۱. مجموعه جواب نامعادله‌ی $2x+k \le x+4 < 3x+2$ تهی است. کمترین ممکن مقدار برای k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲. با شرط $a \neq 0$، جدول تعیین علامت کدام‌یک از عبارات زیر، به‌صورت زیر آمده است؟

x		k	
P	$-$	0	$-$

۱) $P(x)=(x-k)^2+a$ ۲) $P(x)=a(x-k)^2$

۳) $P(x)=-\frac{a}{k}(x-k)^2$ ۴) $P(x)=-(\frac{a}{k}x-a)^2$

۳. حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $2+\frac{5}{2x-1}=\frac{-2}{(2x-1)^2}$ کدام است؟

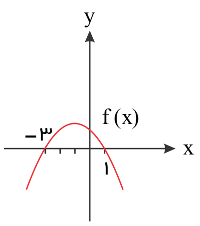
۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

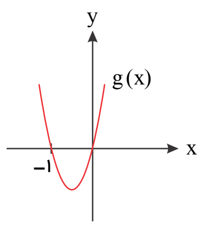
۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x-1}{x}+2>\frac{x-2}{x-1}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵. اگر نمودار توابع f و g به‌صورت زیر باشد، چند عدد صحیح در نامعادله‌ی $g(x-2)\cdot f(x)>0$ صدق می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) بی‌شمار





۶. $x=a$ و $x=b$ به‌ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد صحیحی هستند که به‌ازای آن‌ها تابع $y=\frac{1}{x^2+3x+4}$ پایین تابع $y=\frac{1}{2x^2-4x+14}$ قرار دارد؛ $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۵

۷. به‌ازای کدام مقدار k، معادله‌ی $\frac{k}{x+1}+\frac{2x+1}{x-1}=\frac{7}{x^2-1}$ فقط یک جواب حقیقی دارد؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $1-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) هیچ مقدار

۸. در تعیین علامت عبارت $p(x)=ax^2+4x+a$ جدول زیر حاصل شده است. حدود a کدام است؟

x		x_1		x_2	
p	$-$	0	$+$	0	$-$

۱) $(-2,2)$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,1)$

۹. $x=-2$ جواب معادله‌ی $\frac{x+a}{x-2}=\frac{1+x}{x}-\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$ است. این معادله چند جواب دیگر دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰. معادله‌ی $\frac{4x-4}{x^2-4}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x+2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

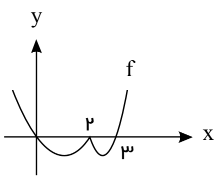
۱۱. اگر مجموعه مقادیری از x که به ازای آن، مقدار تابع $f(x)=\frac{3x^2+2x+k}{x^2-4x+5}$ کم‌تر از یک است، به‌صورت $(m,1)$ باشد، حداقل مقدار m کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۱۲. نامعادله‌ی $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\le 1$ در بازه‌ی $(-\infty,a)$ برقرار است، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۱۳. اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x^2-9}{f(x)}\le 0$ کدام است؟



۱) $[-3,0)$ ۲) $(-3,0]$
۳) $[-3,2)$ ۴) $[-3,2]$

۱۴. اگر $x^3>0$، کدام گزینه در مورد عبارت $\frac{x^3-2x^2+x}{x^2}$ درست است؟

۱) بیش‌ترین مقدار عبارت برابر ۲ است.
۲) کم‌ترین مقدار عبارت برابر صفر است.
۳) بیش‌ترین مقدار عبارت برابر صفر است.
۴) کم‌ترین مقدار عبارت برابر ۲ است.

۱۵. اگر مجموع جواب‌های حقیقی معادله‌ی $\frac{1}{-x-2}=\frac{2x-1}{x^2+3x+2}+\frac{ax}{x^2+x-2}$ برابر ۲ باشد، مقدار عبارت سمت راست تساوی فوق به‌ازای $x=a$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) -3 ۴) ۱

۱۶. اگر $f(x)=[\frac{1}{x}]$ و $g(x)=|x|$ حاصل $f(g(1-\sqrt{2}))-g(f(1-\sqrt{2}))$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۵ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

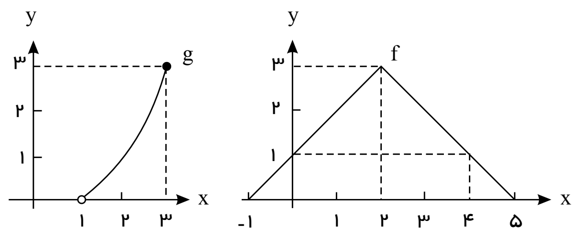
۱۷. توابع $f(x)=x^3-7$ و $g(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; \quad x\ge 2 \\ \frac{x-1}{x+1} & ; \quad x<2 \end{cases}$ مفروض‌اند. معادله‌ی $(fog)(x)=1$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸. در کدام محدوده از دامنه‌ی تابع $f(x)=1-\sqrt{x+1}$ ، تابع fof قابل تعریف است؟

۱) $x\ge -1$ ۲) $x\ge 1$ ۳) $x\le 3$ ۴) $-1\le x\le 3$

۱۹. اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت زیر باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟



۱) $[-1,5]$
۲) $(0,4]$
۳) $(1,3]$
۴) $(0,4)$

۲۰. اگر $g(x)=2x+1$ و $fog(x)=4x^2-x-1$، آن‌گاه $(f-g)(1)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) -2
۴) -4

۱.گزینه ۳　نامعادله‌ی داده شده را حل می‌کنیم.

$$۲x+k \le x+۴ \to x \le ۴-k \qquad (۱)$$
$$x+۴ < ۳x+۲ \to ۲x > ۲ \to x > ۱ \qquad (۲)$$

با توجه به شماره‌های (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که چنانچه $۴-k$ حداکثر برابر عدد یک باشد بازه‌های به‌دست آمده اشتراک نخواهند داشت و مجموعه جواب نامعادله تهی خواهد شد.

$$۴-k \le ۱ \to k \ge ۳ \to k_{Min} = ۳$$

۲.گزینه ۴　با توجه به گزینه‌ها $x=k$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی درجه‌ی دوم است، چرا که علامت در دو طرف آن تغییر نکرده است. از طرفی چون علامت این عبارت همواره منفی است پس ضریب $x^۲$ باید منفی باشد. در بین گزینه‌ها، گزینه‌ی چهارم هر دو شرایط را دارد.

۳.گزینه ۳　با فرض $۲x-۱=t$ داریم:

$$۲+\frac{۵}{t}=\frac{-۲}{t^۲} \xrightarrow{\times t^۲} ۲t^۲+۵t=-۲ \to ۲t^۲+۵t+۲=۰ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac} \Delta=۲۵-۱۶=۹$$

$$\to \begin{cases} t_۱=\dfrac{-۵+۳}{۴}=\dfrac{-۱}{۲} \to ۲x-۱=-\dfrac{۱}{۲} \to ۲x=\dfrac{۱}{۲} \to x=\dfrac{۱}{۴} \\ t_۲=\dfrac{-۵-۳}{۴}=-۲ \to ۲x-۱=-۲ \to ۲x=-۱ \to x=-\dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{-۱}{۸}$ است.

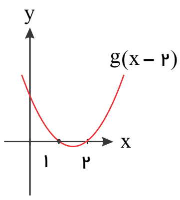
۴.گزینه ۳

$$\frac{x-۱}{x}+۲ > \frac{x-۲}{x-۱} \to \frac{x-۱}{x}+۲-\frac{x-۲}{x-۱} > ۰$$
$$\to \frac{(x-۱)^۲+۲x(x-۱)-x(x-۲)}{x(x-۱)} > ۰ \to \frac{x^۲-۲x+۱+۲x^۲-۲x-x^۲+۲x}{x(x-۱)} > ۰$$
$$\to \frac{۲x^۲-۲x+۱}{x(x-۱)} > ۰$$

صورت همواره مثبت است چون $a>۰$ و $\Delta<۰$ است پس:

$$x(x-۱)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<۰ \quad \text{یا} \quad x>۱ \to$$ اعداد صحیح صفر و یک را شامل نمی‌شود.

۵.گزینه ۲　برای رسم تابع $g(x-۲)$، باید تابع $g(x)$ را ۲ واحد در راستای مثبت محور xها منتقل کنیم.



x	$-\infty$		-۳		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	
$g(x-۲)$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$g(x-۲)\cdot f(x)>۰$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	۰	$-$	

$$\text{جواب نامعادله} = (-۳,۱)\cup(۱,۲) \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} x=-۲,-۱,۰$$

۶.گزینه ۱

$$\underbrace{\frac{۱}{x^۲+۳x+۴}}_{\substack{\text{همواره مثبت}\\(a>۰\ ,\ \Delta<۰)}} < \underbrace{\frac{۱}{۲x^۲-۴x+۱۴}}_{\substack{\text{همواره مثبت}\\(a>۰\ ,\ \Delta<۰)}} \xrightarrow{\text{دو کسر را معکوس می‌کنیم}} x^۲+۳x+۴>۲x^۲-۴x+۱۴$$

$$\to x^۲-۷x+۱۰<۰ \to (x-۲)(x-۵)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۲<x<۵$$

کوچک‌ترین عدد صحیح در این بازه $x=۳$ و بزرگ‌ترین عدد صحیح در این بازه $x=۴$ است پس $b-a=۱$ است.

۷.گزینه ۳

$$\frac{k}{x+۱}+\frac{۲x+۱}{x+۱}=\frac{۷}{x^۲-۱}$$

$$\frac{kx-k+۲x^۲+۳x+۱}{x^۲-۱}=\frac{۷}{x^۲-۱} \to kx-k+۲x^۲+۳x+۱=۷$$

$$\xrightarrow{x\neq\pm۱} ۲x^۲+(k+۳)x-k+۱=۷ \Rightarrow ۲x^۲+(k+۳)x-۶-k=۰ \qquad (*)$$

۲ حالت می‌تواند رخ دهد:

معادله‌ی $(*)$ فقط یک ریشه داشته باشد:

حالت اول:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (k+۳)^۲-۴(۲)(-۶-k)=۰ \Rightarrow k^۲+۶k+۹+۴۸+۸k=۰$$

$$\Rightarrow k^۲+۱۴k+۵۷=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$

حالت دوم:

با توجه به این‌که $x=۱$ و $x=-۱$ در دامنه‌ی اصلی قرار ندارند، اگر معادله‌ی $(*)$ دو ریشه داشته باشد که یکی از آن‌ها ۱ یا -۱ باشد، آن‌گاه معادله‌ی اصلی حتماً یک ریشه خواهد داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱\text{ ریشه‌ی }(*)\text{باشد}: ۲+k+۳-۶-k=۰ \Rightarrow -۱=۰ \text{ نادرست} \\ x=-۱\text{ ریشه‌ی }(*)\text{باشد}: ۲-k-۳-۶-k=۰ \Rightarrow ۲k=-۷ \Rightarrow k=-\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

۸.گزینه ۲ با توجه به جدول، معادله‌ی $P(x)=۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است یعنی $\Delta>۰$ است.

$$\Delta>۰ \to b^۲-۴ac>۰ \to ۱۶-۴a^۲>۰ \to ۴a^۲<۱۶ \to a^۲<۴ \to -۲<a<۲ \ \ (I)$$

در تعیین علامت عبارات درجه‌ی دوم، علامت بین دو ریشه مخالف علامت ضریب $x^۲$ است بنابراین ضریب $x^۲$ باید منفی باشد یعنی: $a<۰$ است (II) از اشتراک I و II به جواب $-۲<a<۰$ می‌رسیم.

۹.گزینه ۴ $x=-۲$ در معادله صدق می‌کند پس:

$$\frac{۴+۴+۲}{۴+۴}-\frac{۱-۲}{-۲}=\frac{-۲+a}{-۲-۲} \to \frac{۱۰}{۸}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۲+a}{-۴} \to \frac{۶}{۸}=\frac{-۲+a}{-۴}$$

$$\Rightarrow -۱۶+۸a=-۲۴ \to ۸a=-۸ \to a=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}=\frac{x-۱}{x-۲} \Rightarrow \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}=\frac{۱+x}{x}+\frac{x-۱}{x-۲}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}=\frac{(۱+x)(x-۲)+(x-۱)x}{x(x-۲)} \to \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}=\frac{x-۲+x^۲-۲x+x^۲-x}{x^۲-۲x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}=\frac{۲x^۲-۲x-۲}{x^۲-۲x} \to x^۲-۲x+۲=۲x^۲-۲x-۲ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲$$

اما توجه کنید که $x=۲$، ریشه‌ی مخرج دو تا از عبارت‌های کسری معادله‌ی اصلی است پس قابل قبول نیست. بنابراین، $x=-۲$ تنها ریشه‌ی این معادله است و معادله جواب دیگری ندارد.

.۱۰ گزینه ۲

$$\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x}=\frac{4x-4}{(x+2)(x-2)}\xrightarrow{\times x(x+2)(x-2)}3x(x-2)+2(x+2)(x-2)=x(4x-4)$$

$$\to 3x^2-6x+2(x^2-4)=4x^2-4x\to 3x^2-6x+2x^2-8-4x^2+4x=0$$
$$\to x^2-2x-8=0$$

$$\to (x-4)(x+2)=0\to\begin{cases}x=4\\ x=-2\ \text{(مخرج کسر را صفر می‌کند) غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

.۱۱ گزینه ۱ چون مجموعه مقادیر $f(x)$ کمتر از یک است بنابراین باید نامعادله‌ی $f(x)<1$ را حل کرد.

$$f(x)<1\to\frac{3x^2+2x+k}{x^2-4x+5}<1\to\frac{3x^2+2x+k}{x^2-4x+5}-1<0$$

$$\to\frac{3x^2+2x+k-x^2+4x-5}{x^2-4x+5}<0\to\frac{2x^2+6x+k-5}{\underbrace{x^2-4x+5}_{\text{همواره مثبت}(a>0,\Delta<0)}}<0$$

بنابراین باید نامعادله‌ی $2x^2+6x+k-5<0$ را حل کنیم. چون مجموعه جواب این نامعادله فاصله‌ی $(m,1)$ است پس یک ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2+6x+k-5=0$ برابر $x=1$ است و ریشه‌ی معادله در معادله صدق می‌کند.

$$x=1\xrightarrow{\text{صدق}}2+6+k-5=0\to k=-3\to 2x^2+6x-8<0$$

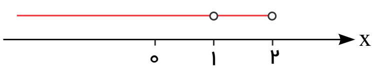
$$\to x^2+3x-4<0\to(x+4)(x-1)<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-4<x<1\to x\in(-4,1)$$

بنابراین حداقل مقدار m برابر -4 است.

.۱۲ گزینه ۲

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\le 1\to\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}-1\le 0\to\frac{x^2+x-2-x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\le 0$$

$$\to\frac{4x-4}{x^2-3x+2}\le 0\to\frac{4(x-1)}{(x-1)(x-2)}\le 0\to\frac{4}{x-2}\le 0$$

$$\to x<2\ ,\ x\neq 1\to$$ 

بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن نامعادله‌ی داده شده بر قرار است $(-\infty,1)$ است پس $a=1$ می‌باشد.

.۱۳ گزینه ۱ کسر داده شده را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		-3		0		2		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
عبارت ≤ 0		$+$	0	$-$	ن	$+$	ن	$+$	0	$+$	

پس بازه‌ی $[-3,0)$ جواب نامعادله است.

.۱۴ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{x>0\to x+\frac{1}{x}\ge 2\ ,\ x<0\to x+\frac{1}{x}\le -2}$

چون $x^3>0$ است پس $x>0$ است.

$$\frac{x^3-2x^2+x}{x^2}\overset{\text{تفکیک}}{=\!=}\frac{x^3}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}=x-2+\frac{1}{x}$$

$$x>0 \to x+\frac{1}{x}\geq 2 \to x+\frac{1}{x}-2\geq 0$$

بنابراین کمترین مقدار عبارت برابر صفر است.

۱۵.گزینه ۲

$$\frac{ax}{x^2+x-2}+\frac{2x-1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{-x-2}\to\frac{ax}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{x+2}$$

$$\xrightarrow{\times(x+2)(x+1)(x-1)} ax(x+1)+(2x-1)(x-1)=-1(x+1)(x-1)$$

$$\to ax^2+ax+2x^2-2x-x+1=-x^2+1$$

$$\to ax^2+3x^2-3x+ax=0\to(a+3)x^2+(a-3)x=0$$

$$\to x((a+3)x+a-3)=0\to\begin{cases}x=0\\(a+3)x=3-a\to x=\dfrac{3-a}{a+3}\end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $=2\to\dfrac{3-a}{a+3}=2\to 2a+6=3-a\to 3a=-3\to a=-1$

سمت راست تساوی به‌ازای $x=a=-1$ می‌شود:

$$\frac{1}{-x-2}\xrightarrow{x=-1}\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

۱۶.گزینه ۳ هر یک از عبارات را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$f(g(1-\sqrt{2}))=f(|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{-}|)=f(\sqrt{2}-1)=[\frac{1}{\sqrt{2}-1}]=[\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}]=[\underbrace{\sqrt{2}+1}_{2/4}]=2$$

$$g(f(1-\sqrt{2}))=g([\frac{1}{1-\sqrt{2}}])=g([\frac{1}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}])=g([\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}])$$

$$=g([\underbrace{-1-\sqrt{2}}_{-2/4}])=g(-3)=|-3|=3$$

پس : $f(g(1-\sqrt{2}))-g(f(1-\sqrt{2}))=2-3=-1$

۱۷.گزینه ۲ چون $fog(x)=1$ است در ابتدا باید بیابیم که تابع $f(x)$ به ازای چه مقادیری از x برابر یک است پس باید معادله‌ی $f(x)=1$ را حل کنیم.

$$f(x)=1\to x^3-7=1\to x^3=8\to x=2$$

پس برای محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $f(g(x))=1$ باید معادله‌ی $g(x)=2$ را حل کنیم.

$$g(x)=2\to\begin{cases}x^2-1=2\to x^2=3\to x=\pm\sqrt{3},x\geq 2\to \text{جواب‌ها غیرقابل قبول‌اند}\\\dfrac{x-1}{x+1}=2\to 2x+2=x-1\to x=-3,x<2\to \text{قابل قبول است } x=-2\end{cases}$$

بنابراین معادله یک جواب حقیقی دارد.

۱۸.گزینه ۴

$$f(x)=1-\sqrt{x+1}\to Df:x+1\geq 0\to x\geq -1$$

$$D_{fof(x)}=\{x\in Df,f(x)\in Df\}=\left\{x\geq -1,1-\sqrt{x+1}\geq -1\right\}$$

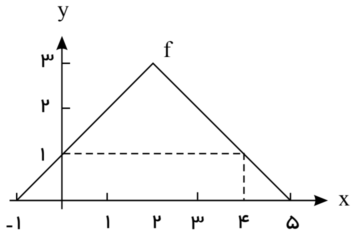
$$=\left\{x\geq -1,\sqrt{x+1}\leq 2\right\}=\{x\geq -1,x+1\leq 4\}=\{x\geq -1,x\leq 3\}=-1\leq x\leq 3$$

۱۹.گزینه ۴ دامنه‌ی تابع gof به صورت زیر تعریف می‌شود:

$Dgof=\{x\in Df, f(x)=Dg\}$

از روی نمودارهای f و g داریم: $Df=[-۱,۵]\,,\,Dg=(۱,۳]$ بنابراین $Dgof=\{x\in[-۱,۵]\,,\,f(x)\in(۱,۳]\}$ است.

باید حدود x را طوری تعیین کنیم که داشته باشیم $۱<f(x)\leq ۳$. با توجه به نمودار f باید $۰<x<۴$ باشد.



پس $Dgof=\{x\in[-۱,۵]\,,\,x\in(۰,۴)\}=(۰,۴)$ است.

۲۰.گزینه ۴

$fog(x)=۴x^۲-x-۱\rightarrow f(g(x))=۴x^۲-x-۱\rightarrow f(۲x+۱)=۴x^۲-x-۱$
$\xrightarrow{x=۰} f(۱)=-۱$

$g(x)=۲x+۱\rightarrow g(۱)=۲(۱)+۱=۳$

پس: $(f-g)(۱)=f(۱)=g(۱)=-۱-۳=-۴$

۱- ۳	۲- ۴	۳- ۳	۴- ۳	۵- ۲
۶- ۱	۷- ۳	۸- ۲	۹- ۴	۱۰- ۲
۱۱- ۱	۱۲- ۲	۱۳- ۱	۱۴- ۲	۱۵- ۲
۱۶- ۳	۱۷- ۲	۱۸- ۴	۱۹- ۴	۲۰- ۴