2\cos\frac{\pi}{3x})(\frac{-3\pi}{9x^2})(-\sin\frac{\pi}{3x})$$

$$\to y'(4) = (2\cos\frac{\pi}{12})(\frac{\pi}{48})(\sin\frac{\pi}{12})$$

$$\to y'(4) = \frac{\pi}{24}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}) = \frac{\pi}{24}(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6})$$

$$\to y'(4) = \frac{\pi}{24}(\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{96}$$

۶۹. گزینه ۳

$$y = \sin^3\sqrt{2x} \to y' = (3\sin^2\sqrt{2x})(\frac{1(2)}{2\sqrt{2x}})(\cos\sqrt{2x})$$

$$\to y'(\frac{\pi^2}{18}) = (3\sin^2\frac{\pi}{3})(\frac{1}{\frac{\pi}{3}})(\cos\frac{\pi}{3}) \to y'(\frac{\pi^2}{18}) = (3)(\frac{3}{4})(\frac{3}{\pi})(\frac{1}{2}) = \frac{27}{8\pi}$$

۷۰. گزینه ۲

$$y = 2\cos^2(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}) \to y' = 2\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4})(\frac{1}{4})(-\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}))$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4})\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}) \xlongequal{\sin u\cos u = \frac{1}{2}\sin 2u} -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{2x}{4}))$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{x}{2}) \to y'(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{4}\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{4}(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$$

توجه کنید که $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ است.

۷۱.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$$y=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}}=\left|\underbrace{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}}_{+}\right|=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}$$

دقت کنید که به ازای $x=\frac{3}{\pi}$ داخل قدر مطلق، مثبت است.

$$y'=\frac{0-(\frac{-1}{x^2})(-\sin\frac{1}{x})}{(\cos\frac{1}{x})^2}\Rightarrow y'(\frac{3}{\pi})=\frac{-(\frac{\pi^2}{9})(\sin\frac{\pi}{3})}{(\cos\frac{\pi}{3})^2}=\frac{-(\frac{\pi^2}{9})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4}}=\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

۷۲.گزینه ۱ وقتی x اولیه ، یک می‌باشد و نمو متغیر ۰٫۲۱ است پس x ثانویه ۱٫۲۱ است.

$$[1,1/21]\ \text{آهنگ متوسط}=\frac{f(1/21)-f(1)}{1/21-1}=\frac{\sqrt{1/21}-\sqrt{1}}{0/21}=\frac{1/1-1}{0/21}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{21}{100}}=\frac{10}{21}$$

$$x=1\ \text{آهنگ لحظه‌ای در}=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

بنابراین تفاضل آنها $\frac{1}{42}=\frac{10}{21}-\frac{1}{2}$ است.

۷۳.گزینه ۴ وقتی x اولیه، یک می‌شود و نمو متغیر ۰٫۴۴ است پس x ثانویه ۱٫۴۴ است.

$$[1,1/44]\ \text{آهنگ متوسط در}=\frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1}=\frac{\frac{1/44-1}{\sqrt{1/44}}-0}{0/44}=\frac{\frac{0/44}{1/2}}{0/44}=\frac{0/44}{0/528}=\frac{440}{528}=\frac{5}{6}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(x)=\frac{1(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x}\ \rightarrow\ f'(1)=1$$

بنابراین تفاضل آن‌دو $\frac{1}{6}=\frac{5}{6}-1$ می‌شود.

۷۴.گزینه ۴

$$1)\ x=1\rightarrow y=2\ \rightarrow\ A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$$

$$2)y=\frac{1}{\sqrt{x}}+x\rightarrow y'=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}+1\rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}\rightarrow m_{\text{قائم}}=-2$$

$$3)\ y-2=-2\,(x-1)\Rightarrow y=-2x+4\Rightarrow y+2x=4$$

۷۵.گزینه ۱

مشخص است که $f'(۲)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای x آن عدد ۲ را قرار دهیم.

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳\to f'(x)=۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲\left(\frac{\frac{۱(۲x-۳)-۲(x+۲)}{(۲x-۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}}\right)$$

$$=\frac{۳}{۲}\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)\left(\frac{-۷}{(۲x-۳)^۲}\right)\to f'(۲)=\frac{۳}{۲}(۲)(-۷)=-۲۱$$

۷۶.گزینه ۱

مشخص است که $f'(۱)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ می‌باشد، بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و به جای x آن عدد یک را قرار دهیم.

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\to f'(x)=\frac{\frac{۴(x+۳)-۱(۴x+۵)}{(x+۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\to f'(۱)=\frac{\frac{۷}{۱۶}}{۲(\frac{۳}{۲})}=\frac{۷}{۴۸}$$

۷۷.گزینه ۳ روش اول:

می‌دانیم: $\boxed{\sin u\cos u=\frac{۱}{۲}\sin ۲u}$

$$y=۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\to y'=(۴\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴}))(\frac{-۱}{۴})(-\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴}))$$

$$\to y'=\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\to y'=\frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})=\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})$$

$$\to y'(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

روش دوم:

می‌دانیم: $\boxed{y=\cos^۲u\to y'=-u'\sin ۲u}$

$$y=۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\to y'=-(۲)(\frac{-۱}{۴})\sin ۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})\to y'=\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})$$

$$\to y'(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۷۸.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\sin^۴a+\cos^۴a=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲a\quad,\quad \sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a}$

$$y=\sin^۴x+\cos^۴x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x\to y'=-(\frac{۱}{۲})(۲\sin ۲x)(\cos ۲x)(۲)$$

$$\to y'=-۲\underbrace{\sin ۲x\cos ۲x}_{\frac{۱}{۲}\sin ۴x}=-\sin ۴x\to y'(\frac{\pi}{۸})=-\sin\frac{\pi}{۲}=-۱$$

۷۹.گزینه ۱ روش اول:

$$y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\to y'=\frac{(-\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)-(-\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^۲}$$

$$\to y'(\frac{\pi}{۴})=\frac{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})-(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}$$

$$=\frac{(-\sqrt{۲})(\sqrt{۲})-۰}{(\sqrt{۲})^۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

روش دوم:

می‌دانیم: $\boxed{\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\tan(\frac{\pi}{۴}-x)}$

تمام جملات را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم.

$$y=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\tan(\frac{\pi}{۴}-x)\to y'=(-۱)(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۴}-x))\to y'(\frac{\pi}{۴})=(-۱)(۱+۰)=-۱$$

۸۰. گزینه ۴

$$y=\tan^۳ ۲x\to y'=(۳\tan^۲ ۲x)(۲)(۱+\tan^۲ ۲x)=۶\tan^۲ ۲x(۱+\tan^۲ ۲x)$$

$$\to y'(\frac{\pi}{۶})=۶\tan^۲\frac{\pi}{۳}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۳})=۶(\sqrt{۳})^۲(۱+(\sqrt{۳})^۲)=۶(۳)(۴)=۷۲$$

۸۱. گزینه ۱ کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه‌ی اول $(y=x)$ تلاقی دهیم و معادله‌ی تلاقی باید ریشه ی مضاعف داشته باشد.

معادله‌ی تلاقی

$$\begin{cases}y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶\\ y=x\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}۲x^۲+(m+۱)x+m+۶=x\Rightarrow\boxed{۲x^۲+mx+m+۶=۰}:$$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=۰\to b^۲-۴ac=۰\to m^۲-۴(۲)(m+۶)=۰\to m^۲-۸m-۴۸=۰$

$\to(m-۱۲)(m+۴)=۰\to m=۱۲,-۴$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، طول نقطه‌ی تماس مثبت است (در ناحیه‌ی اول x مثبت است).

$m=۱۲\to ۲x^۲+۱۲x+۱۸=۰\to x^۲+۶x+۹=۰\to(x+۳)^۲=۰\to x=-۳$ غ ق ق

$m=-۴\to ۲x^۲-۴x+۲=۰\to x^۲-۲x+۱=۰\to(x-۱)^۲=۰\to x=۱$ ق ق

۸۲. گزینه ۴ باید دو منحنی داده شده را با هم تلاقی دهیم و نقطه‌ی تلاقی را بدست آوریم.

$$۲^x=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴\to ۲^x=(۲^{\frac{۱}{۲}})^{x+۱}+۴\to ۲^x=(۲^{x+۱})^{\frac{۱}{۲}}+۴$$

$$\to ۲^x=(۲^x\times ۲)^{\frac{۱}{۲}}+۴\xrightarrow{۲^x=A}A=\sqrt{۲A}+۴\to A-۴=\sqrt{۲A}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}A^۲-۸A+۱۶=۲A\to A^۲-۱۰A+۱۶=۰\to(A-۸)(A-۲)=۰$$

$$\to\begin{cases}A=۸\to ۲^x=۸\to x=۳\xrightarrow{y=۲^x}y=۸\\ A=۲\quad \text{غ ق ق}\quad \text{(در معادله‌ی رادیکالی صدق نمی‌کند)}\end{cases}$$

حال باید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}۰\\۴\end{vmatrix}$ را از $B\begin{vmatrix}۳\\۸\end{vmatrix}$ حساب کنیم.

$$AB=\sqrt{(۰-۳)^۲+(۴-۸)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۸۳.گزینه ۲

شرط مشتق‌پذیری تابع f در $x=a$ آن است که تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(a-a)=0\end{array}\right\}\to \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0\Rightarrow$$

f در $x=1$ پیوسته است.

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^+)=(x^2-x)'=2x-1=1\\ f'(1^-)=a\end{array}\right\}\Rightarrow a=1$$

۸۴.گزینه ۲ چون خط بر نمودار توابع مماس است پس معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد.

معادله‌ی تلاقی : $-x^2+bx+3=7\to \boxed{x^2-bx+4=0}$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=0\to b^2-4ac=0\to b^2-16=0\to b=\pm 4$

نقطه‌ی تماس $b=4\xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2-4x+4=0\to (x-2)^2=0\to x=2\ \to\ A\left|\begin{array}{l}2\\7\end{array}\right.$

نقطه‌ی تماس $b=-4\xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2+4x+4=0\to (x+2)^2=0\to x=-2\ \to\ A'\left|\begin{array}{l}-2\\7\end{array}\right.$

پس : $AA'=\sqrt{(2+2)^2+(7-7)^2}=4$

۸۵.گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{Lna^n=nLna}$

$$y=Lne^{\sqrt{\sin x}}\Rightarrow y=\sqrt{\sin x}Lne\Rightarrow y=\sqrt{\sin x}\Rightarrow y'=\frac{1(\cos x)}{2\sqrt{\sin x}}\Rightarrow y'(\frac{\pi}{6})=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

۸۶.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=uv\to y'=u'v+v'u}$

وقتی $x\to 1^+$ عبارت داخل قدرمطلق $\sin\pi^+$ می‌شود و چون سینوس در ناحیه‌ی سوم منفی است پس داخل قدرمطلق منفی است.

$$f(x)=-x\sin\pi x\Rightarrow f'(x)=-\sin\pi x-\pi x\cos\pi x\Rightarrow f'(1^+)=0-\pi(-1)=\pi$$

۸۷.گزینه ۳

باید مشتق گیری ضمنی انجام دهیم.

$$\frac{\sqrt{y}}{x}+y\sqrt{x}=6$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{0(x)-1(\sqrt{y})}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(y)}{\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x)-0(\sqrt{y})}{x^2}+\sqrt{x}}=-\frac{-2+2}{\text{مخرج}}=0$$

۸۸.گزینه ۴ برای بدست آوردن شیب خط مماس ابتدا مشتق‌گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۴\frac{۱(y)}{۲\sqrt{xy}} - ۲}{۴\frac{۱(x)}{۲\sqrt{xy}} - \frac{۱}{y^۲}} \Big|_{۱}^{۴} \longrightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{۱-۲}{۴-۱} = \frac{۱}{۳}$$

حال با داشتن شیب و نقطه، معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

$$y - ۱ = \frac{۱}{۳}(x-۴) \Rightarrow ۳y - ۳ = x - ۴ \Rightarrow ۳y - x = -۱$$

.۸۹ گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{(uv)' = u'v + v'u \quad , \quad y = e^u \to y' = u'e^u}$

$$۱)\ x = ۲ \to y = ۲e^{\circ} = ۲ \quad \to \quad A\Big|_{۲}^{۲}$$

$$۲)\ y' = e^{x^۲-۴} + ۲x \cdot e^{x^۲-۴}(x) \xrightarrow{x=۲} m_{\text{مماس}} = ۱ + ۸ = ۹ \to m_{\text{قائم}} = \frac{-۱}{۹}$$

$$۳)\ y - ۲ = \frac{-۱}{۹}(x-۲) \xrightarrow{y=\circ} -۱۸ = -x + ۲ \to x = ۲\circ$$

.۹۰ گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y = Ln\,u \to y' = \frac{u'}{u} \quad , \quad Ln\,\frac{a}{b} = Ln\,a - Ln\,b \quad , \quad Ln\,a^n = nLna}$

برای راحتی در مشتق گیری، تابع را ساده می کنیم.

$$y = Ln\left(\frac{\sin x}{۱+\cos x}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}Ln\left(\frac{\sin x}{۱+\cos x}\right) = \frac{۱}{۲}(Ln\sin x - Ln(۱+\cos x))$$

$$۱)\ x = \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\text{تابع}} y = \frac{۱}{۲}(\circ - \circ) \Rightarrow y = \circ \quad \to \quad A\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$۲)\ y' = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{۱+\cos x}\right) \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{۱}{۲}\left(\circ - \frac{-۱}{۱}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$۳)\ y - \circ = \frac{۱}{۲}\left(x - \frac{\pi}{۲}\right) \xrightarrow{x=\circ} y = -\frac{\pi}{۴}$$

.۹۱ گزینه ۲ شرط مشتق مشتق‌پذیری تابع f در $x=a$ آن است که: تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$:\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۲)^+} (ax^۲+bx+۴) = ۴a - ۲b + ۴ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-۲)^-} (x^۳ - x) = -۸ + ۲ = -۶ \qquad \Rightarrow ۴a - ۲b + ۴ = -۶ \to ۴a - ۲b = -۱\circ \\ f(-۲) = ۴a - ۲b + ۴ \end{cases}$$

پیوستگی

$$f'((-۲)^+) = f'((-۲)^-) \to ۲ax + b = ۳x^۲ - ۱ \to -۴a + b = ۱۱$$

از حل $\begin{cases} ۴a - ۲b = -۱\circ \\ -۴a + b = ۱۱ \end{cases}$ به جواب $b=-۱$ و $a=-۳$ می‌رسیم.

پس : $f(۱) \overset{\text{ضابطه‌ی بالا}}{=\!=\!=\!=} a + b + ۴ = -۳ - ۱ + ۴ = \circ$

.۹۲ گزینه ۱ برای آنکه تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید در آن نقطه پیوسته بوده و مشتق‌های راست و چپ هم برابر باشند.

شرط پیوستگی $x=\frac{\pi}{۴}$:
$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}(a\tan x+b\sin ۲x)=a+b\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}(\sin^۲ x-\cos ۲x)=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-۰=\frac{۱}{۲}\\ f(\frac{\pi}{۴})=\sin^۲ x-\cos ۲x=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-۰=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Longrightarrow a+b=\frac{۱}{۲}$$

$$\left\{\begin{array}{l}f'_+(\frac{\pi}{۴})=a(۱+\tan^۲ x)+۲b\cos ۲x\Rightarrow f'_+(\frac{\pi}{۴})=۲a+۰=۲a\\ f'_-(\frac{\pi}{۴})=۲\sin x\cos x+۲\sin ۲x\Rightarrow f'_-(\frac{\pi}{۴})=۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۲=۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}\ ,\ b=-۱$$

۹۳.گزینه ۴ چون $f'(۱)$ موجود است، لذا f در $x=۱$ پیوسته است و مشتق چپ و راست f در $x=۱$ با هم برابرند، پس داریم:

شرط پیوستگی:
$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲}=\sqrt[۳]{۸^۲}=\sqrt[۳]{(۲^۲)^۳}=۴\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(ax+b)=a+b\\ f(۱)=a+b\end{array}\right.\quad\Rightarrow a+b=۴\quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}x>۱\to f(x)=\sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲}\to f'(x)=\frac{۲(۲)}{۳\sqrt[۳]{۲x+۶}}\to f'(۱^+)=\frac{۴}{۳(۲)}=\frac{۲}{۳}\\ x<۱\to f(x)=ax+b\to f'(x)=a\to f'(۱^-)=a\end{array}\right\}\to a=\frac{۲}{۳}\ ,\ b=\frac{۱۰}{۳}$$

۹۴.گزینه ۲ برای مشتق‌پذیری در یک نقطه، تابع باید در آن نقطه پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ، در آن نقطه با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(\frac{۳}{x}-۵)=۳-۵=-۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+ax+b)=۱+a+b\\ f(۱)=۳-۵=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۱+a+b=-۲\Rightarrow a+b=-۳$$

$$\left.\begin{array}{l}f'_+(۱)=-\frac{۳}{x^۲}=-۳\\ f'_-(۱)=۲x+a=۲+a\end{array}\right\}\to ۲+a=-۳\to a=-۵, b=۲$$

۹۵.گزینه ۴ برای محاسبه‌ی مشتق چپ در $x=۰$ از ضابطه‌ی پائین و برای محاسبه‌ی مشتق راست در $x=۰$ از ضابطه‌ی بالا استفاده می‌کنیم.

$$x\le ۰\to f(x)=\sin ۲x\to f'(x)=۲\cos ۲x\to f'_-(۰)=۲\cos ۰=۲$$

$$x>۰\to f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}\to f'(x)=\frac{\cos x(۱+\cos x)-(-\sin x)\sin x}{(۱+\cos x)^۲}\to f'_+(۰)=\frac{۱(۲)+۰}{۲^۲}=\frac{۱}{۲}$$

پس : $f'_-(۰)-f'_+(۰)=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$

۹۶.گزینه ۳ وقتی $x\to ۱^+$ داخل قدر مطلق، مثبت است و وقتی $x\to ۱^-$ داخل قدر مطلق، منفی است.

$$x\to ۱^+ : f(x)=x\sqrt{x}+x-۱=x^{\frac{۳}{۲}}+x-۱\to f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+۱\to f'_+(۱)=\frac{۳}{۲}+۱=\frac{۵}{۲}$$

$$x\to ۱^- : f(x)=x\sqrt{x}-x+۱=x^{\frac{۳}{۲}}-x+۱\to f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}-۱\to f'_-(۱)=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

پس : $f'_+(۱)+۳f'_-(۱)=\frac{۵}{۲}+۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۸}{۲}=۴$

۹۷.گزینه ۲ در ابتدا قدر مطلق‌های توابع f و g را از بین می‌بریم.

$$f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x| \to f(x)=\begin{cases}\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}x & x\geq ۰\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۱}{۵}x & x<۰\end{cases} \to f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۵}x & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$

$$g(x)=۴x+|x| \to g(x)=\begin{cases}۴x+x & x\geq ۰\\ ۴x-x & x<۰\end{cases} \to g(x)=\begin{cases}۵x & x\geq ۰\\ ۳x & x<۰\end{cases}$$

$$x\geq ۰ \ : \ fog(x)=f(g(x))=\frac{۳}{۵}(۵x)=۳x$$

$$x<۰ \ : \ fog(x)=f(g(x))=۳x$$

یعنی $fog(x)=۳x$ است پس مشتق آن برابر ۳ می‌باشد.

۹۸.گزینه ۴

$$x\to(\sqrt{۲})^{+} \Rightarrow f(x)=x^۳-\left[۴^{+}\right]x \to f(x)=x^۳-۴x$$

بنابراین: $f'(x)=۳x^۲-۴ \to f'_{+}(\sqrt{۲})=۳(۲)-۴=۲$

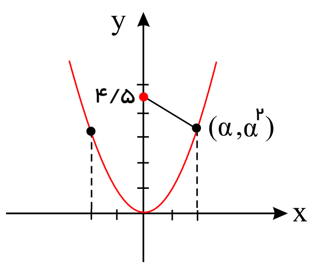
۹۹.گزینه ۲

ابتدا همه‌ی جملات را به یک طرف تساوی می‌آوریم و سپس مشتق گیری ضمنی انجام می‌دهیم:

$$\sin(x-۲y)+\sqrt{x-y}-y=۰$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\cos(x-۲y)+\frac{۱}{۲\sqrt{x-y}}}{-۲\cos(x-۲y)+\frac{-۱}{۲\sqrt{x-y}}-۱} \Rightarrow y'=-\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{-۲-\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۷}{۲}}=\frac{۳}{۷}$$

۱۰۰.گزینه ۲



اگر طول پای قائم را α در نظر بگیریم مختصات آن به صورت $\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha^۲\end{vmatrix}$ است.

$$y=x^۲\to y'=۲x\to m_{\text{مماس}}=۲\alpha\to m_{\text{قائم}}=\frac{-۱}{۲\alpha}$$

حال، معادله‌ی خط قائم را می‌نویسیم.

$$y-\alpha^۲=\frac{-۱}{۲\alpha}(x-\alpha)\xrightarrow{\text{صدق } A\begin{vmatrix}۰\\ ۴/۵\end{vmatrix}}۴/۵-\alpha^۲=-\frac{۱}{۲\alpha}(۰-\alpha)\to ۴/۵-\alpha^۲=\frac{۱}{۲}$$

$$\to\alpha^۲=۴\xrightarrow{\alpha>۰}\alpha=۲$$

۱۰۱.گزینه ۲ شرط اینکه دو تابع برهم مماس باشند آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

$$\begin{cases}y=۲x^۲-۳x+۶\\ y=۵x+a\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}۲x^۲-۳x+۶=۵x+a\to ۲x^۲-۸x+۶-a=۰ \ : \ \text{معادله‌ی تلاقی}$$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=۰\to b^۲-۴ac=۰\to ۶۴-۸(۶-a)=۰$

$$\to ۸-(۶-a)=۰\to ۸-۶+a=۰\to a=-۲$$

۱۰۲.گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{y=e^u \to y'=u'e^u \quad , \quad y=Ln|u| \to y'=\dfrac{u'}{u} \quad , \quad y=uv \to y'=u'v+v'u}$

$$x>0 \to f(x)=Ln(x^2+1) \to f'(x)=\frac{2x}{x^2+1} \to f'(0^+)=0$$

$$x<0 \to f(x)=x\cdot e^{x^2} \to f'(x)=e^{x^2}+2x\cdot e^{x^2}\cdot x \to f'(0^-)=1+0=1$$

پس: $f'(0^+)-f'(0^-)=0-1=-1$

۱۰۳.گزینه ۳

دقت کنید که وقتی $x\to 0^-$ داخل قدر مطلق منفی و $[0^-]=-1$ است و وقتی $x\to 0^+$ داخل قدر مطلق مثبت و $[0^+]=0$ است.

$$\left.\begin{array}{l} x=0^- \Rightarrow f(x)=(-x)(-1) \Rightarrow f(x)=x \Rightarrow f'(0^-)=1 \\ x=0^+ \Rightarrow f(x)=(x)(0) \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-0=1$$

۱۰۴.گزینه ۲ ابتدا تمام جملات را به یک طرف تساوی می‌آوریم و سپس مشتق گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$y^2-\sqrt{x+2y}-x+2y=0$$

$$y'=-\frac{f'x}{f'y}=-\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x+2y}}-1}{2y-\dfrac{2}{2\sqrt{x+2y}}+2} \to y'(5,2)=-\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{9}}-1}{4-\dfrac{1}{\sqrt{9}}+2}=-\frac{-\dfrac{7}{6}}{\dfrac{17}{3}}=\frac{7}{34}$$

۱۰۵.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{y=Ln\,u \to y'=\dfrac{u'}{u}}$

$$1)\ y=Ln(2x-5) \xrightarrow{y=0} Ln(2x-5)=0 \xrightarrow{Ln1=0} 2x-5=1 \to x=3 \to A\left|\begin{array}{l}3\\0\end{array}\right.$$

$$2)\ y'=\frac{2}{2x-5} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{2}{1} \to m_{\text{قائم}}=\frac{-1}{2}$$

$$3)\ y-0=\frac{-1}{2}(x-3) \Rightarrow 2y=-x+3 \to x+2y=3$$

۱۰۶.گزینه ۱

$$y'=\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\dfrac{14x}{2\sqrt{7x^2-2y}}}{\dfrac{-2}{2\sqrt{7x^2-2y}}+2y} \xrightarrow{x=1\ ,\ y=3} m_{\text{مماس}}=-\frac{7}{-1+6}=-\frac{7}{5} \to m_{\text{قائم}}=\frac{5}{7}$$

۱۰۷.گزینه ۳

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-3y}}+y^2}{\frac{-3}{2\sqrt{2x-3y}}+2xy} \xrightarrow{x=2\ ,\ y=1} m_{\text{مماس}} = -\frac{1+1}{-\frac{3}{2}+4} = \frac{-2}{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{-4}{5} \to m_{\text{قائم}} = \frac{5}{4}$$

۱۰۸.گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{y = uv \to y' = u'v + v'u\ ,\ y = e^u \to y' = u' \cdot e^u}$

$$1)\ x = 2 \to\ y = 2e^0 = 2\ \to\ A\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$$

$$2)\ y' = \frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}e^{2-x} + (-1)e^{2-x}\cdot\sqrt{2x} \xrightarrow{x=2} m_{\text{مماس}} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$3)\ y - 2 = -\frac{3}{2}(x-2) \xrightarrow{x=0} y - 2 = 3 \to y = 5$$

۱۰۹.گزینه ۱

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x)}{\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}} \xrightarrow{x=4\ ,\ y=1} m_{\text{مماس}} = -\frac{2+\frac{1}{4}(4)}{\frac{1}{3}} = -9$$

معادله‌ی خط مماس : $y - 1 = -9(x-4) \to y - 1 = -9x + 36 \to y + 9x = 37$

۱۱۰.گزینه ۱ برای تعیین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه ی $(2, \frac{1}{2})$، ابتدا باید معادله ی خط مماس در این نقطه را بنویسیم.

$$y' = \frac{-\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x)^2}}}{(\sqrt[3]{4x})^2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-\frac{4}{12}}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}(x-2) \xrightarrow{x=0} y - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \to y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۱۱۱.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y = Ln\,u \to y' = \frac{u'}{u}}$

چون شیب خط قائم برابر -1 است در نتیجه شیب خط مماس یا همان مشتق تابع در طول پای قائم برابر ۱ خواهد بود. بنابراین از تابع مشتق گرفته و برابر یک قرار می‌دهیم تا طول پای قائم بدست آید.

$$y' = x - 2 + \frac{1}{x-1} = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x-1} = 3 \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۱۱۲.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y = e^u \to y' = u' \cdot e^u}$

ابتدا همه‌ی جملات را به یک طرف تساوی می‌آوریم و سپس مشتق گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$y^{2}+y-2e^{2x-1}=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}\Rightarrow y'=-\frac{-4e^{2x-1}}{2y+1}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{-4e^{0}}{2+1}=\frac{4}{3}$$

داریم: $y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-1=\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})\Rightarrow 3y-3=4x-2\Rightarrow 3y-4x=1$

۱۱۳.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y=e^{u}\to y'=u'e^{u}\quad,\quad y=Ln\,u\to y'=\frac{u'}{u}}$

ابتدا مشتق‌گیری ضمنی می‌کنیم تا شیب خط مماس بدست آید.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{1}{x}+\frac{0(x)-1(y)}{x^{2}}}{2e^{2y}+\frac{1(x)-0(y)}{x^{2}}}\xrightarrow{\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}}m_{\text{مماس}}=-\frac{1+0}{2+1}=-\frac{1}{3}\Rightarrow m_{\text{قائم}}=3$$

$$\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-0=3(x-1)\xrightarrow{x=0}y=-3$$

۱۱۴.گزینه ۲ هر خطی موازی محور xاست، شیبش صفر است، پس کافی است از ضابطه‌ی منحنی داده شده مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x-4y}{-4x+6y}=0\to 2x-4y=0\to 2x=4y\to x=2y\to y=\frac{x}{2}$$

کافی است در معادله‌ی منحنی به جای y، $\frac{x}{2}$ قرار دهیم.

$$x^{2}-4x(\frac{x}{2})+3(\frac{x}{2})^{2}+1=0\to x^{2}-2x^{2}+\frac{3x^{2}}{4}+1=0\to-\frac{1}{4}x^{2}=-1$$
$$\to x^{2}=4\to x=\pm 2$$

۱۱۵.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y=Lnu\to y'=\frac{u'}{u}}$

معادله‌ی منحنی را به‌صورت $yLn(x^{2}-3)+2x-y^{2}=0$ می‌نویسیم.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{2x}{x^{2}-3}y+2}{Ln(x^{2}-3)-2y}\xrightarrow{x=2\ ,\ y=-2}m_{\text{مماس}}=-\frac{4(-2)+2}{Ln1+4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\to m_{\text{قائم}}=-\frac{2}{3}$$

معادله‌ی خط قائم: $y+2=-\frac{2}{3}(x-2)\xrightarrow{x=0}y+2=\frac{4}{3}\to y=-\frac{2}{3}$

۱۱۶.گزینه ۴

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2xy-2\sqrt{y}}{x^{2}-2x(\frac{1}{2\sqrt{y}})}\xrightarrow{x=2\ ,\ y=4}m_{\text{مماس}}=-\frac{16-4}{4-1}=-\frac{12}{3}=-4$$

معادله‌ی خط مماس: $y-y_1=m(x-x_1)\to y-4=-4(x-2)\to y-4=-4x+8\to y+4x=12$

البته نیازی به نوشتن معادله‌ی مماس نبود زیرا فقط در گزینه‌ی چهارم، شیب خط داده شده برابر -4 است.

۱۱۷.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y=Ln\,u\to y'=\frac{u'}{u}}$

ابتدا همه‌ی جملات را به یک طرف تساوی می‌بریم و مشتق گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$Ln(x^{۲}-y)-\sqrt{y+۱}+x=۰$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{۲x}{x^{۲}-y}+۱}{\frac{-۱}{x^{۲}-y}-\frac{۱}{۲\sqrt{y+۱}}}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=-\frac{۴+۱}{-۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{-۵}{-\frac{۵}{۴}}=۴$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۳=۴(x-۲)\Rightarrow y=۴x-۵$$

برای آنکه مشاهده کنیم این خط کجا نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $(y=x)$ را قطع می‌کند باید با آنها تشکیل دستگاه دهیم.

$$\begin{cases} y=۴x-۵ \\ y=x \end{cases}\Rightarrow ۴x-۵=x\Rightarrow ۳x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

۱۱۸.گزینه ۴

$$x-۳y=۲\rightarrow m_{\text{خط}}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{مماس}}=-۳$$

شیب خط مماس همان مشتق است، بنابراین کافی است که از تابع، مشتق گرفته و مساوی ۳- قرار دهیم.

$$y'=۳x^{۲}+۶x=-۳\rightarrow ۳x^{۲}+۶x+۳=۰\rightarrow x^{۲}+۲x+۱=۰\rightarrow (x+۱)^{۲}=۰$$

$$\rightarrow x=-۱\xrightarrow{\text{تابع}} y=-۱+۳+۱=۳$$

$$A\Big|_{۳}^{-۱}\ ,\ m=-۳\rightarrow y-y_۱=m(x-x_۱)\rightarrow y-۳=-۳(x+۱)\rightarrow y=-۳x$$

فقط گزینه‌ی چهارم در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

۱۱۹.گزینه ۳

معادله‌ی خط نیمساز ربع اول به صورت $y=x$ است و شیب آن برابر یک است و چون خط مماس بر منحنی، بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است، بنابراین شیب خط مماس برابر ۱- است. پس کافی است مشتق گرفته و برابر ۱- قرار دهیم.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۱+\frac{y}{۲\sqrt{xy}}}{\frac{x}{۲\sqrt{xy}}+۱}=-۱\rightarrow ۱+\frac{y}{۲\sqrt{xy}}=\frac{x}{۲\sqrt{xy}}+۱\rightarrow y=x$$

$$x+\sqrt{xy}+y=۱۲\xrightarrow{y=x} x+\sqrt{x^{۲}}+x=۱۲\rightarrow ۳x=۱۲\rightarrow x=۴$$

۱۲۰.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{y=Ln\,u\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم:

$$y=Ln\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^{۲}-۲x+۳}\rightarrow y=Ln\sqrt{۴x+۱}-Ln(x^{۲}-۲x+۳)\rightarrow y=\frac{۱}{۲}Ln(۴x+۱)-Ln(x^{۲}-۲x+۳)$$

$$۱)\ x=۲\rightarrow y=Ln\frac{۳}{۳}=Ln۱=۰\ \rightarrow\ A\Big|_{۰}^{۲}$$

$$۲)\ y'=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۴x+۱}-\frac{۲x-۲}{x^{۲}-۲x+۳}\xrightarrow{x=۲} m_{\text{مماس}}=\frac{۴}{۱۸}-\frac{۲}{۳}=-\frac{۸}{۱۸}=-\frac{۴}{۹}$$

$$۳)\ y-۰=-\frac{۴}{۹}(x-۲)\xrightarrow{x=۰} y=\frac{۸}{۹}$$

۱۲۱.گزینه ۲ هرگاه دو تابع برهم مماس باشند، معادله ی تلاقی آنها ریشه ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}-۲x-۳=۰ \\ y=mx+۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^{۲}+(mx+۲)^{۲}-۲x-۳=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+m^{۲}x^{۲}+۴+۴mx-۲x-۳=۰ \to \boxed{(۱+m^{۲})x^{۲}+(۴m-۲)x+۱=۰} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}: \Delta=۰ \Rightarrow b^{۲}-۴ac=۰ \Rightarrow (۴m-۲)^{۲}-۴(۱+m^{۲})(۱)=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶m^{۲}+۴-۱۶m-۴-۴m^{۲}=۰ \Rightarrow ۱۲m^{۲}-۱۶m=۰ \Rightarrow m(۱۲m-۱۶)=۰ \to \begin{cases} m=۰ \\ m=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۱۲۲. گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۷)-f(۳)}{۷-۳}=\frac{(۴۹+۴۲-۱)-(۹+۱۸-۱)}{۴}=\frac{۶۴}{۴}=۱۶$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=\text{مشتق}=۲x+۶ \to f'(a)=۲a+۶$$

$$\text{پس}: ۲a+۶=۱۶ \to ۲a=۱۰ \to a=۵$$

۱۲۳. گزینه ۲

$$f(x)=۲\sin^{۳}x+\cos^{۴}۲x \to f'(x)=(۶\sin^{۲}x)(\cos x)+(۴\cos^{۳}۲x)(۲)(-\sin ۲x)$$

$$\to f'(x)=۶\sin^{۲}x\cdot\cos x-۸\cos^{۳}۲x\sin ۲x \to f'(\frac{۳\pi}{۴})=۶(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})-۰$$

$$\to f'(\frac{۳\pi}{۴})=۶(\frac{۱}{۲})(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲۴. گزینه ۲ هرگاه y تابعی برحسب u و خود u تابعی برحسب x باشد برای مشتق‌گیری از y نسبت به x کافی است از y نسبت به u و از u نسبت به x مشتق گرفته و در هم ضرب کنیم.

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\left(\frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۳u+۱}}+\frac{۱(۷)}{۳\sqrt[۳]{(۷u+۱)^{۲}}}\right)(۹x^{۲}-۸x+۱)$$

توجه کنید که اگر $x=۱$ باشد در این صورت $u=۳-۴+۱+۱=۱$ است.

$$\frac{dy}{dx}_{(x=۱)}=(\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۱۲})(۲)=\frac{۳}{۲}+\frac{۷}{۶}=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$$

۱۲۵. گزینه ۴ آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

$$f(x)=(۳x+۱)^{-\frac{۱}{۲}} \to f'(x)=-\frac{۱}{۲}(۳x+۱)^{-\frac{۳}{۲}}(۳)=\frac{-۳}{۲(۳x+۱)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\to f'(۱)=\frac{-۳}{۲(۴)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{-۳}{۲(۲^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{-۳}{۲(۲^{۳})}=\frac{-۳}{۱۶}$$

۱۲۶. گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=e^{u} \to y'=u'\cdot e^{u}}$

$$y=e^{۲x} \to y'=۲e^{۲x} \xrightarrow{x=۰} m_{\text{مماس}}=۲e^{۰}=۲ \to m_{\text{قائم}}=\frac{-۱}{۲}$$

$$\text{معادله‌ی خط قائم}: y-y_{۱}=m(x-x_{۱}) \to y-۱=-\frac{۱}{۲}(x-۰) \to ۲y-۲=-x \to ۲y+x=۲$$

۱۲۷.گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱} = \frac{(۲۷-۹+۵)-(۱-۱+۵)}{۲} = \frac{۱۸}{۲} = ۹$$

$$x=۲ \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(۲) = ۳x^۲ - ۲x = ۳(۴) - ۲(۲) = ۸$$

اختلاف این دو مقدار برابر یک است.

۱۲۸.گزینه ۲ از تابع داده شده مشتق می‌گیریم و شیب خط را مماس را بدست می‌آوریم.

$$f(x) = ۲\sin ۳x - \cos ۲x \to f'(x) = ۶\cos ۳x + ۲\sin ۲x \to f'(\pi) = ۶\cos ۳\pi + ۲\sin ۲\pi$$

$$\to m_{\text{مماس}} = ۶(-۱) + ۰ = -۶$$

$$\text{معادله‌ی خط مماس} : y+۱ = -۶(x-\pi) \to y+۱ = -۶x+۶\pi \to y+۶x = ۶\pi - ۱$$

۱۲۹.گزینه ۳ می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ است پس حاصل $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$ برابر $f'(۳)$ می‌باشد کافی است از تابع داده شده مشتق گرفته و سپس $x=۳$ را جایگزین کنید.

$$f(x) = \sqrt{\frac{۳x-۱}{x-۲}} \to f'(x) = \frac{۱\left(\frac{۳(x-۲)-۱(۳x-۱)}{(x-۲)^۲}\right)}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{x-۲}}} \to f'(۳) = \frac{-۵}{۲\sqrt{۸}} \times \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۸}}$$

$$= \frac{-۵\sqrt{۸}}{۱۶} = \frac{-۱۰\sqrt{۲}}{۱۶} = \frac{-۵\sqrt{۲}}{۸}$$

۱۳۰.گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \\ y = f(u) \to y' = u' \cdot f'(u)\end{array}}$$

$$\lim_{x\to -۴} \frac{f(x)-f(-۴)}{x+۴} = ۳ \to f'(-۴) = ۳$$

$$y = f(x^۳ - ۵x) \to y' = (۳x^۲ - ۵) f'(x^۳ - ۵x) \to y'(۱) = -۲f'(-۴) = -۲(۳) = -۶$$

۱۳۱.گزینه ۲

$$f(x) = ۳\sqrt{x-a} + ۲ \to f'(x) = ۳ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x-a}} \xrightarrow{f'(۴)=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۲\sqrt{۴-a}}$$

$$\to ۲\sqrt{۴-a} = ۹ \to \sqrt{۴-a} = \frac{۹}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴-a = \frac{۸۱}{۴} \to a = \frac{-۶۵}{۴}$$

۱۳۲.گزینه ۲ شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ واقع بر منحنی برابر $f'(a)$ است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \sin \pi x \to f'(x) = \left(\frac{\sqrt{۳}}{\pi}\right)(\pi)\cos \pi x \to f'(۰) = \sqrt{۳}\cos ۰ = \sqrt{۳}$$

۱۳۳.گزینه ۳ باید مشتق گیری ضمنی انجام دهیم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۱۸x - ۲y^۳}{-۶xy^۲ + \pi\cos \pi y} \xlongequal{x=۱\,,\,y=۱} -\frac{۱۸-۲}{-۶+\pi(-۱)} = -\frac{۱۶}{-۶-\pi} = \frac{۱۶}{۶+\pi}$$

۱۳۴.گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۴/۵۶) - f(۴/۲۵)}{۴/۵۶ - ۴/۲۵} = \frac{\sqrt{۲/۵۶} - \sqrt{۲/۲۵}}{۰/۳۱} = \frac{۱/۶ - ۱/۵}{۰/۳۱} = \frac{۰/۱}{۰/۳۱} = \frac{۱۰}{۳۱}$$

۱۳۵.گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u \quad , \quad (Ln|u|)' = \frac{u'}{u}}$$

کافی است که مشتق گیری ضمنی انجام دهیم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{۱}{x+۱} + ۲\cos(۲x+۳y) - ۳y\sin xy}{۳\cos(۲x+۳y) - ۳x\sin xy + ۶e^{۳y}} \xrightarrow{x=۰, y=۰} y' = -\frac{۱+۲-۰}{۳-۰+۶} = \frac{-۱}{۳}$$

۱۳۶.گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{-(x-۲)} = -\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = -f'(۲) = ۱ \to f'(۲) = -۱$$

$$g(x) = ۲f(x) + x \to g'(x) = ۲f'(x) + ۱ \to g'(۲) = ۲f'(۲) + ۱ = ۲(-۱) + ۱ = -۱$$

۱۳۷.گزینه ۱ هرگاه y برحسب u و خود u برحسب x باشد برای مشتق گیری از y نسبت به x کافی است از y نسبت به u و از u نسبت به x مشتق گرفته و در هم ضرب کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (۳u^۲ - ۴u - \pi\sin\pi u)\cdot(\pi(۱+\tan^۲\pi x) - ۲\pi(۱+\cot^۲ ۲\pi x))$$

دقت کنید که وقتی $x = \frac{۱}{۴}$ است: $u = \tan\frac{\pi}{۴} + \cot\frac{\pi}{۲} = ۱ + ۰ = ۱$ است.

پس: $\frac{dy}{dx} = (۳-۴-\pi\sin\pi)(\pi(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴}) - ۲\pi(۱+\cot^۲\frac{\pi}{۲})) = (-۱-۰)(۲\pi-۲\pi) = ۰$

۱۳۸.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(uv)' = u'v + v'u}$

$$(x^۴-۱)f'(x) + ۴x^۳f(x) = \left((x^۴-۱)f(x)\right)'$$

$$= (\underbrace{(x^۴-۱)(x^۴+۱)}_{x^۸-۱}(x^۸+۱)(x^{۱۶}+۱))' = (\underbrace{(x^۸-۱)(x^۸+۱)}_{x^{۱۶}-۱}(x^{۱۶}+۱))' = \left((x^{۱۶}-۱)(x^{۱۶}+۱)\right)'$$

$$= (x^{۳۲}-۱)' = ۳۲x^{۳۱}$$

۱۳۹.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{y = f(u) \to y' = u'f'(u)}$

$$g(x) = ۵\sin(۲x - ۳g(x)) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x) = ۵(۲-۳g'(x))(\cos(۲x-۳g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۰} g'(۰) = ۵(۲-۳g'(۰))(\cos(\underbrace{۰-۳g(۰)}_{۰})) \to g'(۰) = ۵(۲-۳g'(۰))(۱)$$

$$\to g'(۰) = ۱۰ - ۱۵g'(۰) \to ۱۶g'(۰) = ۱۰ \to g'(۰) = \frac{۵}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{g(x)}{x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۰} g'(x) = g'(۰) = \frac{۵}{۸}$$

۱۴۰.گزینه ۲ خط به معادله‌ی $y = ۵$ خطی افقی است و شیب آن برابر صفر است بنابراین نقاطی از منحنی داده شده را باید بدست آوریم که در آن نقاط، شیب برابر صفر است.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x-y}{۲y-x} = ۰ \to ۲x - y = ۰ \to y = ۲x$$

در منحنی داده شده هر جا y دیدید به جای آن $۲x$ قرار دهید پس داریم:

$$x^۲ + ۴x^۲ - ۲x^۲ = ۱۲ \to x^۲ = ۴ \to x = \pm ۲$$

۱۴۱.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{(e^u)' = u'\cdot e^u \ , \ (uv)' = u'v + v'u}$

$$y = x\cdot e^{x^۲-۹} \to y' = e^{x^۲-۹} + ۲x^۲\cdot e^{x^۲-۹} \to m_{\text{مماس}} = e^۰ + ۱۸e^۰ = ۱ + ۱۸ = ۱۹ \to m_{\text{قائم}} = \frac{-۱}{۱۹}$$

۱۴۲.گزینه ۱ شرط آنکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که: ۱) تابع در $x = a$ پیوسته باشد. ۲) مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

شرط پیوستگی:
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(ax^۲+bx)=a+b\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۳-۲x)=۱-۲=-۱\\ f(۲)=a+b\end{cases} \Rightarrow a+b=-۱$$

تساوی مشتق‌های راست و چپ:
$$\begin{cases}f'(۱^+)=۲ax+b=۲a+b\\ f'(۱^-)=۳x^۲-۲=۳-۲=۱\end{cases} \Rightarrow ۲a+b=۱$$

$$\begin{cases}a+b=-۱\\ ۲a+b=۲\end{cases} \to a=۲\ ,\ b=-۳\to a^۲+b^۲=۴+۹=۱۳$$

۱۴۳.گزینه ۲ شرط مشتق پذیر بودن تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

شرط پیوستگی :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax^۲-bx+۱)=۴a-۲b+۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}x^۳=۸\\ f(۲)=۴a-۲b+۱\end{cases} \Rightarrow ۴a-۲b+۱=۸\Rightarrow ۴a-۲b=۷$$

$$f'(۲^+)=f'(۲^-)\to ۲ax-b=۳x^۲\to ۴a-b=۱۲$$

$$\begin{cases}۴a-۲b=۷\\ ۴a-b=۱۲\end{cases}\to a=\frac{۱۷}{۴}\ ,\ b=۵\to ab=\frac{۸۵}{۴}$$

۱۴۴.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=Lnu\to y'=\frac{u'}{u}\ ,\ y=e^u\to y'=u'\cdot e^u}$

$$f(x)=e^{x^۵-۵x}+Ln(x^۲-۳x)\to f'(x)=(۵x^۴-۵)e^{x^۵-۵x}+\frac{۲x-۳}{x^۲-۳x}$$

$$\to f'(-۱)=۰+\frac{-۲-۳}{۱+۳}=\frac{-۵}{۴}$$

۱۴۵.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'f'(u)}$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{g(۱+۲h)-g(۱)}{h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰}\frac{۲g'(۱+۲h)}{۱}=۲g'(۱)=۵\to g'(۱)=\frac{۵}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{آهنگ متوسط تغییر تابع}=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}=\frac{(۸+۲)-(۱+۱)}{۱}=۸\\ \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } g \text{ در } x=۱ = g'(۱)=\frac{۵}{۲}\end{array}\right\}\to ۸-\frac{۵}{۲}=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

۱۴۶.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{(e^u)'=u'\cdot e^u}$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{e^x+۱}{۲e^{۲y}+۳}\xrightarrow{x=۰\ ,\ y=۰}m_{\text{مماس}}=-\frac{e^۰+۱}{۲e^۰+۳}=-\frac{۲}{۵}$$

معادله‌ی خط مماس: $y-۰=-\frac{۲}{۵}(x-۰)\to y=-\frac{۲}{۵}x$

۱۴۷.گزینه ۱

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۱۲x^۵+y^۳}{۶y^۵+۳xy^۲}\xrightarrow{x=۱,y=۱}m_{\text{مماس}}=-\frac{۱۲+۱}{۶+۳}=\frac{-۱۳}{۹}\to m_{\text{قائم}}=\frac{۹}{۱۳}$$

معادله‌ی خط قائم : $y-۱=\frac{۹}{۱۳}(x-۱)\to ۱۳y-۱۳=۹x-۹\to ۱۳y-۹x=۴$

۱۴۸.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l}y=e^u\to y'=u'\cdot e^u\\ y=Lnu\to y'=\frac{u'}{u}\end{array}}$

شرط اینکه تابع f در نقطه‌ای به طول $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

شرط پیوستگی :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(e^{ax}+۲)=e^۰+۲=۱+۲=۳ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(bLn(e+۲x))=bLne=b \qquad \Rightarrow b=۳ \\ f(۰)=bLne=b \end{cases}$$

$$f'(۰^+)=f'(۰^-)\to ae^{ax}=b\times\frac{۲}{e+۲x}\to ae^۰=\frac{۶}{e}\to a=\frac{۶}{e}\xrightarrow{b=۳} ab=\frac{۱۸}{e}$$

۱۴۹.گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x=a$ موجود، متناهی و با هم برابر باشند. برای این منظور به بررسی هر ۴ گزینه می‌پردازیم.

گزینه‌ی اول :
$$\begin{cases} x\geq ۱\to f'(x)=۲x-۱\to f'(۱^+)=۱ \\ x<۰\to f'(x)=۴x^۳-۱\to f'(۱^-)=۳ \end{cases}\to$$
تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست

گزینه‌ی دوم :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=۴[۱^+]=۴(۱)=۴ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} g(x)=۴[۱^-]=۴(۰)=۰ \end{cases}\to$$
تابع در $x=۱$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است

گزینه‌ی سوم :
$$\begin{cases} x\geq ۱\to f'(x)=۴\times\dfrac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\to f'(۱^+)=+\infty \\ x<۱\to f'(x)=-\dfrac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}}\to f'(۱^-)=+\infty \end{cases}$$

در $x=۱$ مشتق‌های راست و چپ نامتناهی هستند پس مشتق‌پذیر نیست.

گزینه‌ی چهارم: در همسایگی $x=۱$ تابع $k(x)$ به صورت $k(x)=x+x^۳+۱$ در می‌آید که پیوسته است و مشتق آن در $x=۱$ می‌شود:

$$k'(x)=۱+۳x^۲\to k'(۱)=۱+۳=۴$$

۱۵۰.گزینه ۴ می‌دانیم:
$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\quad,\quad \sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x^۲-\pi^۲}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{(x-\pi)(x+\pi)}=\frac{۱}{x+\pi}\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\frac{۱}{۲\pi}f'(\pi)$$

$$f(x)=۴\cos^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۱۲})\to f'(x)=(۸\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۱۲}))(-\frac{۱}{۱۲})(-\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۱۲}))$$

$$\to f'(x)=\frac{۲}{۳}\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۱۲})\cdot\cos(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۱۲})\to f'(x)=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۱۲})$$

$$\to f'(x)=\frac{۱}{۳}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۶})\to f'(\pi)=\frac{۱}{۳}\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۳}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۶}$$

پس: $\frac{۱}{۲\pi}f'(\pi)=\frac{۱}{۲\pi}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲\pi}$

۱۵۱.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{(e^u)'=u'\cdot e^u}$

عبارت $e^{\sin x}-۱$ به ازای $x=۰$ برابر صفر می‌شود. بنابراین کافی است فقط از آن مشتق گرفته و در بقیه عدد گذاری کنیم.

$$f'(۰)=(\cos x\cdot e^{\sin x})(e^۰+۲)^۳(Lne)=(۱e^۰)(۲۷)(۱)=۲۷$$

۱۵۲.گزینه ۳ توجه کنید که اگر تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ در $x=x_۰$ با زاویه‌ی θ محور xها را قطع کند آن‌گاه $\tan\theta=f'(x_۰)$ است. ابتدا نقاط تقاطع تابع f را با محور xها بدست می‌آوریم.

$$f(x)=۰\to\sin ۲x=۰\xrightarrow[x=k\pi]{\text{حالت خاص}} ۲x=k\pi\to x=\frac{k\pi}{۲}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x \to f'(x)=\sqrt{۳}\cos ۲x \to f'(\frac{k\pi}{۲})=\sqrt{۳}\cos k\pi$$

$$\to \begin{cases} \text{زوج } k \to f'(\frac{k\pi}{۲})=\sqrt{۳} \to \tan\theta=\sqrt{۳} \to \theta=\frac{\pi}{۳} \\ \text{فرد } k \to f'(\frac{k\pi}{۲})=-\sqrt{۳} \to \tan\theta=-\sqrt{۳} \to \theta=\frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۵۳.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})}$

ابتدا رابطه‌ی ضمنی داده شده را ساده می‌کنیم.

$$x+y=\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}} \to (\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y})(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}})=\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}}$$

$$\to \sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y}=۱ \to y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{y^{۲}}}}=-\sqrt[۳]{\frac{y^{۲}}{x^{۲}}}$$

۱۵۴.گزینه ۲ اگر دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند آن‌گاه $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$ است. طبق اطلاعات مسأله، $f(۳)=۱۶$ و $f'(۳)=۵$ است.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^{۲}(x)-۱۶f(x)}{۳-x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)f'(x)-۱۶f'(x)}{-۱}$$

$$=-(۲f(۳)f'(۳)-۱۶f'(۳))=-(۲(۱۶)(۵)-۱۶(۵))=-(۱۶۰-۸۰)=-۸۰$$

۱۵۵.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{(uv)'=u'v+v'u\,,\ (e^{u})'=u'\cdot e^{u}}$

$$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f(x)\cdot g(x))'=[(\sqrt{e^{۲x}+x^{۴}}+x^{۲})^{۵}(\sqrt{e^{۲x}+x^{۴}}-x^{۲})^{۵}]'$$
$$=[(e^{۲x}+x^{۴}-x^{۴})^{۵}]'=(e^{۱۰x})'=۱۰e^{۱۰x}$$

اکنون با توجه به اینکه $f(۰)=۱$ و $g(۰)=۱$ است می‌توان نوشت:

$$A=\frac{f'(۰)g(۰)+g'(۰)f(۰)}{f(۰)+g(۰)}=\frac{۱۰e^{۰}}{۱+۱}=\frac{۱۰}{۱}=۵$$

۱۵۶.گزینه ۲

ابتدا تابع داده شده را به صورت $f(x)=(۳x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{(۳x+۱)^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۳x+۱}}$ می‌نویسیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(۵)-f(۱)}{۵-۱}=\frac{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}}{۴}=\frac{-۱}{۱۶}$$

$$x=\frac{۸}{۳}\ \text{آهنگ لحظه‌ای در}=f'(\frac{۸}{۳})=\frac{۰-\frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۳x+۱}}}{۳x+۱}=\frac{-\frac{۳}{۶}}{۹}=\frac{-۱}{۱۸}$$

$$\text{پس داریم}: -\frac{۱}{۱۸}-(\frac{-۱}{۱۶})=\frac{-۱}{۱۸}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{-۱۶+۱۸}{۱۸\times ۱۶}=\frac{۲}{۱۸\times ۱۶}=\frac{۱}{۱۴۴}$$

۱۵۷.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{(uv)'=u'v+v'u\,,\ (e^{u})'=u'\cdot e^{u}}$

چون تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر است پس $f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)$. بنابراین نیازی به محاسبه‌ی مقادیر a و b نیست و کافی است فقط مشتق راست را در $x=۰$ حساب کنیم:

$x \geq ۰ : f(x) = x \cdot e^{۲x} \to f'(x) = e^{۲x} + ۲x \cdot e^{۲x} \to f'_{+}(۰) = e^{۰} + ۰ = ۱$

پس: $f'_{+}(۰) + f'_{-}(۰) = ۲f'_{+}(۰) = ۲(۱) = ۲$

۱۵۸.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\cos ۲a = \cos^{۲} a - \sin^{۲} a}$

$$f(x) = \frac{\cos ۲x}{\cos x + \sin x} = \frac{\cos^{۲} x - \sin^{۲} x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \cos x - \sin x \quad (*)$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi) \overset{*}{\to} f'(x) = -\sin x - \cos x \to f'(\pi) = -\sin \pi - \cos \pi = ۰ - (-۱) = ۱$$

۱۵۹.گزینه ۴ تمام جملات را به یک طرف تساوی آورده و مشتق‌گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$\cos(۴x - y) + \sqrt{۴y - ۷x} - y = ۰ \to y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-۴\sin(۴x - y) + \frac{۱(-۷)}{۲\sqrt{۴y-۷x}}}{\sin(۴x - y) + \frac{۱(۴)}{۲\sqrt{۴y-۷x}} - ۱}$$

$$\xlongequal{x=۱\ ,\ y=۴} \quad -\frac{-۴\sin ۰ + \frac{-۷}{۶}}{\sin ۰ + \frac{۴}{۶} - ۱} = -\frac{۰ - \frac{۷}{۶}}{\frac{-۱}{۳}} = -\frac{۷}{۲}$$

۱۶۰.گزینه ۳ چون خطوط داده شده، خطوطی افقی هستند که بر تابع مماس شده‌اند باید نقاطی را پیدا کنیم که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است. (خطوط افقی دارای شیبی برابر صفر هستند و شیب خط مماس بر تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول a همان مشتق تابع در $x = a$ است.)

$$y = ۹x + \frac{۱}{x} \xrightarrow{y' = ۰} ۹ - \frac{۱}{x^{۲}} = ۰ \to \frac{۱}{x^{۲}} = ۹ \to x^{۲} = \frac{۱}{۹}$$

$$\to \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۹(\frac{۱}{۳}) + \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۶ \to k_{۱} = ۶ \\ x = -\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۹(-\frac{۱}{۳}) + \frac{۱}{-\frac{۱}{۳}} = -۶ \to k_{۲} = -۶ \end{cases} \to |k_{۱} - k_{۲}| = ۱۲$$

۱۶۱.گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{Lnab = Lna + Lnb\ ,\ Ln\frac{a}{b} = Lna - Lnb\ ,\ Lna^{n} = nLna\ ,\ (Lnu)' = \frac{u'}{u}}$

$$g(x) = Ln\frac{(x - ۱)\sqrt{۲x - ۳}}{(۳x - ۵)^{۲}} \to g(x) = Ln(x - ۱) + Ln\sqrt{۲x - ۳} - Ln(۳x - ۵)^{۲}$$

$$\to g(x) = Ln(x - ۱) + Ln(۲x - ۳)^{\frac{۱}{۲}} - ۲Ln(۳x - ۵)$$

$$\to g(x) = Ln(x - ۱) + \frac{۱}{۲}Ln(۲x - ۳) - ۲Ln(۳x - ۵)$$

$$\to g'(x) = \frac{۱}{x - ۱} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۲x - ۳} - ۲ \times \frac{۳}{۳x - ۵}$$

از طرفی: $\lim_{h \to ۰} \frac{g(۲ + h) - g(۲)}{h} = g'(۲) = ۱ + \frac{۱}{۲}(۲) - \frac{۶}{۱} = ۱ + ۱ - ۶ = -۴$

۱۶۲.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{(Lnu)' = \frac{u'}{u}\ ,\ Lna^{n} = nLna\ ,\ Lna + Lnb = Lnab\ ,\ Ln\frac{a}{b} = Lna - Lnb}$

برای راحتی در مشتق‌گیری، عبارت را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=Ln\frac{\sqrt{۵x+۱}}{(x^۲-۸)(x-۲)}=Ln\sqrt{۵x+۱}-Ln(x^۲-۸)(x-۲)$$

$$=Ln(۵x+۱)^{\frac{۱}{۲}}-(Ln(x^۲-۸)+Ln(x-۲))=\frac{۱}{۲}Ln(۵x+۱)-Ln(x^۲-۸)-Ln(x-۲)$$

$$\to f'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۵x+۱}-\frac{۲x}{x^۲-۸}-\frac{۱}{x-۲}\to f'(۳)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۶}-\frac{۶}{۱}-\frac{۱}{۱}=\frac{۵}{۳۲}-۷=-\frac{۲۱۹}{۳۲}$$

۱۶۳.گزینه ۲ نقطه‌ی دلخواه $B\left|\begin{matrix}a\\a^۲\end{matrix}\right.$ را روی سهمی $y=x^۲$ در نظر می‌گیریم.

$$y=x^۲\to y'=۲x\to m_{\text{مماس}}=۲a\to m_{\text{قائم}}=\frac{-۱}{۲a}$$

معادله‌ی خط قائم: $y-a^۲=\frac{-۱}{۲a}(x-a)\xrightarrow[\text{صدق}]{A\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.}۰-a^۲=\frac{-۱}{۲a}(۳-a)\to-۲a^۳=-۳+a\to۲a^۳+a-۳=۰$

چون مجموع ضرایب این معادله‌ی درجه‌ی سوم برابر صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله برابر $a=۱$ است و معادله بر $a-۱$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l}
۲a^۳+a-۳ & a-۱\\\hline
-۲a^۳+۲a^۲ & ۲a^۲+۲a+۳\\\hline
۲a^۲+a-۳ & \\
-۲a^۲+۲a & \\\hline
۳a-۳ & \\
-۳a+۳ & \\\hline
\text{صفر} &
\end{array}$$

$$\to(a-۱)\underbrace{(۲a^۲+۲a+۳)}_{\Delta<۰\ \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}}=۰\to a=۱$$

یعنی از نقطه‌ی A فقط یک خط می‌گذرد که بر سهمی $y=x^۲$ عمود است.

۱۶۴.گزینه ۴ نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$ بر روی منحنی $y=x^۲$ قرار ندارد پس ابتدا نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}\alpha\\\alpha^۲\end{matrix}\right.$ را روی منحنی در نظر گرفته و معادله‌ی خط قائم بر منحنی در این نقطه را می‌نویسیم.

$$y=x^۲\to y'=۲x\to m_{\text{مماس}}=۲\alpha\to m_{\text{قائم}}=\frac{-۱}{۲\alpha}$$

بنابراین معادله‌ی خط قائم به‌صورت $y-\alpha^۲=\frac{-۱}{۲\alpha}(x-\alpha)$ درمی‌آید اکنون نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right.$ را که روی این خط قرار دارد در معادله‌ی آن صدق می‌دهیم.

$$۳-\alpha^۲=\frac{-۱}{۲\alpha}(۰-\alpha)\to۳-\alpha^۲=\frac{۱}{۲}\to\alpha^۲=\frac{۵}{۲}\to\alpha=\pm\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

اکنون با جایگذاری $\alpha=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ معادله‌ی خط قائم با شیب منفی به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$y-\frac{۵}{۲}=\frac{-۱}{۲(\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})}(x-\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})\to y-\frac{۵}{۲}=-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}(x-\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})\to y=-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}x+۳$$

۱۶۵.گزینه ۲ توابع قدرمطلقی در ریشه‌ی غیرمکرر داخل قدرمطلق مشتق ناپذیر هستند بنابراین تابع داده شده در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است بنابراین گزینه‌ی اول نادرست است.

$$f(x)=(x^۳-۲)\,|x|=\begin{cases}x^۴-۲x & x\geq۰\\-x^۴+۲x & x<۰\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}۴x^۳-۲ & x>۰\\-۴x^۳+۲ & x<۰\end{cases}$$

$f'_{+}(\circ)=۴(\circ)-۲=-۲,\ f'_{-}(\circ)=-۴(\circ)+۲=۲\ ,\ f'(۱)=۴(۱)-۲=۲$

بنابراین گزینه‌ی دوم صحیح است.

۱۶۶. گزینه ۳ معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $y=x$ است که شیب آن برابر یک می‌باشد، حال باید نقاطی را بیابیم که شیب خط مماس در آن نقاط برابر یک باشد.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲x-y}{۲y-x}=۱\rightarrow ۲y-x=-۲x+y\rightarrow y=-x$$

کافی است در رابطه داده شده به جای y، $-x$ را قرار دهیم.

$$x^۲-x(-x)+(-x)^۲=۳\rightarrow x^۲+x^۲+x^۲=۳\rightarrow ۳x^۲=۳$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=۱\xrightarrow{y=-x}y=-۱\rightarrow A\begin{vmatrix}۱\\-۱\end{vmatrix}\\ x=-۱\xrightarrow{y=-x}y=-۱\rightarrow B\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}\end{cases}\rightarrow \text{دو نقطه}$$

۱۶۷. گزینه ۳ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در $x=a$ با سمت راست محور xها زاویه‌ی θ ایجاد کند $\tan\theta=f'(a)$ است.

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\rightarrow f'(x)=\cos ۲x\xrightarrow{x=\circ}f'(\circ)=۱=\tan\theta\rightarrow\theta=۴۵^\circ$$

۱۶۸. گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{Lna^n=nLna\ ,\ (Lnu)'=\frac{u'}{u}}$

شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

قبل از شروع حل، به ساده کردن $Ln\sqrt[۳]{۳x-۵}$ توجه کنید.

$$Ln\sqrt[۳]{۳x-۵}=Ln(۳x-۵)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}Ln(۳x-۵)$$

$$\rightarrow f(x)=\begin{cases}mx^۲-۲x+۱ & x\geq ۲\\ nx+\frac{۱}{۳}Ln(۳x-۵) & \frac{۵}{۳}<x<۲\end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی در } x=۲\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(mx^۲-۲x+۱)=۴m-۴+۱=۴m-۳\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(nx+\frac{۱}{۳}Ln(۳x-۵))=۲n+\circ=۲n\\ f(۲)=۴m-۳\end{cases}$$

پس $۴m-۳=۲n$ است.

$$f'(۲^+)=f'(۲^-)\rightarrow ۲mx-۲=n+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۳x-۵}\rightarrow ۴m-۲=n+۱\rightarrow ۴m-n=۳$$

$$\text{پس}:\begin{cases}۴m-۲n=۳\\ ۴m-n=۳\end{cases}\rightarrow n=\circ\ ,\ m=\frac{۳}{۴}$$

۱۶۹. گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{(Lnu)'=\frac{u'}{u}\ ,\ (e^u)'=u'\cdot e^u}$

شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(aLnx+x^۲)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}be^{x-۱}=be^\circ=b\Rightarrow b=۱\\ f(۱)=\circ+۱=۱\end{cases}$$

$$f'(۱^+)=f'(۱^-)\rightarrow a(\frac{۱}{x})+۲x=be^{x-۱}\rightarrow a+۲=b\rightarrow a+۲=۱\rightarrow a=-۱\rightarrow ab=-۱$$

۱۷۰.گزینه ۳

$$x \longrightarrow 0^- : f(x) = |\underbrace{\sin x}_{-}| + |\underbrace{\cos x}_{+}| = -\sin x + \cos x$$

ناحیه‌ی چهارم

$$\rightarrow f'(x) = -\cos x + \sin x \rightarrow f'_-(0) - 1 + 0 = -1$$

۱۷۱.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{Lna^n = nLna \quad , \quad Ln\dfrac{a}{b} = Lna - Lnb \quad , \quad (Lnu)' = \dfrac{u'}{u}}$

شیب خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ واقع بر منحنی برابر $f'(a)$ است. توجه کنید برای راحتی در مشتق گیری، تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = Ln\sqrt[3]{\frac{\cos 3x}{1+\sin 2x}} = Ln(\frac{\cos 3x}{1+\sin 2x})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}Ln(\frac{\cos 3x}{1+\sin 2x})$$

$$= \frac{1}{3}(Ln\cos 3x - Ln(1+\sin 2x)) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{2\cos 2x}{1+\sin^2 x})$$

$$\rightarrow f'(0) = \frac{1}{3}(0 - \frac{2(1)}{1+0}) = -\frac{2}{3}$$

۱۷۲.گزینه ۱ با مشتق‌گیری ضمنی شیب خط مماس را در نقطه‌ی $(1,1)$ به‌دست می‌آوریم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{3x^2 + \frac{1(y)}{2\sqrt{xy}}}{\frac{1(x)}{2\sqrt{xy}} + 2y} \xrightarrow{x=1\ ,\ y=1} m_{\text{مماس}} = -\frac{3+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2} = -\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{7}{5}$$

معادله‌ی خط مماس: $y - 1 = -\dfrac{7}{5}(x-1) \rightarrow 5y - 5 = -7x + 7 \rightarrow 5y + 7x = 12$

۱۷۳.گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{(3+1)-(24+1)}{1} = -21$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \text{مشتق} = \frac{-3x^2(24)}{x^3} = \frac{-72}{x} \rightarrow f'(1) = -72$$

بنابراین اختلاف این دو برابر ۵۱ است.

۱۷۴.گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{(Lnu)' = \dfrac{u'}{u}\ ,\ (e^u)' = u' \cdot e^u}$

منظور از آهنگ لحظه‌ای تغییر y نسبت به x، همان مشتق y نسبت به x است.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-\sin x + 3x^2 - \frac{1}{x+1} + 6e^{2x-y}}{10y^4 + \frac{4}{4y+1} - 3e^{2x-y}} \xrightarrow{x=0\ ,\ y=0} = \frac{0+0-1+6}{0+4-3} = -5$$

۱۷۵.گزینه ۱ مختصات پای عمود به صورت $\begin{vmatrix} a \\ a^2 \end{vmatrix}$ است.

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow m_{\text{مماس}} = 2a \rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{2a}$$

$$\text{معادله‌ی خط قائم} : y - a^2 = \frac{-1}{2a}(x-a) \xrightarrow{\text{صدق}\ \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{17}{2} \end{vmatrix}} \frac{17}{2} - a^2 = \frac{-1}{2a}(-a)$$

$$\rightarrow \frac{17}{2} - a^2 = \frac{1}{2} \rightarrow a^2 = 8 \rightarrow a = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

۱۷۶.گزینه ۱ همه‌ی جملات را به یک طرف تساوی آورده و مشتق‌گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$۲\sin(x-y)+\sqrt{xy}+۲x^۲-۳y=۰$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲\cos(x-y)+\frac{۱(y)}{۲\sqrt{xy}}+۴x}{-۲\cos(x-y)+\frac{۱(x)}{۲\sqrt{xy}}-۳}\xrightarrow{x=۱\ ,\ y=۱} m_{\text{مماس}}=-\frac{۲+\frac{۱}{۲}+۴}{-۲+\frac{۱}{۲}-۳}=-\frac{\frac{۱۳}{۲}}{\frac{-۹}{۲}}=\frac{۱۳}{۹}$$

۱۷۷.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y=e^u\to y'=u'e^u\ ,\ (uv)'=u'v+v'u}$

ابتدا محل برخورد تابع با محور xها را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=۰\to\frac{x}{\sqrt{۳}}e^{\sin x}=۰\to x=۰$$

کافی است از تابع مشتق گرفته و مقدار مشتق را به ازای $x=۰$ بدست آوریم.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{۳}}e^{\sin x}\to f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{\sin x}+\cos x\cdot e^{\sin x}\cdot\frac{x}{\sqrt{۳}}$$

$$\to f'(۰)=\frac{۱}{\sqrt{۳}}+۰\to m_{\text{مماس}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\to\tan\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\to\theta=\frac{\pi}{۶}$$

۱۷۸.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{(Lnu)'=\frac{u'}{u}\ ,\ (e^u)'=u'\cdot e^u}$

شرط مشتق‌پذیر بودن تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی:}\begin{cases}\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}(ae^{۵x}+b)=a+b\\ \lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۰^-}Ln(e-x)=Lne=۱\Rightarrow a+b=۱\\ f(۰)=a+b\end{cases}$$

$$f'(۰^+)=f'(۰^-)\to ۵ae^{۵x}=\frac{-۱}{e-x}\to ۵a=\frac{-۱}{e}\to a=\frac{-۱}{۵e}$$

$$\xrightarrow{a+b=۱}\frac{-۱}{۵e}+b=۱\to b=۱+\frac{۱}{۵e}\to b=\frac{۵e+۱}{۵e}$$

پس $ab=\frac{-۵e-۱}{۲۵e^۲}$ است.

۱۷۹.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{Lna^n=nLna\ ,\ (Lnu)'=\frac{u'}{u}\ ,\ (e^u)'=u'\cdot e^u}$

$$۴Ln\sqrt{۲x-۱}+۳Ln\sqrt[۳]{۳y-۲}+e^{x-y}=۱\to ۴Ln(۲x-۱)^{\frac{۱}{۲}}+۳Ln(۳y-۲)^{\frac{۱}{۳}}+e^{x-y}=۱$$

$$\to ۲Ln(۲x-۱)+Ln(۳y-۲)+e^{x-y}=۱$$

اکنون مشتق گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲\times\frac{۲}{۲x-۱}+e^{x-y}}{\frac{۳}{۳y-۲}-e^{x-y}}\ \overset{x=۱\ ,\ y=۱}{=\!=\!=}\ -\frac{۴+e^۰}{۳-e^۰}=\frac{-۵}{۲}$$

۱۸۰.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{Lna^n=nLna\ ,\ Lna+Lnb=Lnab\ ,\ (Lnu)'=\frac{u'}{u}}$

ابتدا تابع داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=Ln\frac{\sqrt[۳]{۳x-۵}}{x^۲+۲x-۷}=Ln\sqrt[۳]{۳x-۵}-Ln(x^۲+۲x-۷)=\frac{۱}{۳}Ln(۳x-۵)-Ln(x^۲+۲x-۷)$$

$$y'=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۳x-۵}-\frac{۲x+۲}{x^۲+۲x-۷}\xrightarrow{x=۲}m_{\text{مماس}}=۱-۶=-۵\to m_{\text{قائم}}=\frac{۱}{۵}$$

۱۸۱. گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{(Lnu)'=\frac{u'}{u}, Lna+Lnb=Lnab, Ln\frac{a}{b}=Lna-Lnb, Lna^n=nLna}$

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$y=Ln\frac{\sqrt[۳]{۴x-۳}}{(x^۲+x-۱)(۳x-۲)}=Ln\sqrt[۳]{۴x-۳}-Ln(x^۲+x-۱)(۳x-۲)$$

$$=\frac{۱}{۳}Ln(۴x-۳)-Ln(x^۲+x-۱)-Ln(۳x-۲)$$

$$۱)x=۱\to y=\frac{۱}{۳}Ln۱-Ln۱-Ln۱=۰\to A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$$

$$۲)y'=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۴x-۳}-\frac{۲x+۱}{x^۲+x-۱}-\frac{۳}{۳x-۲}\to m_{\text{مماس}}=\frac{۴}{۳}-۳-۳=\frac{-۱۴}{۳}$$

$$۳)y-۰=\frac{-۱۴}{۳}(x-۱)\to ۳y=-۱۴x+۱۴\to y=\frac{-۱۴}{۳}x+\frac{۱۴}{۳}\xrightarrow{x=۰}y=\frac{۱۴}{۳}$$

۱۸۲. گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)}$

از روی شکل مشخص است که $f(۰)=۲$ و $\lim_{x\to ۰} f(x)=-۲$ است.

$$g'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳xf(x)-۰}{x}=\lim_{x\to ۰}۳f(x)=۳(-۲)=-۶$$

۱۸۳. گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳}$

$$x\sqrt{x}-y\sqrt{y}-۳x\sqrt{y}=-۳y\sqrt{x}\to x\sqrt{x}-۳x\sqrt{y}+۳y\sqrt{x}-y\sqrt{y}=۰$$

$$\to(\sqrt{x}-\sqrt{y})^۳=۰\to\sqrt{x}-\sqrt{y}=۰\to\sqrt{x}=\sqrt{y}\to y=x\to y'=۱$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای همان مشتق است.

۱۸۴. گزینه ۴

$$y'=-\frac{۳x^۲y^۲+\frac{y}{۲\sqrt{xy}}}{۲yx^۳+\frac{x}{۲\sqrt{xy}}+۱۰y^۴}\xrightarrow{x=۱\ ,\ y=۱}m_{\text{مماس}}=-\frac{۳+\frac{۱}{۲}}{۲+\frac{۱}{۲}+۱۰}=-\frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{۲۵}{۲}}=-\frac{۷}{۲۵}$$

معادله‌ی خط مماس: $y-۱=-\frac{۷}{۲۵}(x-۱)\Rightarrow y-۱=-\frac{۷}{۲۵}x+\frac{۷}{۲۵}\Rightarrow y=-\frac{۷}{۲۵}x+\frac{۳۲}{۲۵}$

۱۸۵. گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{(uv)'=u'v+v'u}$

عبارت نوشته شده، مشتق حاصل‌ضرب دو تابع است بنابراین دو تابع را درهم ضرب کرده و سپس مشتق می‌گیریم.

$$f(x)\cdot g(x)=\sqrt[۳]{\frac{(x^۲+۲)^۲}{(۵x^۲-۱)^۲}}\times\sqrt[۳]{\frac{x^۲+۲}{۵x^۲-۱}}=\sqrt[۳]{\frac{(x^۲+۲)^۳}{(۵x^۲-۱)^۳}}=\frac{x^۲+۲}{۵x^۲-۱}$$

$$\to (f(x)\cdot g(x))'=\frac{۲x(۵x^۲-۱)-۱۰x(x^۲+۲)}{(۵x^۲-۱)^۲}=\frac{-۲۲x}{(۵x^۲-۱)^۲}$$

۱۸۶.گزینه ۱

$$f(x)=(\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۳x+۱}})^۳\Rightarrow f'(x)=۳(\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۳x+۱}})^۲(\frac{۲\times(\sqrt{۳x+۱})-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}(x^۲+۱)}{(\sqrt{۳x+۱})^۲})$$

$$\Rightarrow f'(۱)=۳(\frac{۲}{۲})^۲(\frac{۲(۲)-\frac{۳}{۴}(۲)}{۴})=۳(\frac{۵}{۸})=\frac{۱۵}{۸}$$

۱۸۷.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{Lna^n=nLna\quad,\quad (Lnu)'=\frac{u'}{u}}$

$$y=Ln\sqrt{۱+\cos x}=Ln(۱+\cos x)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}Ln(۱+\cos x)$$

$$۱)\ x=\frac{\pi}{۲}\to y=Ln۱=۰\to A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۲}\\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y'=\frac{۱}{۲}\times\frac{-\sin x}{۱+\cos x}\to m_{\text{مماس}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{-۱}{۱}=\frac{-۱}{۲}$$

$$۳)\ y-۰=\frac{-۱}{۲}(x-\frac{\pi}{۲})\to ۲y=-x+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۴y+۲x=\pi$$

۱۸۸.گزینه ۳

$$\text{شیب خط عمود}=\tan ۱۳۵^\circ=\tan(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan ۴۵^\circ=-۱$$

$$\text{شیب خط مماس}=۱\to y'=۱\to x^۲+x-۱=۱$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۲=۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=-۲\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=۱}y=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}-۱=\frac{۲+۳-۶}{۶}\Rightarrow A(۱,\frac{-۱}{۶})$$

معادله‌ی خط قائم برابر می‌شود با:

$$y-(-\frac{۱}{۶})=-۱(x-۱)\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}}y+\frac{۱}{۶}=-(۰-۱)\Rightarrow y=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

۱۸۹.گزینه ۲

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲+۱}=\frac{(۸+۴)-(-۱-۲)}{۳}=\frac{۱۲+۳}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$

۱۹۰.گزینه ۲

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۱}}{۸}=\frac{۳-۱}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

۱۹۱.گزینه ۳

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=\text{مشتق}\to f'(x)=۲\cos ۲x\to f'(\frac{\pi}{۶})=۲\cos\frac{\pi}{۳}=۲(\frac{۱}{۲})=۱$$

۱۹۲.گزینه ۳

$$۱)\ x=۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y=\frac{۱}{۲} \to A\left|\begin{matrix}۲\\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y=\frac{۱}{x} \to y'=\frac{-۱}{x^۲} \to m_{\text{مماس}}=-\frac{۱}{۴} \to m_{\text{قائم}}=۴$$

$$۳)\ y-\frac{۱}{۲}=۴(x-۲) \to y-\frac{۱}{۲}=۴x-۸ \to y=۴x-۷/۵$$

۱۹۳.گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\underset{\text{شرط پیوستگی}}{x=۱}\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(ax^۲+bx+۲)=a+b+۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۱۶x-۹)=۱۶-۹=۷ \quad\Rightarrow\quad a+b+۲=۷ \Rightarrow a+b=۵\\ f(۱)=a+b+۲\end{cases}$$

$$f'(۱^+)=f'(۱^-) \to ۲ax+b=۱۶ \to ۲a+b=۱۶$$

$$\text{پس}:\begin{cases}a+b=۵\\ ۲a+b=۱۶\end{cases} \to\ a=۱۱\ ,\ b=-۶ \to a-b=۱۷$$

۱۹۴.گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که: ۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد. ۲) مشتق‌های راست و چپ در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی}:\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax^۲+bx+۱)=۴a+۲b+۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} x^۳=۸ \qquad \to ۴a+۲b+۱=۸ \to ۴a+۲b=۷\\ f(۲)=۴a+۲b+۱\end{cases}$$

$$f'(۲^+)=f'(۲^-) \to ۲ax+b=۳x^۲ \to ۴a+b=۱۲ \xrightarrow{۴a+۲b=۷} a=\frac{۱۷}{۴}\quad ,\quad b=-۵$$

۱۹۵.گزینه ۲ می دانیم: $\boxed{(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^۲}\ ,\ (\frac{۱}{x})'=\frac{-۱}{x^۲}}$

$$f(x)=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{x}} \to f'(x)=\frac{۰(۱+\frac{۱}{x})-(\frac{-۱}{x^۲})(۱)}{(۱+\frac{۱}{x})^۲} \to f'(-\frac{۱}{۲})=\frac{۰-(-۴)(۱)}{(-۱)^۲}=\frac{۴}{۱}=۴$$

۱۹۶.گزینه ۴

$$۱)\ x=۲ \to y=۱ \to A\left|\begin{matrix}۲\\ ۱\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y=\frac{۲}{x} \to y'=\frac{-۲}{x^۲} \to m_{\text{مماس}}=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲} \to m_{\text{قائم}}=۲$$

$$۳)\ y-y_۱=m(x-x_۱) \to y-۱=۲(x-۲) \to y=۲x-۳$$

۱۹۷.گزینه ۱ اگر دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند آن‌گاه $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$ است.

$$f(۱)=g(۱) \to a+۲=۱+b \to a-b=-۱ \quad \star$$

$$f'(۱)=g'(۱) \to ۲ax+۲=۱ \to ۲a+۲=۱ \to ۲a=-۱ \to a=\frac{-۱}{۲} \overset{\star}{\to} b=\frac{۱}{۲}$$

۱۹۸.گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{y=e^u \to y'=u'.e^u\ ,\ y=Lnu \to y'=\frac{u'}{u}}$

شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن است که تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در $x=a$ باهم برابر باشند

$$\underset{\text{پیوستگی}}{x=0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{ax}-e^{bx})=e^0-e^0=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} Ln(1-2ax)=Ln1=0\\ f(0)=e^0-e^0=0\end{cases}\Rightarrow \text{تابع در } x=0 \text{ پیوسته است.}$$

$$x>0\to f(x)=e^{ax}-e^{bx}\to f'(x)=ae^{ax}-be^{bx}\to f'(0^+)=ae^0-be^0=a-b$$

$$x<0\to f(x)=Ln(1-2ax)\to f'(x)=\frac{-2a}{1-2ax}\to f'(0^-)=\frac{-2a}{1-0}=-2a$$

$$\text{پس}:\ a-b=-2a\to 3a=b\to \frac{b}{a}=3$$

۱۹۹.گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{(25-4)-(1-2)}{4}=\frac{22}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x=1=f'(1)=2x-\frac{1(3)}{2\sqrt{3x+1}}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$\text{پس}:\ \frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه‌ای}}=\frac{\frac{22}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{22}{5}=4/4$$

۲۰۰.گزینه ۳ اگر دو تابع f و g برهم مماس باشند معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}(x-b)\\ y=\sqrt{x}\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}\frac{1}{2}(x-b)=\sqrt{x}\to x-b=2\sqrt{x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^2+b^2-2bx=4x$$

$$\to x^2-2bx-4x+b^2=0\to x^2-2(b+2)x+b^2=0:\quad \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}:\Delta=0\to b^2-4ac=0\to 4(b+2)^2-4b^2=0\to (b+2)^2-b^2=0$$

$$\to b^2+4+4b-b^2=0\to 4b=-4\to b=-1$$

۲۰۱.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\ ,\quad y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=2\to f'(-1)=2$$

$$y=f(\tan\pi x-1)\to y'=\pi(1+\tan^2\pi x)f'(\tan\pi x-1)$$

$$\to y'(1)=\pi(1+\underbrace{\tan^2\pi}_{0})f'(\underbrace{\tan\pi}_{0}-1)=\pi f'(-1)=2\pi$$

۲۰۲.گزینه ۲ می‌دانیم : $\boxed{y=Lnu\to y'=\frac{u'}{u}\ ,\quad Lna^n=nLna}$

$$y=Ln(Ln\frac{1}{x})=Ln(Lnx^{-1})=Ln(-Lnx)\Rightarrow y'=\frac{\frac{-1}{x}}{-Lnx}=\frac{1}{xLnx}$$

۲۰۳.گزینه ۲ کافی است از عامل صفر شونده که از مرتبه‌ی دوم هست دو بار مشتق بگیریم و سپس $x=4$ را جایگزین کنیم.

$$(x-4)^2\xrightarrow{\text{مشتق}}2(x-4)\xrightarrow{\text{مشتق}}2\to f''(2)=2\sqrt{4}=2(2)=4$$

۲۰۴.گزینه ۳

$$f(x)=\circ \to \tan x=\circ \to \frac{\sin x}{\cos x}=\circ \to \sin x=\circ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

تانژانت زاویه‌ی منحنی با جهت مثبت محور xها (α) برابر است با: $\tan\alpha=f'(x)$

$$f(x)=\tan x \to f'(x)=۱+\tan^۲ x \to f'(k\pi)=۱+\underbrace{\tan^۲ k\pi}_{\circ} \to f'(k\pi)=۱$$

$$\to \tan\alpha=۱ \to \alpha=\frac{\pi}{۴}$$

۲۰۵. گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند:

شرط پیوستگی:
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}(۳x+۷)=۳a+۷\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(x^۲+۹)=a^۲+۹ \to a^۲+۹=۳a+۷\\ f(a)=۳a+۷\end{cases}$$

$$\to a^۲-۳a+۲=\circ \to (a-۱)(a-۲)=\circ \to a=۱, a=۲$$

$$a=۱ \to \begin{cases} f'(۱^+)=۳\\ f'(۱^-)=۲x=۲\end{cases} \quad , \quad a=۲ \to \begin{cases} f'(۲^+)=۳\\ f'(۲^-)=۲x=۴\end{cases}$$

چون مشتق‌های راست و چپ در هر دو حالت با هم برابر نمی‌باشند پس تابع به ازای هیچ مقدار a در R مشتق‌پذیر نیست.

۲۰۶. گزینه ۴ ابتدا مشخص می‌کنیم مقدار تابع در کدام نقطه برابر صفر است.

$$f(x)=\circ \to \tan^۲ x-\cot x=\circ \to \tan^۲ x=\cot x \to \tan^۲ x=\frac{۱}{\tan x}$$

$$\to \tan^۳ x=۱ \to \tan x=۱ \xrightarrow{\text{یکی از جواب‌ها}} x=\frac{\pi}{۴}$$

$$f(x)=\tan^۲ x-\cot x \to f'(x)=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)+(۱+\cot^۲ x)$$

$$\to f'(\frac{\pi}{۴})=۲(۱)(۱+۱)+(۱+۱)=۴+۲=۶$$

۲۰۷. گزینه ۲ ابتدا باید مشخص کنیم وقتی $x\to(\frac{۲}{۳})^-$ داخل قدر مطلق چه علامتی دارد.

$$\tan\pi x+\sqrt{۳} \xrightarrow{x\to(\frac{۲}{۳})^-} \tan(\frac{۲\pi}{۳})^-+\sqrt{۳}=(-\sqrt{۳})^-+\sqrt{۳}=\circ^- \to$$ داخل قدر مطلق منفی است

توجه کنید که $\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$ است . دقت کنید که به جز زوایای مرزی تانژانت با کمانش، نسبت مستقیم دارد یعنی: $\tan(\frac{۲\pi}{۳})^-=(-\sqrt{۳})^-$ و $\tan(\frac{۲\pi}{۳})^+=(-\sqrt{۳})^+$.

$$f(x)=ax(-\tan\pi x-\sqrt{۳})=-ax(\tan\pi x+\sqrt{۳})$$

$$\to f'(x)=-a(\tan\pi x+\sqrt{۳})+\pi(۱+\tan^۲\pi x)(-ax)$$

$$\xrightarrow{f'((\frac{۲}{۳})^-)=-۴\pi} -۴\pi=-a(\tan\frac{۲\pi}{۳}+\sqrt{۳})+\pi(۱+\tan^۲\frac{۲\pi}{۳})(\frac{-۲}{۳}a)$$

$$\to -۴\pi=-a(\circ)+\pi(۱+۳)(\frac{-۲}{۳}a) \to -۴\pi=\frac{-۸}{۳}\pi a \to ۱۲=۸a \to a=\frac{۳}{۲}$$

۲۰۸. گزینه ۴ نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ را روی منحنی به معادله‌ی $y=(x+۲)^۲$ در نظر می گیریم.

۱) $x=\alpha \xrightarrow{\text{تابع}} y=(\alpha+2)^2 \to A\left|\begin{matrix}\alpha\\(\alpha+2)^2\end{matrix}\right.$

۲) $y'=2(x+2)\to m_{\text{مماس}}=2(\alpha+2)$

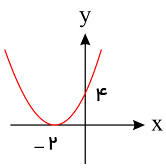
۳) معادله‌ی خط مماس : $y-(\alpha+2)^2=2(\alpha+2)(x-\alpha)$

حال، در معادله‌ی خط مماس نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ را صدق می‌دهیم.

$$0-(\alpha+2)^2=2(\alpha+2)(1-\alpha)\to2(\alpha+2)(1-\alpha)+(\alpha+2)^2=0$$
$$\to\underbrace{(\alpha+2)}_{\text{فاکتور}}(2(1-\alpha)+\alpha+2)=0\to(\alpha+2)(-\alpha+4)=0$$

$$\to\begin{cases}\alpha=-2\to\text{نقطه‌ی تماس :}\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.\\ \alpha=4\to\text{نقطه‌ی تماس:}\left|\begin{matrix}4\\36\end{matrix}\right.\to\text{مجموع طول و عرض}=4+36=40\end{cases}$$

نقطه‌ی تماس $\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$ قابل قبول نمی‌باشد زیرا در این نقطه، تابع $y=(x+2)^2$ بر محور xها مماس است و محور xها، خط مماس بر منحنی تابع است که محور xها را قطع نکرده بلکه بر آن منطبق است.به شکل $y=(x+2)^2$ توجه کنید:



۲۰۹.گزینه ۱ چون دو تابع در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع هستند کافی است در تابع $g(x)$ به‌جای عرض، $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ قرار دهیم تا طول نقطه‌ی برخورد دو تابع بدست آید.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}=32^{x-1}\to\frac{1}{2\times2^{\frac12}}=(2^5)^{x-1}\to2^{-\frac32}=2^{5x-5}\to5x-5=-\frac32\to5x=\frac72\to x=\frac{7}{10}$$

بنابراین محل برخورد دو تابع $(\frac{7}{10},\frac{1}{2\sqrt{2}})$ است کافی است این نقطه را در تابع f صدق دهیم تا a بدست آید.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}=(\frac12)^{\frac{7}{10}a-1}\to\frac{1}{2\times2^{\frac12}}=(2^{-1})^{\frac{7}{10}a-1}\to2^{-\frac32}=2^{-\frac{7}{10}a+1}$$

$$\to-\frac32=-\frac{7}{10}a+1\xrightarrow{\times10}-15=-7a+10\to-7a=-25\to a=\frac{25}{7}$$

بنابراین $f(x)=(\frac12)^{\frac{25}{7}x-1}$ است. وقتی گفته می‌شود $f^{-1}(x)$، خط $x=\frac{1}{16}$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند یعنی $f^{-1}(\frac{1}{16})$ را خواسته است و می‌دانیم وقتی $\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.\in f$ است آن‌گاه $\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.\in f^{-1}$ است کافی است مقداری از x را پیدا کنیم که به‌ازای آن $f(x)$ برابر با $\frac{1}{16}$ می‌شود.

$$\frac{1}{16}=(\frac12)^{\frac{25}{7}x-1}\to2^{-4}=2^{-\frac{25}{7}x+1}\to-4=-\frac{25}{7}x+1\to-\frac{25}{7}x=-5\to x=\frac75$$

۲۱۰.گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f(x)\cdot g(x))'}$

عبارت خواسته شده، مشتق حاصل ضرب دو تابع در $x=1$ است.

$$f(x)\cdot g(x)=(x^{۲}-x-۲)^{۲}\times(\frac{x+۲}{x+۱})^{۲}=((x-۲)(x+۱))^{۲}\times\frac{(x+۲)^{۲}}{(x+۱)^{۲}}$$

$$=(x-۲)^{۲}(x+۱)^{۲}\times\frac{(x+۲)^{۲}}{(x+۱)^{۲}}=(x-۲)^{۲}(x+۲)^{۲}=(x^{۲}-۴)^{۲}$$

پس : $(f(x)\cdot g(x))'=۲(x^{۲}-۴)(۲x)\overset{x=۱}{=\!=}\ ۲(-۳)(۲)=-۱۲$

۲۱۱.گزینه ۱ می دانیم: $\boxed{\begin{array}{l} y=f(u)\to y'=u'f'(u)\\ y=uv\to y'=u'v+v'u\end{array}}$

$$mAB=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{yB-yA}{xB-xA}=\frac{f(۲)-f(۲-h)}{۲-(۲-h)}=\frac{f(۲)-f(۲-h)}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲-h)}{h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(۲-h)}{۱}=f'(۲)$$

بنابراین کافی است که از تابع داده شده، مشتق بگیریم و $x=۲$ را در آن قرار دهیم.

$$f(x)=x\sin\pi x\to f'(x)=\sin\pi x+\pi x\cos\pi x\to f'(۲)=\sin ۲\pi+۲\pi\cos ۲\pi$$
$$=۰+۲\pi(۱)=۲\pi$$

۲۱۲.گزینه ۳

$$x\geq ۰\to f(x)=\sqrt{۴-۲x}\to f'(x)=\frac{۱(-۲)}{۲\sqrt{۴-۲x}}\to f'(۰^{+})=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲}$$

$$x<۰\to f(x)=\sqrt{۴+۲x}\to f'(x)=\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۴+۲x}}\to f'(۰^{-})=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

پس: $f'_{-}(۰)-f'_{+}(۰)=\frac{۱}{۲}-(\frac{-۱}{۲})=۱$

۲۱۳.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{Ln\frac{a}{b}=Lna-Lnb\quad ,\quad (Lnu)'=\frac{u'}{u}}$

ابتدا برای راحتی در مشتق‌گیری، تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=Ln\frac{۳x-۵}{x+۱}=Ln(۳x-۵)-Ln(x+۱)$$

$$۱)y=۰\to Ln\frac{۳x-۵}{x+۱}=۰\xrightarrow{Ln۱=۰}\frac{۳x-۵}{x+۱}=۱\to ۳x-۵=x+۱\to ۲x=۶\to x=۳:A\left|\begin{array}{l}۳\\۰\end{array}\right.$$

$$۲)y'=\frac{۳}{۳x-۵}-\frac{۱}{x+۱}\xrightarrow{x=۳}m_{\text{مماس}}=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}\to m_{\text{قائم}}=-۲$$

۳) معادله‌ی خط قائم $y-۰=-۲(x-۳)\to y=-۲x+۶$

گزینه‌ی سوم یعنی نقطه‌ی $(-۱,۸)$ در معادله‌ی خط قائم صدق می‌کند.

۲۱۴.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{(g(f(x)))'=f'(x)\cdot g'(f(x))}$

$$f(x)=\sqrt{x(x-۵)}\to f(x)=\sqrt{x^{۲}-۵x}$$

$$g(x)=\frac{۱}{۲+\frac{۱}{x}}\to g(x)=\frac{۱}{\frac{۲x+۱}{x}}\to g(x)=\frac{x}{۲x+۱}$$

$$\text{مشتق } g(f(x))=f'(x)\cdot g'(f(x))=f'(۹)\cdot g'(f(۹))=f'(۹)\cdot g'(۶)$$

از طرفی: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{۱(۲x-۵)}{۲\sqrt{x^۲-۵x}} \\ g'(x)=\dfrac{۲x+۱-۲x}{(۲x+۱)^۲}=\dfrac{۱}{(۲x+۱)^۲} \end{cases} \to f'(۹)\cdot g'(۶)=\dfrac{۱۳}{۱۲}\times\dfrac{۱}{۱۳^۲}=\dfrac{۱}{۱۵۶}$

۲۱۵.گزینه ۲ اگر y تابعی برحسب x و خود x تابعی برحسب t باشد برای مشتق‌گیری از y نسبت به t از y نسبت به x و از x نسبت به t مشتق گرفته و در هم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}=(۲\sin\pi\sqrt{x})(\frac{\pi}{۲\sqrt{x}})(\cos\pi\sqrt{x})(۲t)=(\frac{۲\pi t}{\sqrt{x}})(\sin\pi\sqrt{x})(\cos\pi\sqrt{x})$$

$$\xrightarrow{t=\frac{۵}{۴}\to x=\frac{۲۵}{۱۶}-۱=\frac{۹}{۱۶}}\frac{dy}{dt}\overset{t=\frac{۵}{۴}}{=\!=\!=}(\frac{۲\pi(\frac{۵}{۴})}{\frac{۳}{۴}})(\sin\frac{۳\pi}{۴})(\cos\frac{۳\pi}{۴})$$

$$=(\frac{۱۰\pi}{۳})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=\frac{-۵\pi}{۳}$$

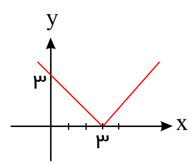
۲۱۶.گزینه ۱ توابع به شکل $y=|ax+b|$ در $x=\dfrac{-b}{a}$ (ریشه‌ی داخل قدر مطلق) مشتق‌ناپذیر هستند و مشتق‌های راست و چپ آن ها در $x=\dfrac{-b}{a}$ برابر a و $-a$ هستند با این توضیحات دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

($x=۲$ ریشه‌ی داخل قدر مطلق یعنی $\dfrac{-b}{a}$ است)

$$a=۳\ ,\ -\frac{b}{a}=۲\to-\frac{b}{۳}=۲\to b=-۶$$
$$a=-۳\ ,\ -\frac{b}{a}=۲\to\frac{-b}{-۳}=۲\to b=۶$$

برای درک بیشتر مسأله، تابع $f(x)=|x-۳|$ را در نظر بگیرید که ریشه‌ی داخل قدر مطلق، $x=۳$ است.

$$\begin{matrix} x=۳^+ : f(x)=x-۳\to f'(۳^+)=۱ \\ x\to۳^- : f(x)=-x+۳\to f'(۳^-)=-۱ \end{matrix}\Rightarrow$$



همانطور که مشاهده می‌کنید در $x=۳$ (ریشه‌ی داخل قدر مطلق) مشتق‌های راست و چپ برابر ۱ و -۱ هستند.

۲۱۷.گزینه ۳

$$f(x)=(۶x+۲)^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{(۶x+۲)^۲}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{آهنگ متوسط}=\dfrac{f(\frac{۲۵}{۶})-f(۱)}{\frac{۲۵}{۶}-۱}=\dfrac{\sqrt[۳]{۲۷^۲}-\sqrt[۳]{۶۴}}{\frac{۱۹}{۶}}=\dfrac{۹-۴}{\frac{۱۹}{۶}}=\dfrac{۳۰}{۱۹} \\ \text{آهنگ لحظه‌ای}=\text{مشتق}=\dfrac{۲(۶)}{۳\sqrt[۳]{۶x+۲}}\to f'(۱)=\dfrac{۱۲}{۳\sqrt[۳]{۸}}=\dfrac{۱۲}{۶}=۲ \end{matrix}\right\}\to ۲-\frac{۳۰}{۱۹}=\frac{۸}{۱۹}$$

۲۱۸.گزینه ۲ اگر دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند داریم: $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$.

$$f(۲)=g(۲)\to۴a-۲b+۲=۲b-۶\to۴a-۴b=-۸$$
$$f'(۲)=g'(۲)\to۲ax-b=b\xrightarrow{x=۲}۴a-۲b=۰$$

از حل دستگاه $a=۲$ و $b=۴$ بدست می‌آید.

۲۱۹.گزینه ۳ می دانیم: $\boxed{y=fog(x)\to y'=g'(x).f'(g(x))\ ,\ \sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}\ ,\ ۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}}$

ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}=\sqrt{\tan\frac{x}{۲}}$$

$$f(g(x))\ \text{مشتق}=g'(x).f'(g(x))\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}}g'(\frac{\pi}{۳}).f'(g(\frac{\pi}{۳}))$$

$$=g'(\frac{\pi}{۳}).f'(\pi\cos\frac{\pi}{۳})=g'(\frac{\pi}{۳}).f'(\frac{\pi}{۲})$$

از طرفی:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{\tan\frac{x}{۲}}\to f'(x)=\dfrac{\frac{۱}{۲}(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})}{۲\sqrt{\tan\frac{x}{۲}}}\to f'(\frac{\pi}{۲})=\dfrac{\frac{۱}{۲}(۱+۱)}{۲\sqrt{۱}}=\dfrac{۱}{۲} \\ g(x)=\pi\cos x\to g'(x)=-\pi\sin x\to g'(\frac{\pi}{۳})=-\pi\sin\frac{\pi}{۳}=\dfrac{-\pi\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

پس: $g'(\frac{\pi}{۳}).f'(\frac{\pi}{۲})=(\frac{-\pi\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۱}{۲})=\frac{-\pi\sqrt{۳}}{۴}$

۲۲۰.**گزینه ۳** می‌دانیم: $\boxed{y=Ln|u|\to y'=\frac{u'}{u}}$

$$f(x)=Ln(\underbrace{Ln|۲x|}_{u})\to f'(x)=\frac{(Ln|۲x|)'}{Ln|۲x|}=\frac{\frac{۲}{۲x}}{Ln|۲x|}=\frac{۱}{xLn|۲x|}$$

$$\to f'(\frac{e}{۲})=\frac{۱}{\frac{e}{۲}Ln\left|۲(\frac{e}{۲})\right|}=\frac{۱}{\frac{e}{۲}\underbrace{Ln|e|}_{۱}}=\frac{۱}{\frac{e}{۲}}=\frac{۲}{e}$$

۲۲۱.**گزینه ۳** می‌دانیم: $\boxed{(f(u))'=u'\cdot f'(u)}$

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(\sqrt{۲})-f(\sqrt{۲}-h)}{h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰^-}\frac{f'(\sqrt{۲}-h)}{۱}=f'((\sqrt{۲})^+)$$

$$x\to(\sqrt{۲})^+\Rightarrow f(x)=x^۲[۲^+]=۲x^۲\to f'(x)=۴x\to f'((\sqrt{۲})^+)=۴\sqrt{۲}$$

۲۲۲.**گزینه ۳** می‌دانیم: $\boxed{(e^u)'=u'\cdot e^u}$

ابتدا تمام جملات را به یک طرف تساوی آورده و سپس مشتق‌گیری ضمنی انجام می‌دهیم.

$$۲\tan\frac{\pi}{x}+y-e^{x-۲y}-۳=۰$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-\frac{۲\pi}{x^۲}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{x})-e^{x-۲y}}{۱+۲e^{x-۲y}}\xrightarrow{x=۴\ ,\ y=۲}y'=-\frac{-\frac{۲\pi}{۱۶}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})-e^۰}{۱+۲e^۰}$$

$$=-\frac{-\frac{\pi}{۸}(۱+۱)-۱}{۱+۲}=-\frac{-\frac{\pi}{۴}-۱}{۳}=\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۱}{۳}$$

این مقدار بدست آمده، از $\frac{۱}{۳}$ بیشتر است $\frac{\pi}{۱۲}$.

۲۲۳.**گزینه ۱** می‌دانیم: $\boxed{y=a^u\to y'=u'a^uLna\ ,\ nLna=Lna^n}$

ابتدا نقطه‌ی تلاقی تابع داده شده را با محور xها $(y=۰)$ بدست می‌آوریم.

$$۲^x-۲=۰\ \to ۲^x=۲\to x=۱$$

$\tan\alpha$ همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۱$ است $(f'(۱))$

$$f(x)=۲^x-۲\to f'(x)=(۱)(۲^x)(Ln۲)\to f'(۱)=۲Ln۲=Ln۲^۲=Ln۴$$

۲۲۴.**گزینه ۲** می‌دانیم: $\boxed{\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a}$

$$f(x)=\sin^{۳}x\cdot\cos^{۳}x=(\sin x\cdot\cos x)^{۳}=(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^{۳}=\frac{۱}{۸}\sin^{۳}۲x$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۸}(۳\sin^{۲}۲x)(۲)(\cos ۲x)=\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x\cdot\cos ۲x$$

$$\rightarrow f'(\frac{\pi}{۳})=\frac{۳}{۴}(\sin^{۲}\frac{۲\pi}{۳})\cdot(\cos\frac{۲\pi}{۳})=\frac{۳}{۴}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}\cdot(\frac{-۱}{۲})=\frac{-۹}{۳۲}$$

۲۲۵.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{(a^u)'=u'\cdot a^u\cdot Lna:\quad a>\text{با شرطه}}$

ابتدا باید مقدار عددی جزء صحیح را مشخص کرده و سپس مشتق بگیریم.

$$x\rightarrow ۰^{+}:[x]=۰\rightarrow f(x)=۰\rightarrow f'(x)=۰\rightarrow f'_{+}(۰)=۰$$

$$x\rightarrow ۰^{-}:[x]=-۱\rightarrow f(x)=-(۲^{x}-۱)=۱-۲^{x}\rightarrow f'(x)=-۲^{x}\cdot Ln۲\rightarrow f'_{-}(۰)=-Ln۲$$

$$\text{پس}: f'_{-}(۰)-f'_{+}(۰)=-Ln۲-۰=-Ln۲$$

۲۲۶.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{y=Lnu\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$

در رابطه‌ی داده شده به جای y صفر می‌گذاریم و مقدار منفی x را قبول می‌کنیم.

$$y=۰\rightarrow ۲x^{۲}+۰=۲+\underbrace{Ln۱}_{\text{صفر}}\rightarrow ۲x^{۲}=۲\rightarrow x^{۲}=۱\xrightarrow{x<۰}x=-۱$$

$$۲x^{۲}+\sin ۲y-۲-Ln(۱+y^{۲})=۰\rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۴x}{۲\cos ۲y-\frac{۲y}{۱+y^{۲}}}$$

$$\xrightarrow{x=-۱\,,\,y=۰}\quad -\frac{۴(-۱)}{۲(۱)-۰}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۲۲۷.گزینه ۳ $x=۱$ را در رابطه‌ی داده شده قرار می دهیم تا عرض نقطه بدست آید.

$$۱)x=۱\rightarrow y^{۲}+y-۶=۰\rightarrow(y+۳)(y-۲)=۰\rightarrow\begin{cases}y=۲\ (\text{ربع اول})\ \text{غ.ق}\\ y=-۳\ (\text{ربع چهارم})\ \text{ق.ق}\end{cases}\rightarrow A\left|\begin{matrix}۱\\-۳\end{matrix}\right.$$

$$۲)y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲xy^{۲}+y}{۲x^{۲}y+x}\rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{۱۸-۳}{-۶+۱}=\frac{-۱۵}{-۵}=۳\rightarrow m_{\text{قائم}}=\frac{-۱}{۳}$$

$$۳)y+۳=\frac{-۱}{۳}(x-۱)\xrightarrow{x=۰}y=\frac{۱}{۳}-۳-\frac{-۸}{۳}$$

۲۲۸.گزینه ۱ هر خطی موازی محور xهاست شیبش برابر صفر است.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-y+۲x}{۲y-x}=۰\rightarrow y=۲x$$

اکنون در معادله‌ی منحنی به جای y، $۲x$ را قرار می‌دهیم.

$$(۲x)^{۲}-x(۲x)+x^{۲}=۳\rightarrow ۳x^{۲}=۳\rightarrow x^{۲}=۱\rightarrow x=\pm ۱\xrightarrow{x>۰}x=۱$$

۲۲۹.گزینه ۳

$$x=\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow u=\underbrace{[\sin\frac{۳\pi}{۲}]}_{-۱}(\frac{۳\pi}{۲})-\cos\frac{۳\pi}{۲}-۰=-\frac{۳\pi}{۲}-۰=-\frac{۳\pi}{۲}$$

به خاطر وجود گزینه‌ی چهارم باید پیوستگی تابع u را در $x=\frac{۳\pi}{۲}$ بررسی کنیم زیرا اگر تابع u در $x=\frac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته باشد مشتق وجود ندارد.

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})} u=\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{+}\right]\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\frac{3\pi}{2}=\left[(-1)^{+}\right]\left(\frac{3\pi}{2}\right)-0=-\frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^{-}} u=\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{-}\right]\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\frac{3\pi}{2}=\left[(-1)^{+}\right]\left(\frac{3\pi}{2}\right)-0=-\frac{3\pi}{2}$$

$$u\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{2}$$

بناراین تابع در $x=\frac{3\pi}{2}$ پیوسته است. (دقت کنید در مسائل حدی وقتی سینوس و کسینوس (-1) هستند حتما $(-1)^{+}$ هستند زیرا سینوس و کسینوس نمیتوانند $(-1)^{-}$ باشند)

حال، مشتق راست و چپ تابع u را در $x=\frac{3\pi}{2}$ حساب می کنیم.

$$x>\frac{3\pi}{2}\to u=\left[(-1)^{+}\right]x-\cos x=-x-\cos x\to u'=-1+\sin x\xlongequal{x=\frac{3\pi}{2}}-1-1=-2$$

$$x<\frac{3\pi}{2}\to u=\left[(-1)^{+}\right]x-\cos x=-x-\cos x\to u'=-1+\sin x\xlongequal{x=\frac{3\pi}{2}}-1-1=-2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(2u-2)(-1+\sin x)=\left(2\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-2\right)(-1-1)=(-3\pi-2)(-2)=6\pi+4$$

۲۳۰. **گزینه ۴** می‌دانیم: $\boxed{(Lnu)'=\frac{u'}{u}}$

$$Ln\left(\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}x^2\right)+x+1-\sqrt{y+1}=0$$

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\dfrac{\frac{-1}{2}x}{\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}x^2}+1}{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}}\to m_{\text{مماس}}=-\frac{-1+1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=0$$

معادله‌ی خط مماس : $y-y_1=m(x-x_1)\to y-8=0(x-2)\to y=8$

نیمساز ربع دوم $y=-x$ است پس طول برخورد این دو خط برابر است با:

$$\begin{cases}y=8\\ y=-x\end{cases}\to -x=8\to x=-8$$

۲۳۱. **گزینه ۲**

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{16+2a-(1+a)}{3}=\frac{15+a}{3}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x=1=f'(1)=2x+\frac{a}{2\sqrt{x}}=2+\frac{a}{2}$$

$$\text{آهنگ متوسط}=2\times\text{آهنگ لحظه‌ای}\to\frac{15+a}{3}=2\left(2+\frac{a}{2}\right)\to\frac{15+a}{3}=4+a$$

$$\to 15+a=12+3a\to 2a=3\to a=\frac{3}{2}$$

۲۳۲.گزینه ۴   می‌دانیم: $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)}$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(۴)-f(x)}{۴-x}=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$$

$$f(x)=(\frac{\sqrt{x}}{x-۳})^{۳}\to f'(x)=۳(\frac{\sqrt{x}}{x-۳})^{۲}(\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-۳)-۱(\sqrt{x})}{(x-۳)^{۲}})$$

$$\to f'(۴)=۳(\frac{۲}{۱})^{۲}(\frac{\frac{۱}{۴}(۱)-۲}{۱})=۳(۴)(\frac{-۷}{۴})=-۲۱$$

۲۳۳.گزینه ۲   می‌دانیم: $\boxed{y=e^{u}\to y'=u'e^{u}}$

شرط آن‌که تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته بوده و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ باهم برابر باشند.

شرط پیوستگی $x=۰$

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۰^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۰^{+}}(ae^{۲x}+۲b)=a+۲b\\ \lim_{x\to ۰^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۰^{-}}(a\sin ۳x+x)=۰ \qquad \Rightarrow a+۲b=۰\\ f(۰)=ae^{۰}+۲b=a+۲\end{cases}$$

$$f'(۰^{+})=f'(۰^{-})\to ۲ae^{۲x}=۳a\cos ۳x+۱\to ۲a=۳a+۱\to a=-۱,b=\frac{۱}{۲}$$

پس $a+b=\frac{-۱}{۲}$ است.

۲۳۴.گزینه ۴   می‌دانیم: $\boxed{\sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^{۲}a}}$

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}}=\sqrt{\sin ۲x}$$

حال، کافی است که مشتق $\sqrt{\sin ۲x}$ را بدست آوریم.

$$y'=\frac{۲\cos ۲x}{۲\sqrt{\sin ۲x}}=\frac{\cos ۲x}{\sqrt{\sin ۲x}}\to y'(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\cos\frac{\pi}{۶}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{۶}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۲۳۵.گزینه ۲   هر گاه y تابعی برحسب u و خود u تابعی بر حسب x باشد برای مشتق گیری از y نسبت به x کافی است از y نسبت به u و از u نسبت به x مشتق گرفته و در هم ضرب کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۳u+۲}+\frac{۱(۳)}{۳\sqrt[۳]{(۳u+۲)^{۲}}}\times\frac{u}{۲})(۲x+۲)$$

دقت کنید که وقتی $x=۱$ است $u=۱+۲-۱=۲$ است.

پس : $\frac{dy}{dx}=(\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۸}+\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}\times\frac{۲}{۲})(۲+۲)=(۱+\frac{۱}{۴})(۴)=\frac{۵}{۴}\times ۴=۵$

۲۳۶.گزینه ۱   ابتدا معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

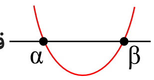
۱) $x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۱-۵+۷+۱=۴ \to A\left|\begin{matrix}۱\\ ۴\end{matrix}\right.$

۲) $y'=۳x^۲-۱۰x+۷ \to m_{\text{مماس}}=۳-۱۰+۷=۰$

۳) $y-۴=۰(x-۱)\to y=۴$: معادله‌ی خط مماس

اکنون برای محاسبه‌ی طول وتری که خط $y=۴$ روی سهمی داده شده ایجاد می‌کند باید معادله‌ی تلاقی را تشکیل دهیم.

$x^۲-۵x+۶=۴\to x^۲-۵x+۲=۰$: معادله‌ی تلاقی

دقت کنید که طول وتر ایجاد شده  قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی تلاقی است.

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{|۱|}=\sqrt{۲۵-۸}=\sqrt{۱۷}$$

۲۳۷.**گزینه ۲** ابتدا معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $۳۵+x^۳-۲y^۲x^۲+۲\sqrt{x}-y-۷۰=۰$ را بدست می‌آوریم.

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۳x^۲-۴xy^۲+۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{-۴yx^۲-۱}\xrightarrow{x=۴,y=۱} m_{\text{مماس}}=-\frac{۴۸-۱۶+\frac{۱}{۲}}{-۶۴-۱}=\frac{-۳۲٫۵}{-۶۵}=\frac{۱}{۲}$$

معادله‌ی خط مماس : $y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۴)\xrightarrow[\text{صدق}]{\left|\begin{matrix}۱۰\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right.}\alpha-۱=\frac{۱}{۲}(۱۰\alpha-۴)\to ۲\alpha-۲=۱۰\alpha-۴$

$$\to ۸\alpha=۲\to\alpha=\frac{۱}{۴}$$

۲۳۸.**گزینه ۳**

$$f(x)=\frac{۱}{\cos^۳\frac{\pi}{\sqrt{x}}}\to f'(x)=\frac{۰-(۳\cos^۲\frac{\pi}{\sqrt{x}})(\frac{۰-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\pi}{x})(-\sin\frac{\pi}{\sqrt{x}})}{\cos^۶\frac{\pi}{\sqrt{x}}}$$

$$\to f'(۳۶)=\frac{(-۳\cos^۲\frac{\pi}{۶})(\frac{-\frac{۱}{۱۲}\pi}{۳۶})(-\sin\frac{\pi}{۶})}{\cos^۶\frac{\pi}{۶}}=\frac{-۳(\frac{\pi}{۱۲\times۳۶})(\frac{۱}{۲})}{\cos^۴\frac{\pi}{۶}}=\frac{\frac{-۳\pi}{۱۲\times۳۶\times۲}}{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴}$$

$$=\frac{\frac{-\pi}{۴\times۳۶\times۲}}{\frac{۹}{۱۶}}=\frac{-۱۶\pi}{۸\times۹\times۳۶}=\frac{-\pi}{۱۶۲}$$

۲۳۹.**گزینه ۲** عبارت $\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ برابر $f'(۱)$ است. دقت کنید $\sin\pi x$ به ازای $x=۱$ برابر صفر است پس کافی است فقط از عامل صفرشونده مشتق گرفته و در بقیه‌ی عبارت عددگذاری کنیم.

$$f(x)=x^۲\sin\pi x\to f'(۱)=\pi\underbrace{\cos\pi x}_{-۱}\times(۱)^۲=-\pi$$

۲۴۰.گزینه ۴

$$\left[\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}\right] \text{ آهنگ متوسط در } = \frac{f(\frac{۱}{۲})-f(\frac{۱}{۳})}{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}} = \frac{۲-۳}{\frac{۱}{۶}} = -۶$$

$$x=\frac{۱}{۳} \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(\frac{۱}{۳}) \to f'(x) = -\frac{۱}{x^۲} \to f'(\frac{۱}{۳}) = \frac{-۱}{\frac{۱}{۹}} = -۹$$

واضح است که آهنگ متوسط ۳ واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

۲۴۱.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{Ln\frac{a}{b} = Lna - Lnb\,,\ \ (Lnu)' = \frac{u'}{u}}$

شرط مشتق‌پذیری تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

قبل از حل مسأله عبارت $Ln\frac{e^۲}{x}$ را بدین صورت ساده می‌کنیم:

$$Ln\frac{e^۲}{x} = Lne^۲ - Lnx = ۲ - Lnx \to f(x) = \begin{cases} ۲-Lnx & x>۱ \\ x^۲+ax+b & x\le ۱ \end{cases}$$

$$x=۱ \text{ شرط پیوستگی در } \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}(۲-Lnx) = ۲-Ln۱ = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+ax+b) = ۱+a+b \\ f(۱) = ۱+a+b \end{cases} \Rightarrow ۱+a+b=۲ \to a+b=۱$$

$$f'(۱^+) = f'(۱^-) \to -\frac{۱}{x} = ۲x+a \to -۱ = ۲+a \to a=-۳\ ,\ b=۴$$

۲۴۲.گزینه ۳ می‌دانیم که وقتی $x\notin \mathbb{Z}$ در این صورت $[x]+[-x]=-۱$ است.

$$f(x) = ([x]+[-x])\left|x^۲-x\right| \to f(x) = -|x(x-۱)|$$

دقت کنید که وقتی $x\to ۱^-$ داخل قدر مطلق منفی است.

$$f(x) = -(-x^۲+x) \to f(x) = x^۲-x \to f'(x) = ۲x-۱ \to f'(۱^-) = ۲(۱)-۱ = ۱$$

۲۴۳.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)}$

$$y=f(\sqrt{f(x)}) \to y' = \frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\ f'(\sqrt{f(x)}) \to y'(-۱) = \frac{f'(-۱)}{۲\sqrt{f(-۱)}} f'(\sqrt{f(-۱)})$$

$$\xrightarrow{f(-۱)=۱+۳=۴} y'(-۱) = \frac{f'(-۱)}{۴}\ \ f'(\sqrt{۴}) = \frac{۱}{۴} f^{-۱}(-۱)\cdot f'(۲)$$

$$\to \begin{cases} x=-۱ \to f(x) = x^۲-۳x \to f'(x) = ۲x-۳ \to f'(-۱) = -۲-۳ = -۵ \\ x=۲ \to f(x) = x^۲+۳x \to f'(x) = ۲x+۳ \to f'(۲) = ۴+۳ = ۷ \end{cases}$$

$$\text{پس}: y'(-۱) = \frac{۱}{۴} f'(-۱)\cdot f'(۲) = \frac{۱}{۴}(-۵)(۷) = -\frac{۳۵}{۴}$$

۲۴۴.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=e^u \to y' = u'\cdot e^u}$

$$۱)\ x=\circ \xrightarrow{\text{تابع}} y = \circ + e^\circ = ۱ \to A\left|\begin{matrix}\circ\\ ۱\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y = ۴x+e^{-۲x} \to y' = ۴-۲e^{-۲x} \xrightarrow{x=\circ} m_{\text{مماس}} = ۴-۲e^\circ = ۴-۲ = ۲ \to m_{\text{قائم}} = \frac{-۱}{۲}$$

$$۳)\ y-۱ = -\frac{۱}{۲}(x-\circ) \to ۲y-۲ = -x \to ۲y+x = ۲ \xrightarrow{ay+x=۲ \text{ مقایسه با }} a=۲$$

۲۴۵.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y=e^u \to y' = u'\cdot e^u}$

$$۱)\ x=۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y=\sqrt{e^{\circ}}=۱ \to A\Big|^{۱}_{۱}$$

$$۲)\ y'=\frac{(۱-۲x)e^{x-x^۲}}{۲\sqrt{e^{x-x^۲}}} \xrightarrow{x=۱} m_{\text{مماس}}=\frac{-e^{\circ}}{۲\sqrt{e^{\circ}}}=\frac{-۱}{۲} \to m_{\text{قائم}}=۲$$

$$۳)\ y-۱=۲(x-۱) \xrightarrow{x=\circ} y-۱=-۲ \to y=-۱$$

۲۴۶.گزینه ۲ عبارت $\lim\limits_{h\to\circ}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ تعریف مشتق در $x=۱$ است یعنی $f'(۱)$.

$$f(x)=\sqrt{x^۲+x} \to f'(x)=\frac{۱(۲x+۱)}{۲\sqrt{x^۲+x}} \to f'(۱)=\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

۲۴۷.گزینه ۴ اگر تابعی در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد الزاماً در $x_{\circ}$ پیوسته است.

۲۴۸.گزینه ۲ شرط مشتق پذیر بودن تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه، پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

شرط پیوستگی :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^+}\sqrt[۳]{(۵x-۲)^۲}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴\\ \lim\limits_{x\to۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۲^-}(ax+b)=۲a+b \qquad \Rightarrow ۲a+b=۴\\ f(۲)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴\end{cases}$$

تساوی مشتق‌های راست و چپ : $f'_+(۲)=f'_-(۲) \to \dfrac{۲(۵)}{۳\sqrt[۳]{۵x-۲}}=a \to a=\dfrac{۵}{۳}\ ,\ b=\dfrac{۲}{۳}$

۲۴۹.گزینه ۳

$$y=\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)^۳ \Rightarrow y'=۳\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)^۲\left(۱+\frac{۱(۲x)}{۲\sqrt{x^۲+۱}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۳}{۴}} y'=۳\left(\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}\right)^۲\left(۱+\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۲}}\right) \to y'=۳(۴)\left(\frac{۸}{۵}\right)=\frac{۹۶}{۵}=۱۹/۲$$

۲۵۰.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\sin u=۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}\ ,\ ۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}}$

$$y=\sqrt{\frac{f}{g}(x)}=\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}=\sqrt{\frac{\sin x}{۱+\cos x}}=\sqrt{\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}=\sqrt{\tan\frac{x}{۲}}$$

$$y'=\frac{\frac{۱}{۲}(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})}{۲\sqrt{\tan\frac{x}{۲}}} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} y'=\frac{\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۱}{۳})}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{۲\sqrt{۳^{-\frac{۱}{۲}}}}=\frac{\frac{۲}{۳}}{۲\times ۳^{-\frac{۱}{۴}}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}}{۳^{-\frac{۱}{۴}}}=\frac{۳^{-۱}}{۳^{-\frac{۱}{۴}}}=۳^{-۱+\frac{۱}{۴}}=۳^{-\frac{۳}{۴}}$$

۲۵۱.گزینه ۴

$$y=\sqrt[۳]{۱+\cos ۲x}\rightarrow y'=\frac{-۲\sin ۲x}{۳\sqrt[۳]{(۱+\cos ۲x)^۲}}$$

می‌دانیم $\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$ است بنابراین داریم:

$$y'(\frac{\pi}{۳})=\frac{-۲\,(\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}}=\frac{-\sqrt{۳}}{۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}}=\frac{-۱}{۳}\frac{\sqrt[۶]{۳^۳}}{\sqrt[۶]{(\frac{۱}{۴})^۲}}=\frac{-۱}{۳}\sqrt[۶]{\frac{۲۷}{\frac{۱}{۱۶}}}=\frac{-۱}{۳}\sqrt[۶]{۴۳۲}$$

بنابراین $A=۴۳۲$ است.

۲۵۲.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\cos ۲x}$

ضابطه‌ی تابع fog چنین است:

$$(fog)(x)=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\cos ۲x\rightarrow fog(\sqrt{x})=\cos ۲\sqrt{x}$$

مشتق تابع $\cos ۲\sqrt{x}$ برابر است با $-۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})\sin ۲\sqrt{x}=\frac{-۱}{\sqrt{x}}\sin ۲\sqrt{x}$ به ازای $x=\frac{\pi^۲}{۱۴۴}$ خواهیم داشت.

$$y'(\frac{\pi^۲}{۱۴۴})=-\frac{۱۲}{\pi}\sin\frac{\pi}{۶}=(\frac{-۱۲}{\pi})(\frac{۱}{۲})=\frac{-۶}{\pi}$$

۲۵۳.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{Ln\,a^n=nLn\,a\ ,\ \ Ln\,a-Ln\,b=Ln\frac{a}{b}\ ,\ \ y=Ln|u|\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$

ابتدا عبارت لگاریتمی را ساده می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم.

$$y=Ln\frac{|۲x-۵|}{\sqrt{x^۲+۱}}\rightarrow y=Ln|\overbrace{۲x-۵}^{-}|-Ln\sqrt{x^۲+۱}\rightarrow y=Ln(۵-۲x)-\frac{۱}{۲}Ln(x^۲+۱)$$

$$\rightarrow y'=\frac{-۲}{۵-۲x}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x}{x^۲+۱}\xrightarrow{x=۲}y'=-۲-\frac{۴}{۱۰}=-۲٫۴$$

۲۵۴.گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\boxed{Ln\frac{a}{b}=Ln\,a-Ln\,b\ ,\ \ Ln\,ab=Ln\,a+Ln\,b\ ,\ \ Ln\,a^n=nLn\,a\ ,\ \ y=Ln|u|\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$$

ابتدا عبارت لگاریتمی را ساده کرده سپس مشتق می‌گیریم:

$$y=Ln\frac{x^۲\cdot\sqrt{x+۲}}{(۲x+۱)^۳}\rightarrow y=Lnx^۲\cdot\sqrt{x+۲}-Ln(۲x+۱)^۳$$

$$\rightarrow y=Lnx^۲+Ln\sqrt{x+۲}-Ln(۲x+۱)^۳\rightarrow y=۲Lnx+\frac{۱}{۲}Ln(x+۲)-۳Ln(۲x+۱)$$

$$\rightarrow y'=\frac{۲}{x}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{x+۲}-۳\times\frac{۲}{۲x+۱}\xrightarrow{x=۲}y'=۱+\frac{۱}{۸}-\frac{۶}{۵}=\frac{-۳}{۴۰}$$

۲۵۵.گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\boxed{Ln\frac{a}{b}=Ln\,a-Ln\,b\ ,\ \ Ln\,ab=Ln\,a+Ln\,b\ ,\ \ Ln\,a^n=nLn\,a\ ,\ \ y=Ln|u|\rightarrow y'=\frac{u'}{u}}$$

ابتدا عبارت لگاریتمی را ساده کرده و سپس مشتق می‌گیریم.

صورت مسأله $\rightarrow y=Ln\,x\sqrt{x+۲}-Ln\sqrt[۳]{۴x}\rightarrow y=Ln\,x+\ Ln\ \sqrt{x+۲}-Ln\sqrt[۳]{۴x}$

$$\rightarrow y=Ln\,x+\ \frac{۱}{۲}\ Ln\ (x+۲)-\ \frac{۱}{۳}\ Ln\ ۴x$$

$$\to y' = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{x+۲} - \frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۴x} \xrightarrow{x=۲} y' = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱۲+۳-۴}{۲۴} = \frac{۱۱}{۲۴}$$

۲۵۶.گزینه ۳

$$f(x) = x^۲ + \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} \to f(x) = x^۲ + \sqrt{(x-۲)^۲} \to f(x) = x^۲ + |x-۲|$$

$$x = ۲^+ : f(x) = x^۲ + x - ۲ \to f'_+(۲) = ۲x + ۱ = ۵$$

$$x = ۲^- : f(x) = x^۲ - x + ۲ \to f'_-(۲) = ۲x - ۱ = ۳$$

پس $f'_+(۲) - f'_-(۲) = ۵ - ۳ = ۲$

۲۵۷.گزینه ۲

$$x \to (-۱)^- \xrightarrow{\text{داخل قدر مطلق منفی}} f(x) = x^۲ + \frac{x(x+۱)}{x+۱} = x^۲ + x \to f'(x) = ۲x + ۱ \to f'_-(-۱) = -۱$$

$$x \to (-۱)^+ \xrightarrow{\text{داخل قدر مطلق مثبت}} f(x) = x^۲ - \frac{x(x+۱)}{x+۱} = x^۲ - x \to f'(x) = ۲x - ۱ \to f'_+(-۱) = -۳$$

پس : $f'_-(-۱) - f'_+(-۱) = -۱ - (-۳) = ۲$

۲۵۸.گزینه ۳ باید مشتق گیری ضمنی انجام دهیم.

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x - y + ۲}{۴y - x} \xrightarrow{x=۱\ ,\ y=۲} y' = -\frac{۲-۲+۲}{۸-۱} = -\frac{۲}{۷}$$

۲۵۹.گزینه ۴

$$y = (۲x-۱)^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow y' = \frac{۲}{۳}(۲x-۱)^{\frac{-۲}{۳}} \Rightarrow y'' = -\frac{۸}{۹}(۲x-۱)^{-\frac{۵}{۳}} \Rightarrow y^{(۳)} = \frac{۸۰}{۲۷}(۲x-۱)^{-\frac{۸}{۳}} \xrightarrow{x=۱} y^{(۳)}$$

$$= \frac{۸۰}{۲۷}$$

۲۶۰.گزینه ۱

$$۱)\ x = -۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y = -۵ \to A\left|\begin{matrix} -۲ \\ -۵ \end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y' = \frac{۲(x+۳) - ۱\ (۲x-۱)}{(x+۳)^۲} = \frac{۷}{(x+۳)^۲} \to m_{\text{مماس}} = ۷$$

$$۳)\ y + ۵ = ۷(x+۲) \to y = ۷x + ۹$$

۲۶۱.گزینه ۱

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{۱(y)}{۲\sqrt{xy}} - ۱}{۲ + \frac{۱(x)}{۲\sqrt{xy}}} \xrightarrow{\left|\begin{matrix} -۲ \\ \frac{-۱}{۲} \end{matrix}\right.} m_{\text{مماس}} = -\frac{-\frac{۱}{۴} - ۱}{۲ - ۱} = \frac{۵}{۴}$$

حال با داشتن شیب و نقطه، معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

$$y + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۴}(x+۲) \to ۴y + ۲ = ۵x + ۱۰ \to ۴y - ۵x = ۸$$

۲۶۲.گزینه ۳ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۴ \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$ را بدست می‌آوریم.

$$mAB = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۴-۲}{۱-۳} = -۱ \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}} = -۱$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر -۱ قرار دهیم.

$$y' = -۱ \to ۲x - ۳ = -۱ \to ۲x = ۲ \to x = ۱$$

۲۶۳.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{y=uv\to y'=u'v+v'u}$

$$۱)\ x=۳ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۳\to A\left|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}\right.$$

$$۲)\ y'=\sqrt[۳]{۲x-۵}+\frac{۱\,(۲)}{۳\sqrt[۳]{(۲x-۵)^۲}}\,(x)\to m_{\text{مماس}}=۱+۲=۳\to m_{\text{قائم}}=\frac{-۱}{۳}$$

$$۳)\ y-۳=\frac{-۱}{۳}(x-۳)\xrightarrow{x=۰} y-۳=۱\to y=۴$$

۲۶۴.گزینه ۱

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲x+\dfrac{۱\,(۱)}{۲\sqrt{x+۲y}}}{\dfrac{۱\,(۲)}{۲\sqrt{x+۲y}}-۲y}\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.\to m_{\text{مماس}}=-\frac{۴+\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}-۲}=-\frac{\frac{۱۷}{۴}}{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۱۷}{۶}\to m_{\text{قائم}}=\frac{-۶}{۱۷}$$

حال با داشتن نقطه و شیب، معادله‌ی خط قائم را می‌نویسیم.

$$y-۱=\frac{-۶}{۱۷}(x-۲)\to ۱۷y-۱۷=-۶x+۱۲\to ۱۷y+۶x=۲۹$$

۲۶۵.گزینه ۲ برای پیدا کردن شیب خط مماس، کافی است که از تابع مشتق گرفته و به جای x، عدد ۲ را قرار دهیم.

$$y'=\frac{\left(۱-\dfrac{۲(x+۳)}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}\right)(۲x-۱)-۲\left(x-\sqrt{x^۲+۶x}\right)}{(۲x-۱)^۲}$$

به ازای $x=۲$ مقدار $\sqrt{x^۲+۶x}$ برابر ۴ می‌شود پس خواهیم داشت:

$$y'=\frac{(۱-\frac{۵}{۴})(۳)-۲(۲-۴)}{۹}=\frac{\frac{-۳}{۴}+۴}{۹}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

۲۶۶.گزینه ۱

$$۱)\ x=\frac{\pi}{۲}\to y=\tan(\cos\frac{\pi}{۲})=\tan ۰=۰\to A(\frac{\pi}{۲},۰)$$

$$۲)\ y'=-\sin x(۱+\tan^۲(\cos x))\Rightarrow m_{\text{مماس}}=-۱(۱+۰)=-۱\to m_{\text{قائم}}=۱$$

$$۳)\ y-۰=۱(x-\frac{\pi}{۲})\to y=x-\frac{\pi}{۲}$$

حالا باید محل تلاقی این خط را با نیمساز ناحیه‌ی چهارم (خط $y=-x$) بدست آوریم.

$$\begin{cases}y=x-\frac{\pi}{۲}\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow x-\frac{\pi}{۲}=-x\Rightarrow ۲x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}$$

۲۶۷.گزینه ۲

می دانیم: $\boxed{y=Ln\,u\to y'=\frac{u'}{u}\ ,\ Ln\,ab=Ln\,a+Ln\,b\ ,\ Ln\,\frac{a}{b}=Ln\,a-Ln\,b}$

$$۱)\ x=۰\to y=\frac{e^۰\cdot\sqrt[۳]{۱}}{۲}=\frac{۱}{۲}\to A\left|\begin{matrix}۰\\ \frac{۱}{۲}\end{matrix}\right.$$

۲) برای مشتق گیری ابتدا از دو طرف عبارت، Ln می‌گیریم و سپس مشتق می گیریم.

$$Lny=Ln\frac{e^x\cdot\sqrt[3]{1+4x}}{3x+2}\to Lny=Lne^x+Ln(1+4x)^{\frac{1}{3}}-Ln(3x+2)$$

$$\to Lny=x+\frac{1}{3}Ln(1+4x)-Ln(3x+2)\xrightarrow{\text{مشتق می گیریم}}\frac{y'}{y}=1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{1+4x}-\frac{3}{3x+2}$$

$$\to y'=y(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{1+4x}-\frac{3}{3x+2})\to m_{\text{مماس}}=\frac{1}{2}(1+\frac{4}{3}-\frac{3}{2})=\frac{5}{12}$$

۳) $y-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}(x-0)\Rightarrow 12y-6=5x\to 12y-5x=6$

۲۶۸.گزینه ۳

$$x=4\xrightarrow{\text{تابع}}y=0\to A\Big|_{0}^{4}\quad,\quad x=8\xrightarrow{\text{تابع}}y=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\to B\Big|_{4\sqrt{3}}^{8}$$

شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B را بدست می‌آوریم.

$$mAB=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{0-4\sqrt{3}}{4-8}=\sqrt{3}$$

چون خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی C با خط AB موازی است یعنی شیب خط مماس، همان شیب خط AB می‌باشد. بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر با $\sqrt{3}$ قرار دهیم.

$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}=\sqrt{3}\Rightarrow\frac{x^2}{x^2-16}=3\Rightarrow 2x^2=48\Rightarrow x^2=24\Rightarrow x=\pm2\sqrt{6}$$

۲۶۹.گزینه ۴

$$f(x)=\log_2^{x+1}\xrightarrow{x=3}y=\log_2^4=\log_2^{2^2}=2\quad,\quad A\Big|_{2}^{3}\xrightarrow{y=ax+b}2=3a+b$$

$$f(x)=\log_2^{x+1}\xrightarrow{x=-\frac{1}{2}}y=\log_2^{\frac{1}{2}}=\log_2^{2^{-1}}=-1\quad,\quad B\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}\xrightarrow{y=ax+b}-1=-\frac{1}{2}a+b$$

$$\begin{cases}3a+b=2\\-\frac{1}{2}a+b=-1\end{cases}\to\quad a=\frac{6}{7}\quad\to\quad 7a=6$$

۲۷۰.گزینه ۴ **وقتی دو تابع بر هم مماسند معادله‌ی تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف دارد.**

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2+ax\\y=x^2+2x-4a\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}x^2+2x-4a=\frac{1}{2}x^2+ax\to\boxed{\frac{1}{2}x^2+(2-a)x-4a=0}\ :\ \text{معادله‌ی تلاقی}$$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=0\to b^2-4ac=0\to(2-a)^2-4(\frac{1}{2})(-4a)=0\to4-4a+a^2+8a=0$

$$\to a^2+4a+4=0\to(a+2)^2=0\to a=-2$$

$$x_{\text{تماس}}=\frac{-b}{2a}\to x_{\text{تماس}}=\frac{-(2-a)}{2(\frac{1}{2})}\xrightarrow{a=-2}x_{\text{تماس}}=-4$$

البته می‌توانستید که $a=-2$ را در معادله‌ی تلاقی قرار داده و معادله را حل کرده و طول نقطه‌ی تماس را بدست آورید.

۲۷۱.گزینه ۱ **می‌دانیم:** $\boxed{(e^u)'=u'e^u\quad,\quad(uv)'=u'v+v'u}$

محور xها یعنی y برابر صفر است.

$$\begin{cases}y=xe^x\\y=0\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}xe^x=0\to x=0$$

$$y=x\cdot e^x\to y'=e^x+xe^x\xrightarrow{x=0}m=e^0+1\to\tan\alpha=1$$