۱. اگر $f(x)\begin{cases} x^3+1 & x\geq a \\ x+1 & x<a \end{cases}$ یک به یک باشد حداقل مقدار a کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۲. تابع $y^3+3y^2+3y+1-x^2=0$ کدام ویژگی را دارد؟

۱) یک به یک ۲) یکنوا ۳) $f(-x)=f(x)$ ۴) $f(-x)=-f(x)$

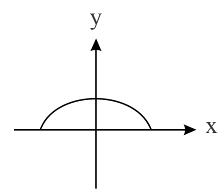
۳. بزرگترین دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$ برای اینکه تابع f یک به یک شود کدام گزینه می‌باشد؟

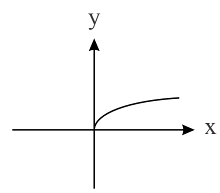
۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $(0,+\infty)$ ۳) $[-2,2]-\{0\}$ ۴) $[-2,+\infty)$

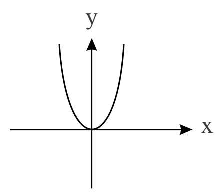
۴. تابع $f(x)=x^2-2x+2$ در بازه‌ی $[a,+\infty)$ یک به یک می‌باشد، اگر بازه‌ی مطرح شده بزرگترین بازه‌ی ممکن باشد a^2+a کدام گزینه است؟

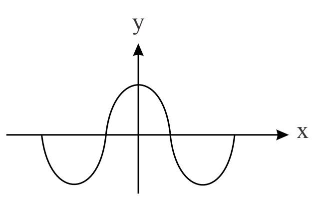
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵. کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

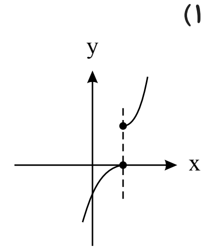
۱)


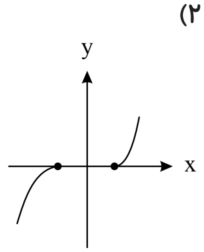
۲)


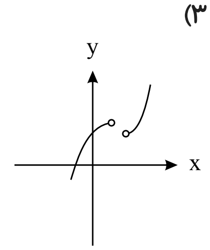
۳)


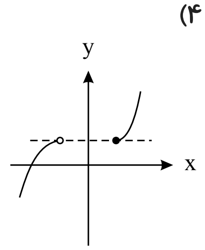
۴)


۶. کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع یک به یک را نمایش می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


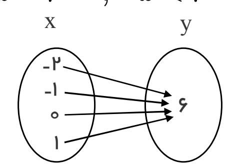
۴)


۷. در چند مورد از روابط زیر، y تابعی یک‌به‌یک از x است؟

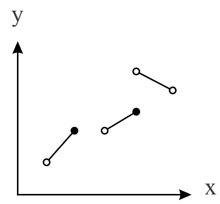
الف) $y=\begin{cases} ۲x+۱ & , \quad x>۲ \\ x-۱ & , \quad x<۲ \end{cases}$

ب) $|x|+y=۲$

پ)



ت)



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۸. تابع $f(x)=(x-۲)(x-۴)+۲x$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $[۰,۳]$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $[۱,۵]$ ۴) $[\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}]$

۹. اگر $f=\{(a^۲+۱,۳),(-۱,۷),(b+۱,۷),(۵,۳),(۳,۰),(۳,a+۲)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) -۴

۱۰. اگر تابع $g=\{(-۱,۱)\ ,\ (a+۲,۲)\ ,\ (-۱,a^۳+۱)\ ,\ (n^۲-۶,۲)\}$ یک به یک باشد، n کدام است؟

۱) $\pm۲\sqrt{۲}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ±۲

۱۱. کدام یک از توابع زیر، یک به یک است؟

۱) $y=x^۲$ ۲) $y=|x^۳|$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=|\log x|$

۱۲. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq ۰ \\ x+۱ & x<۰ \end{cases}$ چگونه است و $f(f(\frac{-۱}{۴}))$ کدام است؟

۱) یک به یک – $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) یک به یک – $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۳) غیریک به یک – $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) غیریک به یک – $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

۱۳. تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ چگونه است؟

۱) یک‌به‌یک – صعودی ۲) یک‌به‌یک – نزولی ۳) غیر یک‌به‌یک – صعودی ۴) غیر یک‌به‌یک – نزولی

۱۴. اگر تابع با ضابطه $y=\frac{۱}{۳}x^۳-۲x^۲+۲ax$ یک به یک باشد. حدود a کدام است؟

۱) $a\geq۲$ ۲) $a>۲$ ۳) $a>۰$ ۴) $a\leq۳$

۱۵. به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، تابع $f(x)=|2x+a|$ در فاصله‌ی $(-1,2)$ یک به یک است؟

۱) $R-(-1,\frac{1}{2})$ ۲) $[-4,2]$

۳) $R-(-4,2)$ ۴) $[-1,\frac{1}{2}]$

۱۶. اگر تابع $f=\{(1,2),(3,0),(a^2-8,2),(b^2-1,0),(a-b,17)\}$ یک به یک باشد، $|a|+|b|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۷. به ازای چه حدودی از a، تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+a & ; \quad x>2 \\ x+2 & ; \quad x\leq 2 \end{cases}$ یک به یک نیست؟

۱) $(-\infty,4)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(4,+\infty)$

۱۸. کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=|\sqrt{x}|$

۳) $f=\{(1,2),(3,-1),(0,3),(4,2)\}$ ۴) $f(x)=x^3-x^2$

۱۹. اگر تابع $f(x)=(a-3)x^2+2x-3$ بر روی R یک به یک باشد، مقدار $af(3)$ کدام است؟

۱) 12 ۲) -12 ۳) -8 ۴) 9

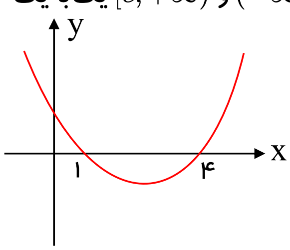
۲۰. نمودار تابع $f(x)=(x-a)(x-b)$ به‌صورت زیر است. اگر این تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,c]$ و $[c,+\infty)$ یک‌به‌یک باشد، حاصل abc کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) $\frac{5}{2}$

۴) ۴۰



۲۱. اگر $f(x)=\frac{5x+3}{4x-5}$ باشد $f(f(f(f(\sqrt{2}))))$ کدام گزینه است؟

۱) $5\sqrt{2}$ ۲) $-5\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

۲۲. چند دسته تابع به صورت $(a\neq 0)$ $f(x)=ax+b$ وجود دارد، که $f(x)=f^{-1}(x)$ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی شمار

مهندس
صادق
طاهری
۰۹۱۷ ۴۴۵ ۷۱۴۴

۲۳.اگر $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x}}$ باشد $D_{f^{-۱}}$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $[-۱,۰]$

۲۴.برد وارون تابع $f(x)=۵(\sqrt{۲-x})^۳+۱$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $[۵,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۲]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[۲,۵]$

۲۵.وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}+۱$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $y=(\sqrt{x-\frac{۳}{۴}})^۲-\frac{۱}{۲}$ ۲) $y=(\sqrt{x+\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲})^۲$

۳) $y=(\sqrt{x+\frac{۳}{۴}})^۲-\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=(\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲})^۲$

۲۶.وارون تابع $f(x)=x^۲-۲x+۲\ ,\ x\leq ۱$ کدام گزینه می‌باشد؟

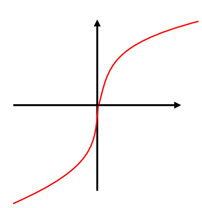
۱) $۱+\sqrt{x-۱}$ ۲) $۱-\sqrt{x-۱}$

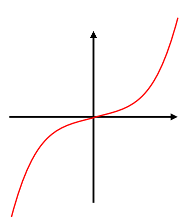
۳) $۱+\sqrt{۱-x}$ ۴) $۱-\sqrt{۱-x}$

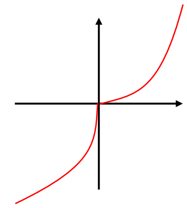
۲۷.اگر تابع $f=\left\{(m^۲+۲m,۲),(m+۳,۴),(۴-m,۲),(۲,-۲)\right\}$ معکوس‌پذیر باشد، m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

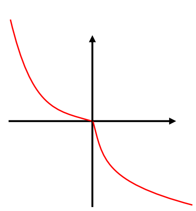
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۸.نمایش هندسی تابع معکوس $f(x)\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ کدام است؟


۱)


۲)


۳)


۴)

۲۹. اگر $f(x)=x^{۳}+x+۱$ باشد $f^{-۱}(x)$ از کدام نقطه عبور می‌نماید؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(۱,۰)$ ۴) $(۱۲,۲)$

۳۰. اگر تابع وارون‌پذیر باشد و $f(3)=7$ و $f^{-1}\left(\frac{3a-1}{2}\right)=3$ آنگاه $f(a-2)$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{R})$

۱) ۵　　۲) ۷　　۳) ۳　　۴) -3

۳۱. معکوس تابع $y=\frac{2x-1}{x-2}$ در چند نقطه‌ی تابع f را قطع می‌نماید؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۴　　۴) بی‌شمار

۳۲. در تابع $f(x)=\frac{1396x-5011}{500x-1396}$ حاصل $f\left(f(x)\right)$ کدام است؟

۱) $f(x)$　　۲) $-f(x)$　　۳) x　　۴) $-x$

۳۳. منحنی معکوس تابع $y=-(x+2)^3-2$ نمودار f را در چند نقطه قطع می‌نماید؟

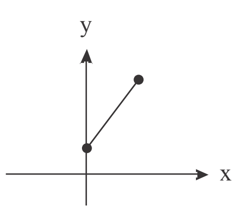
۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۳۴. ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{-7x+3}{5}$ کدام است؟

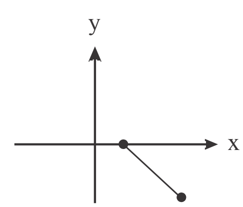
۱) $y=\frac{7x-3}{5}$　　۲) $y=\frac{5}{-7x+3}$

۳) $y=\frac{-5}{7}x+\frac{3}{7}$　　۴) $y=\frac{5}{7}x-\frac{3}{7}$

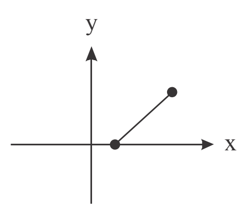
۳۵. نمودار وارون تابع روبه‌رو، کدام است؟



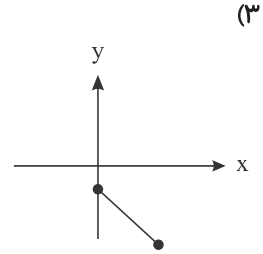
۱)



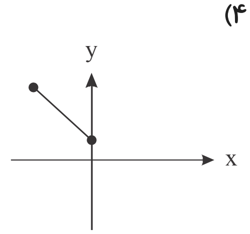
۲)



۳)



۴)



۳۶. اگر $f(x)=\dfrac{2x-1}{5}$، مقدار $f(f^{-1}(4))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

۳۷. اگر f تابعی خطی با شیب m باشد، به‌ازای کدام مقدار m شیب تابع f^{-1} برابر $4m$ است؟ $(m\neq 0)$

۱) هیچ مقدار m ۲) ± 2 ۳) ± 1 ۴) $\pm\dfrac{1}{2}$

۳۸. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , \quad x\geq 2\\ x+a & , \quad x<2\end{cases}$ وارون‌پذیر باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a=2$ ۲) $a\geq 1$ ۳) $a\leq 1$ ۴) $a\geq 0$

۳۹. در تابع خطی $f(x)=(a+5)x+2b$، اگر $f^{-1}(7)=2$ و $f^{-1}(11)=3$، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۴۰. وارون تابع $f(x)=\dfrac{3x-1}{2}$، کدام است؟

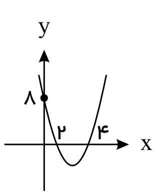
۱) $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2}$ ۲) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$

۳) $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{3}$ ۴) $f^{-1}(x)=\dfrac{-2x+1}{3}$

۴۱. دامنهٔ تابع $f(x)=2x^2-7x+3$ به‌صورت $Df=(a,b)$ تعریف شده و وارون f، یک تابع است. (a,b) کدام‌یک از بازه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $(0,3)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,4)$

۴۲. اگر وارون تابع $g(x)=ax+b$ نمودار سهمی زیر را در نقاطی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند، آن‌گاه جواب معادلهٔ $g^{-1}(x)=g(x)$ کدام است؟



۱) $\dfrac{5}{3}$ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) $\dfrac{10}{3}$

۴۳. اگر $f(x)=3x-a$ و $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{b}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -4

۴۴. اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $f=\{(x,-2x+7)|x\in A\}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(3)+f(1)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) -2

۴۵. تابع $f(x)=x|x|$، وارون خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) دو ۳) سه ۴) پنج

۴۶. اگر $f(x)=\frac{2}{3}x+a$ باشد و نمودار f^{-1} از نقطهٔ $(2,6)$ بگذرد، مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{14}{3}$ ۲) ۳ ۳) -2 ۴) -7

۴۷. اگر $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \quad x\leq 0 \\ x-1 & , \quad x>0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)+f^{-1}(-2)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۸. اگر $f=\{(2,a+1),(\sqrt{b},3)\}$ و $f^{-1}=\{(a-1,c+1),(d,b-2)\}$، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۴۹. اگر نمودار تابع خطی f، نمودار وارون خود را فقط در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و $f(1)=2$ باشد، نمودار تابع f^{-1}، محور xها را در کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۵۰. اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۱. اگر $f(x)=3-e^{x}$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $g(x)=\sqrt{xf^{-1}(x)}$ ، کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3)$ ۳) $[2,3)$ ۴) $[1,3)$

۵۲. اگر $f(x)=4-e^{2x}$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $g(x)=\sqrt{xf^{-1}(x)}$، کدام است؟

۱) $[2,3]$ ۲) $[3,4)$ ۳) $[0,3]$ ۴) $[0,4)$

۵۳. دو تابع $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۷),(۴,۱),(۱,۹)\}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-۱}\left(g(۲a)\right)=۶$ باشد، a کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{۵}{۲}$

۵۴. قرینه‌ی خط به معادله‌ی $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۵. دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟

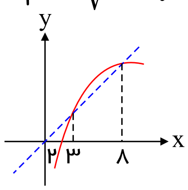
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۶. اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$ تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟

۱) $gof^{-۱}(x)=\{(۰,۰),(۱,۳)\}$ ۲) $gof^{-۱}(x)=\{(۲,۴),(۳,۵)\}$

۳) $gof^{-۱}(x)=\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$ ۴) $gof^{-۱}(x)=\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

۵۷. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$. کدام است؟



۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$ ۴) $[۳,۸]$

۵۸. ضابطه‌ی وارون تابع $y=\dfrac{x}{۱+|x|}$ کدام است؟

۱) $f_{(x)}^{-۱}(x)=\dfrac{x}{۱-|x|}\ ;\ |x|<۱$ ۲) $f^{-۱}(x)=\dfrac{۱-|x|}{|x|}\ ;\ |x|>۱$

۳) $f^{-۱}(x)=\dfrac{x}{|x|-۱}\ ;\ |x|>۱$ ۴) $f^{-۱}(x)=\dfrac{|x|-۱}{x}\ ;\ |x|<۱$

۵۹. ضابطه‌ی وارون تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & ;\ x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ;\ x<۰\end{cases}$، کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x\,|x|\,;x\in\mathbb{R}$ ۲) $f^{-۱}(x)=-x^{۲};x<۰$

۳) $f^{-۱}(x)=\pm x^{۲};x\in\mathbb{R}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\pm x\,|x|\,;x\in\mathbb{R}$

۶۰. تابع با ضابطه‌ی $y = x\,|x-2|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}\ ;\ \ x < 0$
۲) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}\ ;\ x < 1$
۳) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}\ ;\ 0 < x < 1$
۴) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}\ ;\ 0 < x < 1$

۶۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x-6| - |x+1|$، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = -x + 7 ; x > 8$
۲) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}x + 2 ; x > 3$
۳) $f^{-1}(x) = x + 7 ; x > -4$
۴) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x - 1 ; -4 < x < 8$

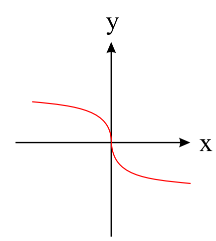
۶۲. ضابطه‌ی معکوس $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

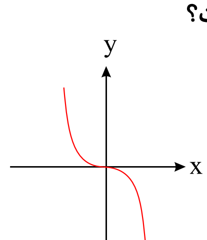
۱) $f(x) = x\sqrt{|x|}\ ;\ x \in \mathbb{R}$
۲) $f^{-1}(x) = x\sqrt{|x|}\ ;\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$
۳) $f^{-1}(x) = x|x|\ ;\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$
۴) $f^{-1}(x) = x|x|\ ;\ x \in \mathbb{R}$

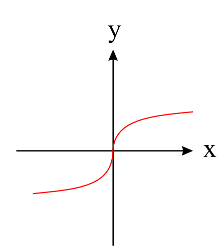
۶۳. تابع با ضابطه $f(x) = \left|x^3\right|$ با دامنه R، چگونه است؟

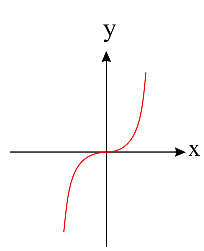
۱) نزولی
۲) صعودی
۳) وارون‌ناپذیر
۴) یک به یک

۶۴. اگر $f(x) = x\,|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۶۵. ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; \ x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; \ x < 0\end{cases}$، کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=-x^{2}$ ۲) $f^{-1}(x)=x^{2}$ ۳) $f^{-1}(x)=x\left|x\right|$ ۴) $f^{-1}(x)=-x\left|x\right|$

۶۶. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$، با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{2\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-4 \ , \ -1$ ۲) $4 \ , \ -1$ ۳) $-4 \ , \ 1$ ۴) $4 \ , \ 1$

۱.گزینه ۲ برای یک به یک بودن توابع چند ضابطه‌ای علاوه بر یک به یک بودن تک تک ضابطه‌ها، اشتراک بردها باید تهی باشد.

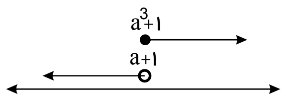
$$f(x)\begin{cases} x^3+1 & x\ge a \\ x+1 & x<a \end{cases}$$

$$(I)\ \ x\in[a,+\infty)\xrightarrow{(\ )^3}x^3\in[a^3,+\infty)\xrightarrow{+1}\underbrace{x^3+1}_{R_1}\in[a^3+1,+\infty)$$

$$(II)\ \ x\in(-\infty,a)\xrightarrow{+1}\underbrace{x+1}_{R_2}\in(-\infty,a+1)$$

حال شرط $R_1\cap R_2=\varnothing$ را بررسی می‌نمائیم

باتوجه به تصویر داریم:



$$a+1\le a^3+1\to a^3-a\ge 0$$

a		-۱		۰		+۱	
a³- a	-	ج	+	ج	-	ج	+

$$\to a\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$$

حداقل مقدار a برابر -1 است.

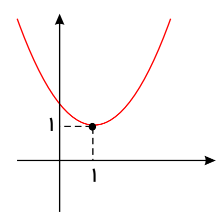
۲.گزینه ۳ ابتدا باید تابع فرم ساده‌تری پیدا نماید:

$$(y+1)^3=x^2\to y+1=\sqrt[3]{x^2}\to y=\sqrt[3]{x^2}+1$$

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}+1=\sqrt[3]{x^2}+1=f(x)$$

۳.گزینه ۲ تابع f در مخرج خود ریشه‌ی مضاعف دارد و وجود ریشه‌ی مضاعف یک به یک بودن توابع را از بین می‌برد، پس گزینه‌ای جواب صحیح است که ریشه‌ی مضاعف مخرج $x=0$ را در بر نگیرد.

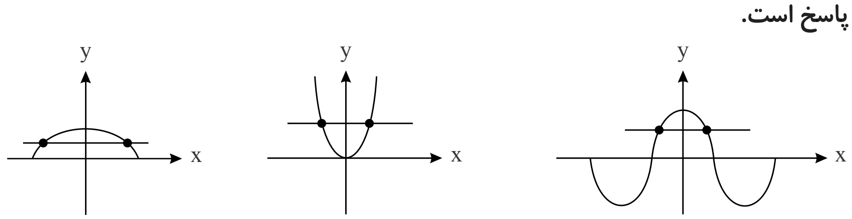
۴.گزینه ۳ می‌توان برای حل مسئله تابع f را رسم نماییم.



$$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

باتوجه به نمودار تابع در بازه‌ی $[1,+\infty)$ یک به یک است. پس $a=1$ و داریم: $a^2+a=2$

۵.گزینه ۲ نکته: تابع یک‌به‌یک، تابعی است که هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
با توجه به نکتهٔ بالا و نمودارهای زیر، گزینهٔ ۲ پاسخ است.



گزینه۱ گزینه۳ گزینه۴

۶.گزینه ۴ تنها در نمودار گزینهٔ «۴» هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (شرط تابع بودن) و هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (شرط یک به یک بودن).

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: تابع نیست.

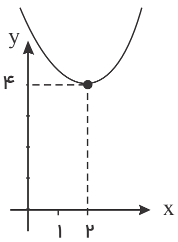
گزینه‌های ۲ و ۳: یک به یک نیستند.

۷.گزینه ۲ در مورد (الف) با رسم تابع می‌توان مشخص کرد، که تابع یک‌به‌یک است همچنین در مورد (ت) تابع یک‌به‌یک است. در نمودار مختصاتی تابع اگر هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک‌به‌یک است.

۸.گزینه ۲ ابتدا بهتر است تابع را ساده‌تر کنیم.

$$f(x)=(x-2)(x-4)+2x=x^2-4x+8=x^2-4x+4+4=(x-2)^2+4$$

با توجه به معادله نمودار $f(x)$ به شکل زیر می‌باشد.



با توجه به نمودار تابع فقط در بازهٔ مطرح شده در گزینهٔ ۲ یعنی $[-1,2]$ یک‌به‌یک می‌باشد.

۹.گزینه ۴

$$\begin{cases}(a^2+1,3)\in f\\(5,3)\in f\end{cases}\xrightarrow{\text{یک‌به‌یک } f}a^2+1=5\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(-1,7)\in f\\(b+1,7)\in f\end{cases}\xrightarrow{\text{یک‌به‌یک } f}b+1=-1\Rightarrow b=-2$$

اگر $a=2$ باشد دو زوج‌مرتب $(3,4)$ و $(3,0)$ را داریم که شرط تابع بودن را نقض می‌کند.

اگر $a=-2$ باشد تابع f به‌صورت $f=\{(-1,7),(5,3),(3,0)\}$ می‌شود و یک‌به‌یک است، پس:

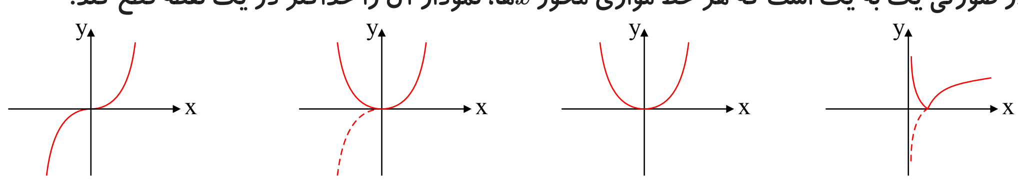
$$a+b=-2-2=-4$$

۱۰.گزینه ۱ تابع یک به یک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که دارای مولفه‌های دوم برابر نباشند و در صورت مساوی بودن مولفه‌های دوم باید مولفه‌های اولشان باهم برابر باشند.

برای تابع بودن $\Rightarrow a^3+1=1\Rightarrow a^3=0\Rightarrow a=0$

برای یک به یک بودن $\Rightarrow a+2=n^2-6\Rightarrow 2=n^2-6\Rightarrow n^2=8\Rightarrow n=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

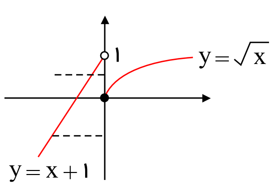
۱۱.گزینه ۳ یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\-x^2 & x<0\end{cases}$ $\quad$ $y=|x^3|$ $\quad$ $y=x^2$ $\quad$ $y=|\log x|$

واضح است که فقط $y=x|x|$ یک به یک است.

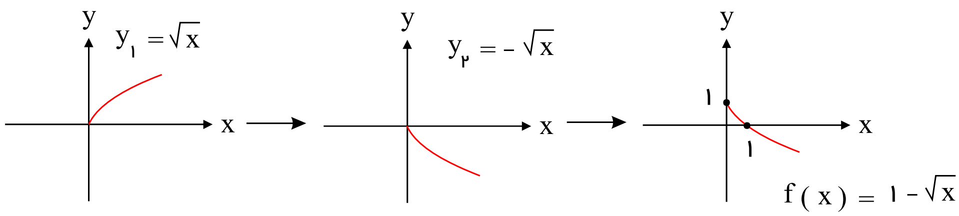
۱۲.گزینه ۳ بهترین روش برای تشخیص یک به یک بودن رسم نمودار است پس:



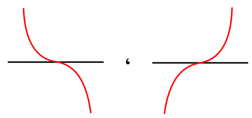
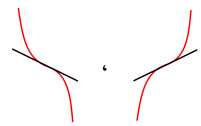
در فاصله‌ی $[0,1)$ هر خط موازی محور xها نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند پس غیر یک به یک است.

$$f(\frac{-۱}{۴}) \xlongequal{x<۰} \frac{۳}{۴} \Rightarrow f(\frac{۳}{۴}) \xlongequal{x>۰} \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۳.گزینه ۲ کافی است که تابع $f(x) = ۱ - \sqrt{x}$ را رسم کنیم.

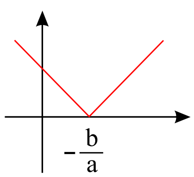


واضح است که این تابع، نزولی و یک به یک می‌باشد (نموداری معرّف تابع یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند)

۱۴.گزینه ۱ تابع درجه‌ی سوم در حالتی که مشتق دارای ریشه‌ی مضاعف است ()و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد()اکیداً یکنوا بوده و در نتیجه یک به یک است پس:

$$y' = x^{۲} - ۴x + ۲a \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۸a \leq ۰ \rightarrow ۸a \geq ۱۶ \Rightarrow a \geq ۲$$

۱۵.گزینه ۳



در توابع $y = |ax + b|$ شکستگی تابع در $x = -\frac{b}{a}$ (ریشه‌ی داخل قدرمطلق) رخ می‌دهد.

برای این‌که تابع f بخواهد در فاصله‌ی $(-۱, ۲)$ یک به یک باشد ریشه‌ی داخل قدرمطلق نباید در این فاصله باشد زیرا در این صورت یک خط افقی، شکل را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کرده و تابع یک به یک نمی‌باشد. برای این منظور ریشه‌ی داخل قدرمطلق را در بازه‌ی $(-۱, ۲)$ قرار می‌دهیم و جواب را از R کم می‌کنیم.

ریشه‌ی داخل قدر مطلق: $۲x + a = ۰ \rightarrow x = -\frac{a}{۲}$

$$-۱ < -\frac{a}{۲} < ۲ \rightarrow -۲ < -a < ۴ \rightarrow -۴ < a < ۲$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب برابر است با: $a \in R - (-۴, ۲)$

۱۶.گزینه ۴ تابع f که با زوج مرتب داده شده است در صورتی یک به یک است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، دارای مؤلفه‌ی دوم برابر نباشد؛ یعنی اگر مؤلفه‌ی دوم دو زوج مرتب برابر بود، مؤلفه‌ی اولشان هم برابر باشد.

از یک به یک بودن تابع f با توجه به نکته‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت:

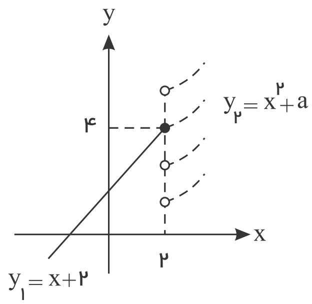
$$\begin{cases} (۱, ۲), (a^{۲} - ۸, ۲) \in f \Rightarrow a^{۲} - ۸ = ۱ \Rightarrow a^{۲} = ۹ \Rightarrow |a| = ۳ \\ (۳, ۰), (b^{۲} - ۱, ۰) \in f \Rightarrow b^{۲} = ۴ \Rightarrow |b| = ۲ \end{cases} \Rightarrow |a| + |b| = ۵$$

دقت کنید به ازای $a = ۳$، $b = ۲$ زوج مرتب $(۱, ۱۷)$ در f ایجاد می‌شود که به علت وجود $(۱, ۲)$ در f، تابع بودن آن نقض می‌شود، پس این حالت غیر قابل قبول است؛ ولی سایر حالات قابل قبول‌اند.

۱۷.گزینه ۲ شکلی معرف تابع یک به یک است که اگر هر خطی به موازات محور xها رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

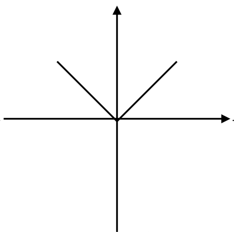
نمودار تابع f به ازای مقادیر مختلف a به‌صورت زیر است.

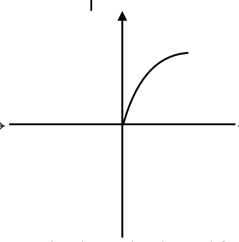
با توجه به نمودار برای این‌که تابع یک به یک نباشد، باید:



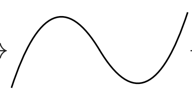
$۲^۲+a<۴ \Rightarrow a<۰$

۱۸.**گزینه ۲** شکلی معرّف تابع یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند نه بیشتر. تابعی که به صورت زوج مرتب داده شده است زمانی یک به یک است که هیچ دو زوج متمایزی در آن دارای مؤلفه‌ی دوم یکسان نباشد.

(گزینه‌ی اول) $f(x)=|x| \rightarrow$  $\rightarrow$ یک به یک نمی‌باشد

(گزینه‌ی دوم) $f(x)=|\sqrt{x}| \rightarrow$  $\rightarrow$ یک به یک است

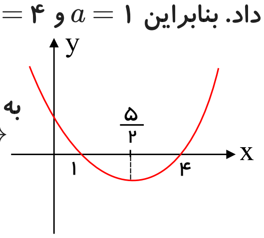
(گزینه‌ی سوم) $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۰,۳),(۴,۲)\} \rightarrow (۱,۲),(۴,۲) \rightarrow$ یک به یک نیست

(گزینه‌ی چهارم) $f(x)=x^۳-x^۲ \rightarrow$  $\rightarrow$ یک به یک نیست

۱۹.**گزینه ۴** تابع درجه‌ی دوم $y=ax^۲+bx+c$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی یک به یک نمی‌باشد پس در تابع داده شده باید ضریب $x^۲$ صفر باشد تا $x^۲$ از بین برود پس $a-۳=۰ \rightarrow a=۳$ یعنی $f(x)=۲x-۳$ می‌باشد.

$af(۳)=۳(۲(۳)-۳)=۹$

۲۰.**گزینه ۱** چون $x=۱$ و $x=۴$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $f(x)=۰$ می‌باشند بنابراین می‌توان، عبارت درجه‌ی دوم را به صورت $f(x)=(x-۱)(x-۴)$ نشان داد. بنابراین $a=۱$ و $b=۴$ می‌باشد.

$f(x)=x^۲-۵x+۴ \rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{به شکل دقت کنید}}$ 

تابع درجه‌ی دوم در $(-\infty,\frac{۵}{۲}]$, $[\frac{۵}{۲},+\infty)$ یک‌به‌یک می‌باشد پس $c=\frac{۵}{۲}$ می‌باشد بنابراین $abc=(۱)(۴)(\frac{۵}{۲})=۱۰$ است.

توجه کنید که تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ در $x\leq\frac{-b}{۲a}$, $x\geq\frac{-b}{۲a}$ یک‌به‌یک است.

۲۱.**گزینه ۳** در تابع هموگرافیک $f(x)+\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=۰$ تابع f و وارون آن برابر است با:

$a+d=۰ \rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$

$f(f(f(f(\sqrt{۲}))))=f(f^{-۱}(f(f^{-۱}(\sqrt{۲}))))=\sqrt{۲}$

۲۲.**گزینه ۴** ابتدا وارون تابع f را محاسبه می‌کنیم

$y=ax+b \rightarrow x=ay+b \rightarrow y=f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$

$f(x)=f^{-۱}(x) \rightarrow ax+b=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a} \rightarrow a=\frac{۱}{a} \rightarrow a^۲=۱ \rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=-۱ \end{cases}$

$a=۱ \rightarrow b=-\frac{b}{۱} \rightarrow b=-b \rightarrow b=۰ \rightarrow f(x)=x$

$$a = -۱ \rightarrow b = -\frac{b}{a} \rightarrow b = b \rightarrow b \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = -x + b$$

پس بی‌شمار تابع قابل تعریف است که با فرم $f(x) = -x + b$ قابل بازنویسی می‌باشد.

۲۳.گزینه ۱ برای تعیین $D_{f^{-1}}$ کافیست Rf را تعیین نمائیم.

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$$

$$x\in(-\infty,+\infty)\xrightarrow{\times(-)}(-\infty,+\infty)\xrightarrow{+1}\sqrt{1-x}\in(-\infty,+\infty)\xrightarrow{\sqrt{}}$$

$$\sqrt{1-x}\in[0,+\infty)\xrightarrow{\times(-)}-\sqrt{1-x}\in(-\infty,0]\xrightarrow{+1}1-\sqrt{1-x}\in(-\infty,1]\xrightarrow{\sqrt{}}$$

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x}}\in[0,1]\to Rf=[0,1]=D_{f^{-1}}$$

۲۴.گزینه ۲ برد تابع وارون همان دامنه‌ی تابع اصلی می‌باشد، پس کافیست دامنه‌ی f را تعیین نمائیم.

$$f(x)=5(\sqrt{2-x})^3+1\to Df:\ 2-x\geq 0\to x\leq 2$$

$$R_{f^{-1}}=Df=(-\infty,2]$$

۲۵.گزینه ۴ ابتدا بهتر است عبارت به فرم مربع کامل تبدیل کنیم.

$$f(x)=x+\sqrt{x}+1\to f(x)=(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

$$\to y=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\xrightarrow{\text{وارون}}x=(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

$$\to(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2=x-\frac{3}{4}\to|\underbrace{\sqrt{y}+\frac{1}{2}}_{\text{همواره }+}|=\sqrt{x-\frac{3}{4}}$$

$$\to\sqrt{y}+\frac{1}{2}=\sqrt{x-\frac{3}{4}}\to\sqrt{y}=\sqrt{x-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\to y=(\sqrt{x-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2})^2=f^{-1}(x)$$

۲۶.گزینه ۲ قدم اول تبدیل تابع به فرم مربع کامل می‌باشد

$$f(x)=x^2-2x+2\to y=(x-1)^2+1\to x\leq 1\xrightarrow{\text{وارون}}x=(y-1)^2+1\qquad y\leq 1$$

$$\to x-1=(y-1)^2\to|y-1|=\sqrt{x-1}$$

حال باتوجه به شرط $y\leq 1$ عبارت درون قدر مطلق عبارتی منفی می‌باشد:

$$-y+1=\sqrt{x-1}\to y=1-\sqrt{x-1}=f^{-1}(x)$$

۲۷.گزینه ۳ شرط معکوس‌پذیری، یک به یک بودن تابع f می‌باشد. پس معادله‌ی زیر قابل تشکیل است.

$$m^2+2m=4-m\to m^2+3m-4=0$$

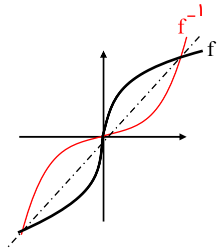
$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}m=1\\ m=\dfrac{c}{a}=-4\end{cases}$$

حال هر دو مقدار را در تابع جایگذاری می‌نمائیم تا مقادیر قابل قبول را مشخص نمائیم:

$m=1\to f=\{(3,2),(4,4),(2,-2)\}$ قابل قبول

$m=-4\to\{(8,2),(-1,4),(2,-2)\}$ قابل قبول

۲۸.گزینه ۳ ابتدا باید تابع f را رسم کنیم سپس نستب به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه نماییم



۲۹.گزینه ۳

اگر $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی تابع f باشد $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی تابع f^{-1} قرار دارد. یعنی: $f(a)=b \leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

حال تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌نمائیم:

$A'(۱,۳)\to A(۳,۱): f(۳)=۳۱\to(۳,۱)\notin f\to(۱,۳)\notin f^{-۱}$

$A'(۰,۱)\to A(۱,۰):\ f(۱)=۳\to(۱,۰)\notin f\to(۰,۱)\notin f^{-۱}$

$A'(۱,۰)\ \to A(۰,۱):\ f(۰)=۱\to(۰,۱)\in f\to(۱,۰)\in f^{-۱}$

$A'(۱۲,۲)\to A(۲,۱۲):\ f(۲)=۱۱\to(۲,۱۲)\notin f\to(۱۲,۲)\notin f^{-۱}$

۳۰.گزینه ۲

اگر $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی تابع f باشد $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی تابع f^{-1} قرار دارد. یعنی: $f(a)=b \leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

باتوجه به اطلاعات مسئله داریم:

$f(۳)=۷\to A(۳,۷)\to A'(۷,۳)\in f^{-۱}$

$$\left.\begin{matrix}f^{-۱}(۷)=۳\\ f(\frac{۳a-۱}{۲})=۳\end{matrix}\right\}\frac{۳a-۱}{۲}=۷\to ۳a-۱=۱۴\to a=۵$$

$f(a-۲)\ \overset{a=۵}{=\!=\!=}\ f(۳)=۷$

۳۱.گزینه ۴

درتابع هموگرافیک $\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=۰$ باشد تابع و وارون برهم منطبق می‌باشند. $f(x)=f^{-۱}(x)$

در این تابع هم $a+d=۰$ پس تابع f و معکوس بر هم منطبق می‌باشند و بی‌شمار نقطه‌ی برخورد دارد.

۳۲.گزینه ۳

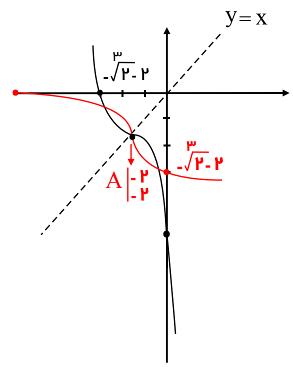
درتابع هموگرافیک $\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=۰$ باشد تابع و وارون برهم منطبق می‌باشند. $f(x)=f^{-۱}(x)$

نکته‌ی بعدی اینکه $f^{-۱}(f(x))=x$ در این تابع هم $a+d=۰$ پس $f(x)=f^{-۱}(x)$ لذا می‌توان نوشت:

$f\left(f(x)\right)=f^{-۱}\left(f(x)\right)=x$

۳۳.گزینه ۴ ابتدا تابع f را رسم می‌نمائیم و باتوجه به نمودار تابع f اکیداً نزولی است و فقط می‌توان با رسم تابع وارون تعداد نقاط برخورد را شناسائی کرد.

باتوجه به نمودار سه نقطه‌ی برخورد دارد.



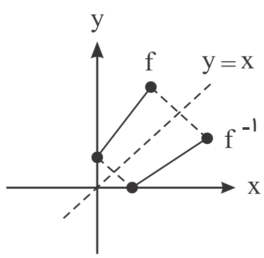
۳۴.گزینه ۳ برای محاسبهٔ ضابطه وارون ابتدا عبارت را برحسب x بازنویسی می‌نماییم:

$$y=\frac{-7x+3}{5} \to -7x+3=5y \to -7x=5y-3 \to x=\frac{5y-3}{-7}$$

در این مرحله x را به y و y را به x تبدیل می‌نماییم.

$$y=\frac{5x-3}{-7} \Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{5}{7}x+\frac{3}{7}$$

۳۵.گزینه ۲ کافیست نمودار f را نسبت به نیمساز قرینه کنیم.



۳۶.گزینه ۴ راه حل اول:

نکته: برای محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون $y=f(x)y=f(x)$، ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم، سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم.

ابتدا با استفاده از نکتهٔ بالا، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2x-1}{5} \Rightarrow 2x-1=5y \Rightarrow x=\frac{5y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5x+1}{2}$$

بنابراین:

$$f(f^{-1}(4))=f(\frac{5(4)+1}{2})=f(\frac{21}{2})=\frac{2(\frac{21}{2})-1}{5}=4$$

راه حل دوم:

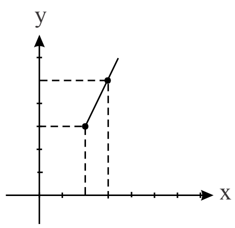
نکته: $f(f^{-1}(x))=x \quad , \quad f^{-1}(f(x))=x$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم: $f(f^{-1}(4))=4$

۳۷.گزینه ۴ هرگاه دو خط نسبت به نیمساز قرینه باشند. شیب یکی معکوس دیگری است یا حاصل‌ضرب شیب آن‌ها یک خواهد بود.

$$mf \times m_{f-1}=1 \to (m)(4m)=1 \to m^2=\frac{1}{4} \to m=\pm\frac{1}{2}$$

۳۸.گزینه ۳ با رسم تابع f به‌ازای $x \geq 2$ داریم:



برای یک‌به‌یک بودن می‌بایست، هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، این ویژگی زمانی برقرار است که در ضابطهٔ دوم به‌ازای ۲ $x <$ مقادیر $x + a$ کوچکتر از ۳ باشد، پس باید ۱ $\leq a$ باشد.

.۳۹گزینه ۱ باید توجه داشت اگر $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$ روی تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right.$ روی تابع وارون قرار دارد. پس داریم:

$$f(x)=(a+5)x+2b$$

$$\begin{aligned} &f^{-1}(11)=3\to f(3)=11\to (a+5)(3)+2b=11\to \\ &f^{-1}(7)=2\to f(2)=7\to (a+5)(2)+2b=7\to \end{aligned}\begin{cases} 3a+2b=-4 \\ 2a+2b=-3 \end{cases}$$

$$\ominus\to \boxed{a=-1}$$

$$\boxed{b=-\frac{1}{2}}$$

.۴۰گزینه ۳

$$f(x)=\frac{3x-1}{2}\Rightarrow y=\frac{3x-1}{2}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$x=\frac{3y-1}{2}\Rightarrow 2x=3y-1\Rightarrow 3y=2x+1\Rightarrow y=\frac{2x+1}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3}$$

.۴۱گزینه ۳ اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آنگاه تابع یک‌به‌یک است، پس f باید یک‌به‌یک باشد.
از آنجا که نمودار تابع f یک سهمی است، برای یک به یک بودن، بازهٔ (a,b) نباید شامل رأس سهمی باشد.

$$x_{\text{رأس سهمی}}=\frac{-b}{2a}=-\frac{(-7)}{2\times(2)}=\frac{7}{4}=1/75$$

از بین گزینه‌ها، تنها گزینهٔ (۳) شامل رأس سهمی نمی‌باشد.

.۴۲گزینه ۱ ابتدا معادلهٔ سهمی را به دست می‌آوریم. $x=2$ و $x=4$ ریشه‌های تابع درجه دوم هستند:

$$f(x)=a'(x-2)(x-4)$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (0,8) \text{ در معادله صدق می‌کند.}} 8=a'(0-2)(0-4)\Rightarrow 8a'=8\Rightarrow a'=1\Rightarrow f(x)=(x-2)(x-4)$$

وارون g، نمودار را در نقاط ۱ و ۳ قطع می‌کند، پس:

$$x=1\Rightarrow f(1)=(1-2)(1-4)=(-1)(-3)=3\Rightarrow (1,3)\in g^{-1}$$
$$x=3\Rightarrow f(3)=(3-2)(3-4)=1(-1)=-1\Rightarrow (3,-1)\in g^{-1}$$

حال معادلهٔ خط g^{-1} را می‌یابیم:

$$m=\frac{3-(-1)}{1-3}=\frac{4}{-2}=-2\Rightarrow y-3=-2(x-1)$$
$$\Rightarrow y=-2x+5\Rightarrow g^{-1}(x)=-2x+5$$

حال وارون $g^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=-2x+5\Rightarrow 2x=5-y$$
$$\Rightarrow x=\frac{5-y}{2}\Rightarrow g(x)=\frac{5-x}{2},g^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow -2x+5=\frac{5-x}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

.۴۳گزینه ۲ برای محاسبهٔ b,a کافیست، وارون تابع f را محاسبه و معادل f قرار می‌دهیم:

$$f(x)=3x-a\to y=3x-a\xrightarrow{\text{وارون}}$$
$$x=3y-a\to 3y=x+a\to y=\frac{x+a}{3}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{x+a}{3}=\frac{x-1}{b}\to\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}\to a+b=2$$

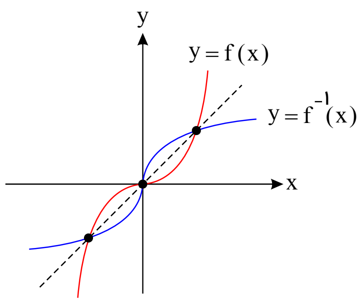
.۴۴گزینه ۱ با قرار دادن اعضای مجموعهٔ A به جای x، تابع f را می‌نویسیم:

$$f=\{(۱,۵),(۲,۳),(۳,۱),(۴,-۱)\} \Rightarrow f^{-۱}(۳)=۲\ ,\ \ f(۱)=۵ \Rightarrow f^{-۱}(۳)+f(۱)=۲+۵=۷$$

۴۵.گزینه ۳ **یکی از روش‌های حل این سوال رسم می‌باشد:**

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$

پس از رسم نمودار را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینه می‌نماییم تا منحنی تابع معکوس مشخص شود:



با توجه به منحنی سه نقطهٔ برخورد وجود دارد.

۴۶. گزینه ۲

$$(۲,۶)\in f^{-۱}\Rightarrow (۶,۲)\in f\Rightarrow f(۶)=۲\Rightarrow ۲=\frac{۲}{۳}\times(۶)+a\Rightarrow ۲=۴+a\Rightarrow \boxed{a=-۲}$$

ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲}{۳}x-۲\Rightarrow \frac{۲}{۳}x=y+۲\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}(y+۲)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}y+۳\xrightarrow[\text{جای } x,y]{\text{عوض کردن}} y=\frac{۳}{۲}x+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳}{۲}x+۳\Rightarrow f^{-۱}(۰)=۳$$

۴۷. گزینه ۱

$$f^{-۱}(۲)=a\Rightarrow f(a)=۲$$

$$f^{-۱}(-۲)=b\Rightarrow f(b)=-۲$$

اگر $a\leq ۰$ باشد: $f(a)=۲a-۱=۲\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$ غ‌ق‌ق

اگر $a>۰$ باشد: $f(a)=a-۱=۲\Rightarrow \boxed{a=۳}$

اگر $b\leq ۰$ باشد: $f(b)=۲b-۱=-۲\Rightarrow ۲b=-۱\Rightarrow \boxed{b=-\frac{۱}{۲}}$

اگر $b>۰$ باشد: $f(b)=b-۱=-۲\Rightarrow b=-۱$ غ‌ق‌ق

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲)+f^{-۱}(-۲)=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۴۸. گزینه ۱ نکته: برای تابع وارون‌پذیر f داریم: $(a,b)\in f\Leftrightarrow (b,a)\in f^{-۱}$

نکته: دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) برابرند، اگر و تنها اگر: $a=c\ ,\ b=d$

$$f=\{(۲,a+۱),(\sqrt{b},۳)\}\Rightarrow f^{-۱}=\{(a+۱,۲),(۳,\sqrt{b})\}$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$f^{-۱}=\{(a-۱,c+۱),(d,b-۲)\}$$

بنابراین: $\{(a+۱,۲),(۳,\sqrt{b})\}=\{(a-۱,c+۱),(d,b-۲)\}$

واضح است که $a+۱\neq a-۱$، پس:

$$\begin{cases}(a+۱,۲)=(d,b-۲)\\(۳,\sqrt{b})=(a-۱,c+۱)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲=b-۲\Rightarrow\boxed{b=۴}\\۳=a-۱\Rightarrow\boxed{a=۴}\\a+۱=d\xrightarrow{a=۴}\boxed{d=۵}\\\sqrt{b}=c+۱\xrightarrow{b=۴}\boxed{c=۱}\end{cases}$$

بنابراین: $a+b+c+d=۴+۴+۱+۵=۱۴$

۴۹.گزینه ۳ چون تابع f، وارون خود را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است، پس نقطهٔ $A(۳,۳)$ روی f و $f^{-۱}$ قرار دارد.

$$\begin{matrix}(۱,۲)\in f\\(۳,۳)\in f^{-۱}\end{matrix}\rightarrow(۲,۱)\in f^{-۱}$$

از طرفی چون f تابعی خطی است وارون آن هم تابعی خطی خواهد بود.

$$f^{-۱}(x)=ax+b$$

$$\begin{matrix}f^{-۱}(۲)=۱\rightarrow\\f^{-۱}(۳)=۳\rightarrow\end{matrix}\quad -\begin{cases}۲a+b=۱\\۳a+b=۳\end{cases}$$

$$-a=-۲\rightarrow\boxed{a=۲}\rightarrow۲(۲)+b=۱\rightarrow\boxed{b=-۳}$$

$$\boxed{f^{-۱}(x)=۲x-۳}\xrightarrow[y=۰]{\text{برخورد با محور }x\text{ها}}۲x-۳=۰\rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

۵۰.گزینه ۲

$$g^{-۱}(۶)=a\Rightarrow g(a)=۶$$
$$g(a)=f(a)+\sqrt{f(a)}\Rightarrow۶=f(a)+\sqrt{f(a)}\Rightarrow f(a)=۴\Rightarrow f^{-۱}(۴)=a\Rightarrow\sqrt[۳]{۸}=a\rightarrow a=۲$$

۵۱.گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{Lna=b\rightarrow a=e^{b}}$

برای پیدا کردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، کافی است x را بر حسب y بدست آوریم و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$y=۳-e^{x}\rightarrow e^{x}=۳-y\rightarrow x=Ln(۳-y)\rightarrow f^{-۱}(x)=Ln(۳-x)$$

در توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج برای پیدا کردن دامنه کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$xf^{-۱}(x)\geq۰\rightarrow xLn(۳-x)\geq۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\Ln(۳-x)=۰\xrightarrow{Ln۱=۰}۳-x=۱\rightarrow x=۲\end{cases}$$

از طرفی عبارت جلوی Ln باید مثبت باشد یعنی: $۳-x>۰\rightarrow x<۳$

x	-∞	۰		۲		۳	+∞
x	—	۰	+		+		+
Ln (۳-x)	+		+	۰	—	ت.ن	
عبارت ⩾ ۰	—	۰	+	۰	—	ت.ن	

$\rightarrow ۰\leqslant x\leqslant۲\rightarrow x\in[۰,۲]$

۵۲.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{e^{a}=b\rightarrow Lnb=a}$

برای پیدا کردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

$$y=۴-e^{۲x}\rightarrow e^{۲x}=۴-y\rightarrow۲x=Ln(۴-y)\rightarrow x=\frac{۱}{۲}Ln(۴-y)$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}Ln(۴-x)$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج کافی است زیررادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$xf^{-۱}(x) \geq ۰ \rightarrow \frac{۱}{۲}x \cdot Ln(۴-x) \geq ۰$$

دقت کنید که عبارت جلوی Ln باید مثبت باشد یعنی: $۴-x>۰ \rightarrow x<۴$

$$\frac{۱}{۲}x \cdot Ln(۴-x)=۰ \rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}x=۰ \rightarrow x=۰ \\ Ln(۴-x)=۰ \xrightarrow{Ln۱=۰} ۴-x=۱ \rightarrow x=۳ \end{cases}$$

x	$-\infty$	۰		۳		۴	$+\infty$
$\frac{۱}{۲}$ x	−	۰	+		+		+
Ln(۴−x)	+		+	۰	−	ت ن	
عبارت ≥ ۰	−	۰	+	۰	−	ت ن	

$$\rightarrow ۰ \leq x \leq ۳ \rightarrow x \in [۰,۳]$$

۵۳.گزینه ۲ **می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.**

$$f^{-۱}(g(۲a))=۶ \rightarrow f(۶)=g(۲a) \rightarrow ۳=\frac{۲a}{۲a-۱} \rightarrow ۶a-۳=۲a \rightarrow ۴a=۳ \rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۵۴.گزینه ۱ **دو تابع f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.**

$$۳y-۲x=۴ \rightarrow ۲x=۳y-۴ \rightarrow x=\frac{۳}{۲}y-۲ \rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳}{۲}x-۲ \xrightarrow{x=۰} \text{عرض از مبدأ}=-۲$$

۵۵.گزینه ۲ **می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.**

$$g^{-۱}of^{-۱}(a)=۸ \rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(a))=۸ \rightarrow f^{-۱}(a)=g(۸) \rightarrow f^{-۱}(a)=\sqrt{۵(۸)+۹}=\sqrt{۴۹}=۷$$

$$\rightarrow f^{-۱}(a)=۷ \rightarrow f(۷)=a \rightarrow a=۳$$

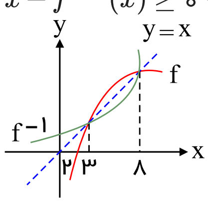
۵۶.گزینه ۴

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\} \quad , \quad g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$$

$$gof^{-۱}(x)=g(f^{-۱}(x))= \left.\begin{matrix} g(f^{-۱}(۲))=g(۱)=\varnothing \\ g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳ \\ g(f^{-۱}(۳))=g(۰)=\varnothing \\ g(f^{-۱}(-۱))=g(۴)=۱ \end{matrix}\right\} \rightarrow gof^{-۱}(x)=\{(۵,۳)(-۱,۱)\}$$

۵۷.گزینه ۴ **برای به‌دست آوردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.**

$$x-f^{-۱}(x) \geq ۰ \rightarrow x \geq f^{-۱}(x)$$



نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند و باتوجه به $x \geq f^{-۱}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y=x$ بزرگ‌تر مساوی تابع $f^{-۱}$ باشد یعنی $[۳,۸]$.

۵۸.گزینه ۱ **روش اول:**

$$\begin{cases} x \geq ۰ \ ; \ \ y = \dfrac{x}{۱+x} \Rightarrow y + xy = x \Rightarrow x = \dfrac{y}{۱-y} \xrightarrow{x \geq ۰} \dfrac{y}{۱-y} \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq y < ۱ & (۱) \\ x \leq ۰ \ ; \ \ y = \dfrac{x}{۱-x} \Rightarrow y - xy = x \Rightarrow x = \dfrac{y}{۱+y} \xrightarrow{x \leq ۰} \dfrac{y}{۱+y} \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < y \leq ۰ & (۲) \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x=\begin{cases}\dfrac{y}{1-y} & ;\ 0\le y<1\\ \dfrac{y}{1+y} & ;\ -1<y\le 0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{y}{1-|y|}\ ,\ \ |y|<1\rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}\ \ ;\ |x|<1$$

روش دوم:

می‌توانید نقطه‌ی دلخواهی از تابع را در نظر گرفته و جای x و y را عوض کرده و کنترل کنیم که این مختصات در کدام ضابطه صدق می کند. به عنوان مثال، نقطه‌ی $(2,\frac{2}{3})$ متعلق به تابع است. پس نقطه‌ی $(\frac{2}{3},2)$ متعلق به ضابطه‌ی تابع وارون می‌باشد. با کمی دقت پی می بریم که این مختصات تنها در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

۵۹.گزینه ۱

روش اول:

ضابطه‌ی بالا: $y=\sqrt{x}\ ,\ x\ge 0\Rightarrow y\ge 0$

$$\Rightarrow y^2=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2\ ,\ x\ge 0$$

ضابطه‌ی پایین: $y=-\sqrt{-x}\ ,\ x<0\Rightarrow y<0$

$$\Rightarrow y^2=-x\Rightarrow x=-y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2\ ,\ x<0$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون به‌صورت $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ **و یا به‌صورت** $f^{-1}(x)=x|x|\ ,\ x\in R$ **است.**

روش دوم:

یک x دلخواه در تابع قرار می‌دهیم.

$$x=4\xrightarrow{\text{تابع}}y=2\quad \left|\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right.\in f\Rightarrow \left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.\in f^{-1}$$

گزینه ای درست است که اگر به جای x آن ۲ قرار دهیم حاصل ۴ می شود. (گزینه‌ی اول)

۶۰.گزینه ۳   ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را بر می‌داریم:

$$y=\begin{cases}x^2-2x & x\ge 2\\ -x^2+2x & x<2\end{cases}$$

برای تشخیص نزولی بودن از تابع مشتق گرفته کوچک تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x\ge 2: y=x^2-2x\rightarrow y'=2x-2<0\rightarrow 2x<2\rightarrow x<1\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}\varnothing$$

$$x<2: y=-x^2+2x\rightarrow y'=-2x+2<0\rightarrow -2x<-2\rightarrow x>1\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}1<x<2$$

پس تابع در $(1,2)$ نزولی است حال ضابطه‌ی معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$y=-x^2+2x\rightarrow y=-(x^2-2x)\rightarrow y=-((x-1)^2-1)\rightarrow y=-(x-1)^2+1$$

$$\rightarrow (x-1)^2=1-y\rightarrow x-1=\pm\sqrt{1-y}\xrightarrow[\text{سمت چپ مثبت است}]{1<x<2}x-1=\sqrt{1-y}\rightarrow x=1+\sqrt{1-y}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y=-x^2+2x\ \ (1<x<2)$ است یک عدد دلخواه مثلاً $x=\frac{3}{2}$ در تابع قرار می‌دهیم.

$$x=\frac{3}{2}\rightarrow y=\frac{3}{4}\rightarrow \left|\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{4}\end{matrix}\right.\in f\rightarrow \left|\begin{matrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{2}\end{matrix}\right.\in f^{-1}\rightarrow$$ **فقط در گزینه‌ی سوم صدق می‌کند.**

۶۱.گزینه ۳

در ابتدا باید تکلیف قدرمطلق‌ها را معلوم کنیم. پس از تابع مشتق گرفته و بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$۲x-۶$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$	

$x<-۱\ :\ y=-۲x+۶-(-x-۱)\to y=-x+۷\to y'=-۱<۰\to$ نزولی

$-۱\le x\le ۳\ :\ y=-۲x+۶-(x+۱)\to y=-۳x+۵\to y'=-۳<۰\to$ نزولی

$x>۳\ :\ y=۲x-۶-(x+۱)\to y=x-۷\to y'=۱>۰\to$ صعودی

پس باید ضابطه‌ی معکوس تابع $y=x-۷$ را به ازای $x>۳$ به‌دست آوریم.

$$y=x-۷\to x=y+۷\to f^{-۱}(x)=x+۷\ ,\ x>-۴$$

توجه کنید: $y=x-۷\xrightarrow{x>۳}y>-۴$

دقت کنید $y>-۴$ برد تابع f است که در حقیقت دامنه‌ی تابع معکوس است.

۶۲.گزینه ۴

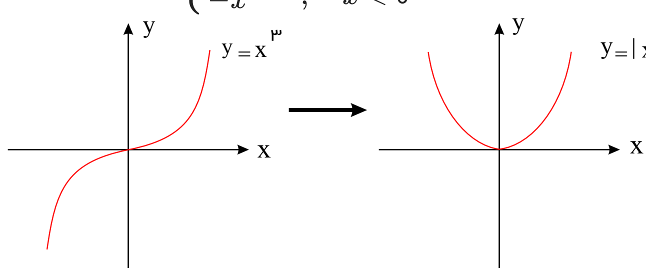
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ,\quad x\neq ۰\\ ۰ & ,\quad x=۰\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\to x=y^{۲}\to f^{-۱}(x)=x^{۲}\ ,\quad \overbrace{x>۰}^{y_۱=\sqrt{x}\ \text{برد}}$$

$$y=-\sqrt{-x}\to -x=y^{۲}\to x=-y^{۲}\to f^{-۱}(x)=-x^{۲}\ ,\quad \underbrace{x<۰}_{y_۲=-\sqrt{-x}\ \text{برد}}$$

$$\to f^{-۱}(x)=\begin{cases}x^{۲} & ,\quad x>۰\\ ۰ & ,\quad x=۰\\ -x^{۲} & ,\quad x<۰\end{cases}\to f^{-۱}(x)=x|x|\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

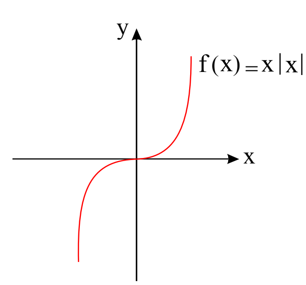
۶۳.گزینه ۳



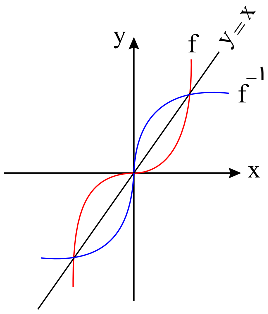
این تابع، غیر یک به یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است.

۶۴.گزینه ۳

$$f(x)=x\,|x|=\begin{cases}x^{۲} & x\ge ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}\to$$



برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، رسم کنیم.



۶۵.گزینه ۳ روش اول: برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، کافی است x را برحسب y بدست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x}\ ,\ x\geq 0\rightarrow y^{2}=x\rightarrow f^{-1}(x)=x^{2}\ ,\ x\geq 0 \\ y=-\sqrt{-x}\ ,\ x<0\rightarrow y^{2}=-x\rightarrow x=-y^{2}\rightarrow f^{-1}(x)=-x^{2}\ ,\ x<0 \end{array}\right. \rightarrow f^{-1}(x)=x\,|x|$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم و می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$x=4\xrightarrow{\text{تابع}}y=2\rightarrow A\left|\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right.\in f\rightarrow A'\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.\in f^{-1}\rightarrow$ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند.

$x=-4\xrightarrow{\text{تابع}}y=-2\rightarrow B\left|\begin{matrix}-4\\-2\end{matrix}\right.\in f\rightarrow B'\left|\begin{matrix}-2\\-4\end{matrix}\right.\in f^{-1}\rightarrow$ گزینه‌ی دوم حذف می‌شود.

۶۶.گزینه ۲ ابتدا وارون تابع داده شده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می‌دهیم و می‌دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=\frac{x+4}{x-2}\rightarrow xy-2y=x+4\rightarrow xy-x=2y+4\rightarrow x(y-1)=2y+4\rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$$

تلاقی: $f(x)=f^{-1}(x)\rightarrow\dfrac{x+4}{x-2}=\dfrac{2x+4}{x-1}\rightarrow 2x^{2}-4x+4x-8=x^{2}-x+4x-4$

$$\rightarrow x^{2}-3x-4=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-1\\ x=-\dfrac{c}{a}=4\end{cases}$$

۱- ۲	۲- ۳	۳- ۲	۴- ۳	۵- ۲
۶- ۴	۷- ۲	۸- ۲	۹- ۴	۱۰- ۱
۱۱- ۳	۱۲- ۳	۱۳- ۲	۱۴- ۱	۱۵- ۳
۱۶- ۴	۱۷- ۲	۱۸- ۲	۱۹- ۴	۲۰- ۱
۲۱- ۳	۲۲- ۴	۲۳- ۱	۲۴- ۲	۲۵- ۴
۲۶- ۲	۲۷- ۳	۲۸- ۳	۲۹- ۳	۳۰- ۲
۳۱- ۴	۳۲- ۳	۳۳- ۴	۳۴- ۳	۳۵- ۲
۳۶- ۴	۳۷- ۴	۳۸- ۳	۳۹- ۱	۴۰- ۳
۴۱- ۳	۴۲- ۱	۴۳- ۲	۴۴- ۱	۴۵- ۳
۴۶- ۲	۴۷- ۱	۴۸- ۱	۴۹- ۳	۵۰- ۲
۵۱- ۱	۵۲- ۳	۵۳- ۲	۵۴- ۱	۵۵- ۲
۵۶- ۴	۵۷- ۴	۵۸- ۱	۵۹- ۱	۶۰- ۳
۶۱- ۳	۶۲- ۴	۶۳- ۳	۶۴- ۳	۶۵- ۳
۶۶- ۲				