تنظیم : صادق طاهری

حد ، مشتق و کاربرد مشتق

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۱. حاصل $\lim_{x\to -۴}\left(\frac{x+۱۹}{x^۲+۳x-۴}+\frac{۳}{x+۴}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

–خارج از کشور–۱۳۸۶

۲. اگر $\lim_{x\to +\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$ ، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه ی $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

–خارج از کشور–۱۳۹۰

۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} & ,x>۰\\ a\sin(x+\frac{\pi}{۶}) & ,x\leq ۰\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در $x=۰$ پیوسته است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

–سراسری–۱۳۸۶

۴. حاصل $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

–خارج از کشور–۱۳۸۶

۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x+a)[x]$ اگر $\lim_{x\to ۲^+}f(x)-\lim_{x\to ۲^-}f(x)=۳$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) -۱ ۴) ۰

–سراسری–۱۳۸۷

۶. حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲   ۴) ۴

–خارج از کشور–۱۳۸۸

۷. حاصل $\lim_{x\to -۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

–خارج از کشور–۱۳۸۵

۸. حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

-سراسری-۱۳۸۸

۹. حاصل $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{4x - 8}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

-سراسری-۱۳۸۵

۱۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & ; \quad x > 1 \\ ax - a + 3 & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته است؟

۱) فقط $\frac{1}{2}$ ۲) فقط ۲

۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

-خارج از کشور-۱۳۸۶

۱۱. حاصل $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

-خارج از کشور-۱۳۹۳

۱۲. حد عبارت $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{2})^+$، کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) 2 ۳) 1 ۴) $-\infty$

-سراسری-۱۳۸۹

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۱۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ اگر $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

-سراسری-۱۳۹۰

۱۴. در تابع $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$، اگر $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

-خارج از کشور-۱۳۸۹

۱۵. حاصل $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{4}{x^2 - 4} - \dfrac{3}{2x^2 + 5x + 2}\right)$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{7}{12}$ ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{7}{12}$

-سراسری-۱۳۹۳

۱۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} & ;x\neq ۲ \\ a & ;x=۲ \end{cases}$**، به ازای کدام مقدار** a**، در نقطه‌ی ۲** $x=$ **پیوسته است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

-سراسری-۱۳۸۷

۱۷. با کدام مجموعه مقادیر a**، تابع با ضابطه‌ی** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x+a} & ; \quad x\geq -۱ \\ x^{۲}+ax & ; \quad x<-۱ \end{cases}$ **، در** $x=-۱$ **پیوسته است؟**

۱) $\{۱,\sqrt{۲}\}$ ۲) $\{۱+\sqrt{۲},۱-\sqrt{۲}\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

-خارج از کشور-۱۳۸۷

۱۸. تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۱}{x+۱} & ;|x|>۱ \\ ۲x & ;|x|\leq ۱ \end{cases}$**، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و ۱−چگونه است؟**

۱) در ۱− ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته   ۲) در ۱− ناپیوسته - در ۱ پیوسته

۳) در ۱− پیوسته - در ۱ پیوسته   ۴) در ۱− پیوسته - در ۱ ناپیوسته

-سراسری-۱۳۸۸

۱۹. به ازای کدام مقدار a **، تابع با ضابطه‌ی** $f(x)=\begin{cases} a+\sin^{۲}x & ۰\leq x<\dfrac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲}\cos ۳x & \dfrac{\pi}{۴}\leq x\leq ۲\pi \end{cases}$**، روی بازه‌ی** $[۰\ ,\ ۲\pi]$ **پیوسته است؟**

۱) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

-خارج از کشور-۱۳۸۸

۲۰. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax^{n}+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}}$ **، اگر** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-۱$ **باشد، آنگاه** $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ **کدام است؟**

۱) ۶-   ۲) ۴-   ۳) ۳   ۴) ۵

-سراسری-۱۳۹۴

۲۱. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+۱+\sqrt{۴x^{۲}+۹}}{۳x-۲}$ **از نقطه‌ی** $(۱,۲)$ **می‌گذرد.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **کدام است؟**

۱) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $\dfrac{۱}{۳}$ ۳) $\dfrac{۲}{۳}$ ۴) ۱

-سراسری-۱۳۹۱

۲۲. در تابع باضابطه ی $f(x)=\dfrac{ax^{n}-۳x+۱}{۳x^{۲}+x}$**، اگر** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{۲}{۳}$ **باشد،** $f(-۱)$ **کدام است؟**

۱) -۲ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۲   ۴) ۳

-خارج از کشور-۱۳۹۱

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۲۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}$ ، **اگر** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ **باشد، آنگاه** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ، **کدام است؟**

۱) $-\dfrac{1}{6}$　　۲) $-\dfrac{1}{8}$　　۳) $\dfrac{1}{4}$　　۴) $\dfrac{1}{3}$

-خارج از کشور-۱۳۹۴

۲۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+x-2|}{x-1} & ;x\neq 1\\ a & ;x=1\end{cases}$ **به ازای کدام مقدار** a **بر** R **پیوسته است؟**

۱) هر مقدار a　　۲) -3　　۳) 3　　۴) هیچ مقدار a

-سراسری-۱۳۹۰

۲۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}a+\sin 3x & 0\leq x<\dfrac{\pi}{2}\\ b\cos 2x & \dfrac{\pi}{2}<x\leq 2\pi\end{cases}$ **با شرط** $f(\dfrac{\pi}{2})=2$ **در بازه‌ی** $[0,2\pi]$ **پیوسته است** $a-b$ **کدام است؟**

۱) -5　　۲) -4　　۳) 4　　۴) 5

-سراسری-۱۳۸۹

۲۶. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}a\sin 2x & ;\dfrac{\pi}{4}\leq x<\dfrac{3\pi}{4}\\ \cos(x+\dfrac{\pi}{4}) & ;\dfrac{3\pi}{4}\leq x\leq 2\pi\end{cases}$ **بر بازه‌ی** $[\dfrac{\pi}{4},2\pi]$ **پیوسته است. مقدار** a **کدام است؟**

۱) -1　　۲) 0　　۳) $\dfrac{1}{2}$　　۴) 1

-خارج از کشور-۱۳۹۰

۲۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x-2} & ;x>2\\ 2x+b & ;x\leq 2\end{cases}$**، به ازای کدام مقدار** b **همواره پیوسته است؟**

۱) -4　　۲) -2　　۳) 2　　۴) 4

-خارج از کشور-۱۳۸۹

۲۸. حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$ ، **کدام است؟**

۱) -112　　۲) -96　　۳) -84　　۴) -72

-سراسری-۱۳۹۷

۲۹. حاصل $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}$ ، **کدام است؟**

۱) 8　　۲) 12　　۳) 16　　۴) 24

-خارج از کشور-۱۳۹۷

۳۰. اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\dfrac{1}{2}$ **باشد، آنگاه** b **کدام است؟**

۱) -2　　۲) -1　　۳) 1　　۴) 2

-خارج از کشور-۱۳۹۵

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۳۱. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=3$ باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی $x\to 3$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 5

-سراسری-۱۳۹۲

۳۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to -1$، کدام است؟

۱) $\dfrac{2}{3}$ ۲) $\dfrac{5}{6}$ ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) $\dfrac{5}{4}$

-سراسری-۱۳۹۵

۳۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6}{x^2-2x}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)$، کدام است؟

۱) $-\dfrac{5}{2}$ ۲) $-\dfrac{3}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) $\dfrac{3}{2}$

-سراسری-۱۳۹۶

۳۴. حد عبارت $\dfrac{2[x]}{2-x}+\dfrac{x+2}{x^2-2x}$، وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$ ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $+\infty$

-خارج از کشور-۱۳۹۲

۳۵. حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{x}{x+1}\right)$، کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\dfrac{3}{2}$ ۳) 1 ۴) $\dfrac{3}{2}$

-خارج از کشور-۱۳۹۶

صادق طاهری

۳۶. به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-5 & x>2 \\ ax-1 & x\leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=-2$ ۴) فقط $a=2$

-سراسری-۱۳۹۱

استاد برتر ریاضی کنکور

۳۷. به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x} & ;1\leq x\leq 6 \\ a+\cos^2\dfrac{\pi x}{36} & ;\quad x>6 \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) $-\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{2}$

-سراسری-۱۳۹۴

۳۸. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax+b & ;\quad x>2 \\ x^2+bx-1 & ;\quad x<2 \end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

-خارج از کشور-۱۳۹۱

۳۹. به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 3x-[x] & ; \quad x<2 \\ a & ; \quad x=2 \\ x+2 & ; \quad x>2 \end{cases}$ ، در نقطه‌ای به طول $x=2$ پیوسته است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۵ ۴) هیچ مقدار a

-سراسری-۱۳۹۲

۴۰. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; \quad x\neq 0 \\ a & ; \quad x=0 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در نقطه‌ای به طول $x=0$ پیوسته است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۹۶

۴۱. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax+2^{x-3} & ; x<3 \\ a\log_2(1+x) & ; x\geq 3 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=3$ پیوسته است، $f(2)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) ۱ ۴) صفر

-سراسری-۱۳۹۷

۴۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ; \quad x>1 \\ ax-a+2 & ; \quad x\leq 1 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ای به طول $x=1$ پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

-خارج از کشور-۱۳۹۶

۴۳. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax+3} & ; x<1 \\ x^2+ax & ; x\geq 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) ۰٫۵ ۲) ۱٫۲۵ ۳) ۱٫۵ ۴) ۲٫۵

-خارج از کشور-۱۳۹۷

۴۴. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[4\sin^2\pi x\right]$ روی بازه‌ی $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-خارج از کشور-۱۳۸۹

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۴۵. به ازای کدام مقدار a، منحنی به معادله‌ی $ay=x^2+5x+4$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

-سراسری-۱۳۸۵

۴۶. مشتق $f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ برابر -2 است. شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

۱) -4 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

-سراسری-۱۳۸۶

۴۷. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$، در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه‌ی $(-1\ ,\ 0)$ می گذرد. α کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

-خارج از کشور-۱۳۸۷

۴۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & x\geq 1 \\ x^2+ax+b & x<1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1-\sqrt{2})$ کدام می‌باشد؟

۱) $3-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $2-2\sqrt{2}$ ۴) $3-2\sqrt{2}$

-خارج از کشور-۱۳۹۲

۴۹. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & ; & x<1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; & x\geq 1 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۹۲

۵۰. اگر تابع f در $x=4$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=\frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y=\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

-سراسری-۱۳۹۶

۵۱. اگر تابع f در $x=-2$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+3}{h}=\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y=x^2f(x)$ در $x=-2$، کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۱۴

-خارج از کشور-۱۳۹۶

۵۲. خط به معادله‌ی $y=mx+4$ با منحنی به معادله‌ی $y=-x^2+2x$، هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند. مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m<0$ ۲) $m>4$ ۳) $-1<m<4$ ۴) $-2<m<6$

-خارج از کشور-۱۳۸۶

۵۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\frac{1}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر کند برابر $\frac{8}{9}$ است، h کدام است؟

۱) ۱٫۵   ۲) ۲   ۳) ۲٫۵   ۴) ۳

-سراسری-۱۳۸۶

۵۴. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y=-2x+b$، در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور xها متقاطع اند. طول‌های دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟

۱) ۲ و -1 ۲) ۳ و -1

۳) -1 و صفر   ۴) ۲ و صفر

-سراسری-۱۳۸۹

۵۵. خط به معادله‌ی $f(x)=2x-5$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله‌ی $g(x)=ax^2+bx+1$ مماس است. a کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

-سراسری-۱۳۸۶

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۵۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=3x^2+4x-2$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در $x=a+\frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $h+a$ تغییر کند، کدام است؟

۱) h ۲) $2h$ ۳) $3h$ ۴) 0

-خارج از کشور-۱۳۸۶

۵۷. در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه‌ی $[2/25, 2/56]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چه قدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{93}$ ۲) $\frac{2}{93}$ ۳) $\frac{1}{62}$ ۴) $\frac{1}{31}$

-سراسری-۱۳۸۷

۵۸. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ی $[0, 3]$، از آهنگ لحظه ای تابع در $x=\sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟

۱) 0 ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{9}$

-سراسری-۱۳۸۸

۵۹. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3$، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x=3$ و $\Delta x=0/1$، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه ای به طول $x=3$ چه قدر بیش تر است؟

۱) $0/31$ ۲) $0/42$ ۳) $0/62$ ۴) $0/91$

-خارج از کشور-۱۳۸۷

۶۰. در تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$، روی بازه‌ی $[2, 2/02]$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=2$ چه‌قدر بیش‌تر است؟

۱) $\frac{1}{202}$ ۲) $\frac{1}{101}$ ۳) $\frac{1}{51}$ ۴) $\frac{2}{51}$

-خارج از کشور-۱۳۸۸

۶۱. عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x^2+3x}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

-سراسری-۱۳۸۷

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۶۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{36}{x^2}$، آهنگ متوسط تابع از $x_1=2$ تا $x_2=3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

۱) $2/5$ ۲) $1/5$ ۳) 2 ۴) 1

-سراسری-۱۳۹۰

۶۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1=4$ تا $x_2=12$، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=4$، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{7}{540}$ ۲) $\frac{11}{540}$ ۳) $\frac{7}{270}$ ۴) $\frac{11}{270}$

-سراسری-۱۳۹۳

۶۴. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از $x_1=2$ تا $x_2=5$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. α کدام است؟

۱) ۲٫۵ ۲) $1+\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

-خارج از کشور-۱۳۹۰

۶۵. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1=4$ تا $x_2=6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=4$، چقدر کمتر است؟

۱) $\dfrac{1}{36}$ ۲) $\dfrac{1}{18}$ ۳) $\dfrac{5}{72}$ ۴) $\dfrac{1}{12}$

-خارج از کشور-۱۳۹۳

۶۶. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=x^3-x^2$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر A قطع می کند. عرض نقطه‌ی A کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

-خارج از کشور-۱۳۸۷

۶۷. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=1$ با نمو متغیر ۰٫۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\dfrac{1}{42}$ ۲) $\dfrac{1}{21}$ ۳) $\dfrac{3}{42}$ ۴) $\dfrac{2}{21}$

-سراسری-۱۳۹۴

۶۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در $x=1$ با نمو ۰٫۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\dfrac{1}{30}$ ۲) $\dfrac{1}{24}$ ۳) $\dfrac{1}{12}$ ۴) $\dfrac{1}{6}$

-خارج از کشور-۱۳۹۴

صادق طاهری

۶۹. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ، کدام است؟

۱) -21 ۲) -18 ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

-سراسری-۱۳۹۵

استاد برتر ریاضی کنکور

۷۰. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x+5}{x+3}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ، کدام است؟

۱) $\dfrac{7}{48}$ ۲) $\dfrac{5}{24}$ ۳) $\dfrac{7}{24}$ ۴) $\dfrac{7}{16}$

-خارج از کشور-۱۳۹۵

۷۱. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ ، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

۱) ۴- ۲) $-12, 4$ ۳) $12, -4$ ۴) ۱۲

-خارج از کشور-۱۳۹۳

۷۲. منحنی‌های توابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله‌ی $y = 7$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

-خارج از کشور-۱۳۸۵

۷۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax - a & x < 1 \\ x^2 - x & x \geq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

-سراسری-۱۳۸۶

۷۴. به‌ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y = 5x + a$، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$، مماس است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

-خارج از کشور-۱۳۹۷

۷۵. اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; \ x \geq -2 \\ x^3 - x & ; \ x < -2 \end{cases}$، همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۹۷

۷۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; \ x > 1 \\ ax + b & ; \ x \leq 1 \end{cases}$، مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

-خارج از کشور-۱۳۹۰

۷۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$، در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-خارج از کشور-۱۳۹۳

صادق طاهری

۷۸. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x\sqrt{x} + |x - 1|$، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

-سراسری-۱۳۹۰

استاد برتر ریاضی کنکور

۷۹. اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد.

-سراسری-۱۳۹۴

۸۰. اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]\, x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})$ کدام است؟(با تغییر)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

-خارج از کشور-۱۳۹۴

۸۱. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه‌ی $(2, \frac{1}{2})$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{4}{3}$

-خارج از کشور-۱۳۸۹

۸۲. خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^{3} + 3x^{2} + 1$، بر خط به معادله‌ی $x - 3y = 2$ عمود است. این خط مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) (۳ و ۱) ۲) (۴ و ۱) ۳) (۴− و ۲) ۴) (۶− و ۲)

–سراسری–۱۳۸۹

۸۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x| \cdot [x]$، مقدار $f'(0^{-}) - f'(0^{+})$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

–سراسری–۱۳۸۷

۸۴. مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x-2|\sqrt[3]{x^{2}}$ کدام است؟

۱) $\left\{0, \frac{4}{5}, 2\right\}$ ۲) $\left\{0, \frac{2}{3}, 2\right\}$ ۳) $\{0, 1\}$ ۴) $\left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$

–سراسری–۱۳۸۵

۸۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{4} - 6x^{2} + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) یک مینیمم نسبی دارد. ۲) یک ماکسیمم نسبی دارد.

۳) مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی دارد. ۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

–خارج از کشور–۱۳۹۰

۸۶. تابع $f : [-4,4] \to [-4,4]$ با ضابطه‌ی $f(x) = [x]$، چگونه است؟ (با تغییر)

۱) نزولی ـ یک به یک ۲) نزولی ـ غیر یک به یک ۳) صعودی ـ غیر یک به یک ۴) صعودی ـ یک به یک

–خارج از کشور–۱۳۸۷

۸۷. در بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^{2} - x - 10$، در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

–سراسری–۱۳۹۷

۸۸. می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^{4}}{4} - \frac{x^{3}}{3} - x^{2}$ روی بازه‌ی $[-1,3]$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $-\frac{10}{3}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{7}{3}$

–سراسری–۱۳۸۶

۸۹. بیش‌ترین مقدار تابع $y = x^{3} - 3x^{2} - 9x + 5$، در بازه‌ی $[-2,2]$، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۷

–سراسری–۱۳۹۲

۹۰. کم‌ترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^{4} - x^{3} - 2x^{2}$ کدام است؟

۱) -36 ۲) -32 ۳) -24 ۴) -18

–خارج از کشور–۱۳۹۲

۹۱. نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x^{3} - 3x^{2} + 4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه‌ی $(-1,2)$ چگونه است؟

۱) مینیمم ۲) ماکسیمم ۳) عادی ۴) مشتق‌ناپذیر

–خارج از کشور–۱۳۸۶

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۹۲. نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

-سراسری-۱۳۸۵

۹۳. مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x$، در بازه‌ی $[-۴,۳]$ ، کدام است؟

۱) -۱۸ و ۲۴
۲) -۴۵ و ۲۷
۳) -۳۶ و ۲۷
۴) -۲۷ و ۳۶

-سراسری-۱۳۹۵

۹۴. ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

-سراسری-۱۳۸۵

۹۵. اگر تابع با ضابطه‌ی $f\left(x\right)=\frac{x^{۲}-۲x}{x+a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

۱) $a>\circ$ یا $a<-۲$
۲) $a>۲$ یا $a<\circ$
۳) $-۲<a<\circ$
۴) $\circ<a<۲$

-خارج از کشور-۱۳۸۵

۹۶. دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵− نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

۱) -۸۴
۲) -۸۱
۳) -۵۷
۴) -۷۵

-خارج از کشور-۱۳۸۹

۹۷. طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f\left(x\right)=x^{۴}+\frac{۴}{۳}x^{۳}-۴x^{۲}$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۰
۴) ۱

-خارج از کشور-۱۳۸۵

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۱.گزینه ۱ حد داده شده از نوع مبهم $\infty-\infty$ است، بنابراین ابتدا مخرج مشترک می گیریم.

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{x+19}{\underbrace{x^2+3x-4}_{(x+4)(x-1)}}+\frac{3}{x+4}\right)=\lim_{x\to -4}\frac{x+19+3(x-1)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to -4}\frac{4x+16}{(x-1)(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{4(x+4)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to -4}\frac{4}{x-1}=-\frac{4}{5}$$

۲.گزینه ۴

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\overbrace{|x^2-4|}^{+}}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-4}{ax^2-x+2}\overset{\text{پرتوان}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{ax^2}=\frac{1}{a}=-1\Rightarrow a=-1$$

وقتی $x\to(-2)^+$ ، $x^2-4<0$ بوده و لذا $|x^2-4|=4-x^2$ می شود. بنابراین :

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{4-x^2}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)}=\frac{4}{3}$$

دقت کنید $(-2)^+$ را حدوداً $-1/99$ در نظر می گیریم.

۳.گزینه ۲

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=0$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}=2\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}a\sin(x+\frac{\pi}{6})=a\sin\frac{\pi}{6}=\frac{a}{2}\\ \displaystyle f(0)=a\sin\frac{\pi}{6}=\frac{a}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4$$

۴.گزینه ۱

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}}\overset{\text{پر توان}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2}}{3x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-2|\overbrace{x}^{+}|}{3x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-2x}{3x}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{3x}=\frac{-1}{3}$$

۵.گزینه ۱

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)-\lim_{x\to 2^-}f(x)=3\Rightarrow(2+a)[2^+]-(2+a)[2^-]=3$$

$$\Rightarrow(2+a)(2)-(2+a)(1)=3\Rightarrow 4+2a-2-a=3\Rightarrow a=1$$

۶.گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})}{2-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4+x-5)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{2+\sqrt{5-x}}{-(1+\sqrt{x})}=\frac{4}{-2}=-2$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{-\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}}=\frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}}=-2$$

۷.گزینه ۱

روش اول: در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+x-3}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}=\frac{-7}{4}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -1}\frac{2+\dfrac{1(-1)}{2\sqrt{3-x}}}{2x+1}=\frac{2-\dfrac{1}{4}}{-1}=\frac{-7}{4}$$

۸.گزینه ۱

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\frac{-1}{\cos^2 x}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

توجه کنید $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ می‌باشد.

۹.گزینه ۴

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4x-8}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{4(x-2)(x+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)}{4(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{4(x+2)}\right)=\frac{1}{4\times 4}=\frac{1}{16}$$

۱۰.گزینه ۴ شرط آنکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(2x+1)}{(x-1)}=3$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax-a+3)=a-a+3=3$$

$$f(1)=a-a+3=3$$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم برابر هستند ، پس تابع به ازای هر مقدار a در $x=1$ پیوسته است.

۱۱.گزینه ۲

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\underbrace{|x-2|}_{+}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2^+}\frac{-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{1}=-\frac{1}{12}$$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۱۲.گزینه ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x}{(۱-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x}{۱-\sin x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{-\sin x}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x=-\infty$$

دقت کنید $(\frac{\pi}{۲})^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در ناحیه‌ی دوم، تانژانت منفی است.

۱۳.گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴}\overset{\text{پر توان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-|\overbrace{x}^{+}|}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{ax^n}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}n=۱\\a=-۲\end{cases}$$

پس : $\lim_{x\to۲}\frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{\frac{-۲x}{۲\sqrt{x^۲+۵}}}{-۲}=\frac{\frac{-۴}{۶}}{-۲}=\frac{۱}{۳}$

۱۴.گزینه ۳

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۳\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{ax-۲}$$

$$\overset{\text{پر توان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-|\overbrace{x}^{-}|}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-(-x)}{ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=۳\Rightarrow a=۱$$

$$\lim_{x\to۲}f(x)=\lim_{x\to۲}\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۶x}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{۲-\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}}{۱}=\frac{۲-\frac{۵}{۴}}{۱}=\frac{۳}{۴}$$

۱۵.گزینه ۲

$$\lim_{x\to-۲}\left(\frac{۳}{۲x^۲+۵x+۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)=\lim_{x\to-۲}\left(\frac{۳}{(۲x+۱)(x+۲)}-\frac{۴}{(x+۲)(x-۲)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-۲}\left(\frac{۳(x-۲)-۴(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)\lim_{x\to-۲}\left(\frac{\overbrace{۳x-۶-۸x-۴}^{-۵x-۱۰}}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-۲}\left(\frac{-۵(x+۲)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)=\frac{-۵}{(-۳)(-۴)}=\frac{-۵}{۱۲}$$

توجه کنید عبارت $۲x^۲+۵x+۲$ به ازای $x=-۲$ صفر می‌شود پس برای تجزیه‌ی آن، عبارت را بر $x+۲$ تقسیم می‌کنیم.

۱۶.گزینه ۳

شرط پوسیدگی تابع f در $x=a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۲}\frac{۱-\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}}}{-۱} = -\frac{۱}{۲}$$

پس $f(۲) = a = -\frac{۱}{۲}$ است

۱۷.گزینه ۳

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x=-۱$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

امکان ندارد

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۱}{x+a} = \frac{۱}{-۱+a} = \frac{-۱}{۱-a}\\ \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-}(x^۲+ax) = (-۱)^۲ + a(-۱) = ۱-a\\ f(-۱) = \frac{۱}{-۱+a} = \frac{-۱}{۱-a}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-۱}{۱-a} = ۱-a \Rightarrow (۱-a)^۲ = -۱ \Rightarrow$$

۱۸.گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x-۱ & x>۱ \text{ یا } x<-۱\\ ۲x & -۱\le x\le ۱\end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=۱$ و $x=-۱$ بدست آوریم.

$$x=۱ : \begin{cases}\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}(x-۱) = ۱-۱ = ۰\\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲(۱) = ۲\\ f(۱) = ۲(۱) = ۲\end{cases} \Rightarrow$$
تابع در $x=۱$ ناپیوسته است.

$$x=-۱ : \begin{cases}\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} ۲x = ۲(-۱) = -۲\\ \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-}(x-۱) = -۱-۱ = -۲\\ f(-۱) = ۲(-۱) = -۲\end{cases} \Rightarrow$$
تابع در $x=-۱$ پیوسته است.

۱۹.گزینه ۱ برای پیوستگی تابع f در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول $x=\frac{\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\sqrt{۲}\cos ۳x = \sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴} = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱\\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}(a+\sin^۲ x) = a+\sin^۲\frac{\pi}{۴} = a+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = a+\frac{۱}{۲}\\ f(\frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴} = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱\end{array}\right\} \Rightarrow a+\frac{۱}{۲} = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۲۰.گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-2\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{5x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=1$. پس داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{5x}=\frac{a}{5}=-1\to a=-5$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to3}\frac{-5}{3-\frac{1(8x+15)}{2\sqrt{4x^2+15x}}}=\frac{-5}{3-\frac{39}{18}}=\frac{-5}{\frac{15}{18}}=-6$$

۲۱.گزینه ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌ی $(2,1)$ می‌گذرد، مختصات آن در ضابطه‌ی تابع f صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(2)=1\Rightarrow\frac{2a+1+\sqrt{25}}{3(2)-2}=1\Rightarrow\frac{2a+6}{4}=1\Rightarrow 2a+6=4\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\sqrt{4x^2}}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2\overbrace{|x|}^{+}}{3x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

۲۲.گزینه ۴

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{2}{3}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n-3x+1}{3x^2+x}\overset{\text{پر توان}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{3x^2}\overset{n=2}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{3x^2}=\frac{a}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow a$$
$$=2$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و n، مقدار $f(-1)$ را به دست می آوریم. داریم:

$$\xrightarrow[a=2]{n=2}f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x}\Rightarrow f(-1)=\frac{2(-1)^2-3(-1)+1}{3(-1)^2+(-1)}=\frac{2+3+1}{3-1}=\frac{6}{2}=3$$

۲۳.گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax^n-6}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\overbrace{|x|}^{+}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{ax^n}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=1$ پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{ax}=\frac{3}{a}=-\frac{1}{2}\to a=-6$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-1}\frac{2+\frac{1(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-6}=\frac{2-\frac{5}{4}}{-6}=\frac{-1}{8}$$

۲۴.گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=1$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\overbrace{|(x+2)(x-1)|}^{+}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}=3$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\overbrace{|(x+2)(x-1)|}^{-}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)}=-3$$

این تابع در $x=1$ پیوسته نمی‌باشد.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۲۵.گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x=\frac{\pi}{2}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} b\cos 2x=b\cos\pi=-b \\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(a+\sin 3x)=a+\sin\frac{3\pi}{2}=a-1 \\ f(\frac{\pi}{2})=2 \end{cases}$$

پس: $-b=2\to b=-2\ ,\ a-1=2\to a=3\to a-b=5$

۲۶.گزینه ۴ برای پیوستگی f در بازه ی $[\frac{\pi}{4},2\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{3\pi}{4}$ اعمال کنیم.
(تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos\pi=-1 \\ \lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^-} a\sin 2x=a\sin\frac{3\pi}{2}=-a \\ f(\frac{3\pi}{4})=\cos(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\cos\pi=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow -a=-1\Rightarrow a=1$$

۲۷.گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=2$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^3-3x^2+4}{x-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x^2-6x}{1}=12-12=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+b)=4+b \\ f(2)=4+b \end{array}\right\}\Rightarrow 0=4+b\Rightarrow b$$
$$=-4$$

۲۸.گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{(3-\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)}=-(4)(14)(2)=-112$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 4}\frac{6x-10}{\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}}=\frac{14}{\frac{-\frac{1}{4}}{2}}=\frac{14}{-\frac{1}{8}}=-112$$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۲۹.گزینه ۳

روش اول:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x+3)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3-x}}\right)}{\left(4-2-\sqrt{3-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1)(4)\left(2+\sqrt{3-x}\right)}{\left(2-\sqrt{3-x}\right)\left(2+\sqrt{3-x}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(1)(4)(4)}{(4-3+x)}=16$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{2-\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -1}\frac{4x+5}{-\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{2\sqrt{2+\sqrt{3-x}}}}=\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{4}}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$$

۳۰.گزینه ۲

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\frac{0}{2a+b}\xrightarrow[\text{بوده که پس از رفع ابهام جوابش } \frac{1}{2} \text{ شده است } \frac{0}{0}]{\text{چون جواب حد، برابر عدد شده است پس این کسر حتما}}2a+b=0$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{1-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a}=\frac{1-\frac{3}{4}}{a}=\frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\to a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-1$$

۳۱.گزینه ۳

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to +\infty}\frac{ax}{-x}=-a=3\Rightarrow a=-3$$

پس: $\lim_{x\to 3}\dfrac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 3}\dfrac{-3}{-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\dfrac{-3}{-1+\frac{1}{4}}=\dfrac{-3}{-\frac{3}{4}}=4$

۳۲.گزینه ۲

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+\sqrt{4x^2}}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+2|\overbrace{x}^{+}|}{2x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+2x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(a+2)x}{2x}=\frac{a+2}{2}=\frac{5}{2}\to a=3$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -1}\frac{3+\dfrac{1(8x)}{2\sqrt{4x^2+5}}}{2}=\frac{3-\frac{8}{6}}{2}=\frac{\frac{10}{6}}{\frac{2}{1}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

۳۳.گزینه ۱

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{x(x-2)}-\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6-x^2-x}{\underbrace{x(x-2)}_{x^2-2x}}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\left(\frac{-2x-1}{2x-2}\right)=\frac{-4-1}{4-2}=\frac{-5}{2}$$

۳۴.گزینه ۲ $\left[2^-\right]$ برابر یک می‌باشد بنابراین حد داده شده به این صورت درمی‌آید.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲}{۲-x}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}-\frac{۲}{(x-۲)}\right)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{-x+۲}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{-(x-۲)}{x(x-۲)}\right)=\frac{-۱}{۲}$$

۳۵.گزینه ۲ ضمناً برای محاسبه‌ی حد راست و رسیدن به مبهم $\frac{۰}{۰}$ باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت.

$$\lim_{x\to -۱^+}\left(\frac{۲}{x^۲-۱}-\frac{x}{x+۱}\right)=\lim_{x\to -۱^+}\left(\frac{۲}{(x+۱)(x-۱)}-\frac{x}{x+۱}\right)$$

$$=\lim_{x\to -۱^+}\left(\frac{۲-x(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}\right)=\lim_{x\to -۱^+}\left(\frac{۲-x^۲+x}{x^۲-۱}\right)=\frac{۰}{۰}\to\lim\frac{-(x-۲)\cancel{(x+۱)}}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}=\frac{۳}{-۲}$$

۳۶.گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه‌ی مرزی آن، یعنی $x=۲$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases}\text{حد راست}=\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x^۲+ax-۵)=۴+۲a-۵=۲a-۱\\ \text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱\end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

۳۷.گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۶^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^+}(a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶})=a+\cos^۲\frac{\pi}{۶}=a+\frac{۳}{۴}\\ \lim\limits_{x\to ۶^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ f(۶)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

۳۸.گزینه ۳ برای آن که تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کافی است در نقطه ای به طول ۲ $x=$ پیوسته باشد. برای این منظور حد راست، حد چپ و مقدار تابع را در $x=۲$ محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(ax+b)=۲a+b\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۲+bx-۱)=۴+۲b-۱=۲b+۳\Rightarrow ۲b+۳=۵\Rightarrow b=۱\\ f(۲)=۵\end{cases}$$

$$۲a+b=۵\Rightarrow ۲a+۱=۵\Rightarrow a=۲$$

۳۹.گزینه ۴

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴\quad ,\ \text{حد چپ}=\lim_{x\to ۲^-}(۳x-[x])=۶-۱=۵$$

حدود چپ و راست در $x=۲$ برابر نیستند، بنابراین هرگز تابع در این نقطه پیوسته نبوده و مقداری برای a وجود ندارد.

۴۰.گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۰}f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{-\frac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۱-x}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$f(۰)=a$$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

پس $a=۲$ است.

۴۱.گزینه ۲ شرط پیوستگی تابع f در $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(a\log_{۲}^{۱+x})=a\log_{۲}^{۴}=a\log_{۲}^{۲^{۲}}=۲a\\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(ax+۲^{x-۳})=۳a+۱\\ f(۳)=a\log_{۲}^{۴}=a\log_{۲}^{۲^{۲}}=۲\end{array}\right\}\to ۳a+۱=۲a\to a=-۱$$

پس : $f(۲)\overset{\text{ضابطه‌ی بالا } y}{=\!=\!=\!=}۲a+۲^{-۱}=-۲+\frac{۱}{۲}=-\frac{۳}{۲}=-۱/۵$

۴۲.گزینه ۳ شرط پیوسته بودن تابع در نقطه‌ای به طول $x=a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{x(\sqrt{x}-۱)}=۲$$

$$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(ax-a+۲)=a-a+۲=۲$$

$$f(۱)=a-a+۲=۲$$

بنابراین به ازای هر مقدار a، تابع در $x=۱$ پیوسته است.

۴۳.گزینه ۳

شرط اینکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x^{۲}+ax)=۱+a$$

$$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\sqrt{ax+۳}=\sqrt{a+۳}\to\sqrt{a+۳}=۱+a\xrightarrow{\text{توان ۲}}a+۳=a^{۲}+a+۲a$$

$$a^{۲}+a-۲=۰\to(a+۲)(a-۱)=۰\to\begin{cases}a=-۲ & \text{غ‌ق‌ق}\\ a=۱\end{cases}$$

پس: $f(\frac{-۳}{۴})=\sqrt{-\frac{۳}{۴}a+۳}=\sqrt{-\frac{۳}{۴}+۳}=\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$

۴۴.گزینه ۴ روش اول: تابع به فرم $y=[f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول Min نسبی پیوسته تابع f نباشد ناپیوسته است.

$$۰\le x\le\frac{۱}{۲}\to ۰\le\pi x\le\frac{\pi}{۲}\to ۰\le\sin^{۲}\pi x\le ۱\to ۰\le ۴\sin^{۲}\pi x\le ۴$$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$4\sin^2 \pi x = 0 \to \sin \pi x = 0 \to \pi x = 0 \to x = 0$$

$$4\sin^2 \pi x = 1 \to \sin^2 \pi x = \frac{1}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \to \pi x = \frac{\pi}{6} \to x = \frac{1}{6}$$

$$4\sin^2 \pi x = 2 \to \sin^2 \pi x = \frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4} \to \pi x = \frac{\pi}{4} \to x = \frac{1}{4}$$

$$4\sin^2 \pi x = 3 \to \sin^2 \pi x = \frac{3}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{3} \to \pi x = \frac{\pi}{3} \to x = \frac{1}{3}$$

$$4\sin^2 \pi x = 4 \to \sin^2 \pi x = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \to \pi x = \frac{\pi}{2} \to x = \frac{1}{2}$$

ابتدای بازه‌ی بسته پیوستگی راست و انتهای بازه‌ی بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در $x = 0$ پیوستگی راست دارد پس $x = 0$ نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد و تابع در $x = \frac{1}{2}$ پیوستگی چپ ندارد پس نقطه‌ی ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به‌صورت $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ است.

۴۵.گزینه ۴

منحنی داده شده و خط $y = x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{cases} ay = x^2 + 5x + 4 \\ y = x \end{cases} \to ax = x^2 + 5x + 4 \to \boxed{x^2 + (5-a)x + 4 = 0} \ : \quad \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف}: \Delta = 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac = 0} (5-a)^2 - 16 = 0 \Rightarrow a - 5 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$a = 9 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 - 4x + 4 = 0 \to (x-2)^2 = 0 \to x = 2 \ \checkmark$$

$$a = 1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 + 4x + 4 = 0 \to (x+2)^2 = 0 \to x = -2 \ \times$$

دقت کنید در ناحیه‌ی اول، x مثبت است.

۴۶.گزینه ۱

می دانیم: $\boxed{y = f(u) \to y' = u' f'(u)}$

$$y = f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right) \Rightarrow y' = \frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}} f'\left(\sqrt[3]{6x+2}\right) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{6}{12} f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = -4$$

شیب خط قائم، عکس و قرینه‌ی شیب خط مماس است. بنابراین $m_{\text{قائم}} = \frac{1}{4}$ است.

۴۷.گزینه ۴ ابتدا شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه به طول α محاسبه می کنیم:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f'(\alpha) = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

با توجه به این که این خط از نقطه‌ی $\left(\alpha \ , \ \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$ می گذرد، معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha)$$

نقطه‌ی $(-1, 0)$ روی خط فوق است؛ بنابراین با قرار دادن مختصات نقطه‌ی $(-1, 0)$ به جای x و y در معادله‌ی این خط داریم:

$$0 - \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۴۸.گزینه ۳

شرط پیوستگی : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x - \frac{1}{x}) = 1 - 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b \Rightarrow 1 + a + b = 0 \\ f(1) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

تساوی مشتق‌های راست وچپ : $f'_+(1) = f'_-(1) \to 1 + \frac{1}{x^2} = 2x + a \to 1 + 1 = 2 + a \to a = 0 \ , \ b = -1$

پس $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$ می‌باشد.

$$f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

۴۹.گزینه ۲

شرط مشتق پذیری تابع f در $x = a$ آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x = a$ باهم برابر باشند.

شرط پیوستگی : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2\sqrt{4x - 3} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^3 + bx) = a + b \Rightarrow a + b = 2 \ \ (I) \\ f(1) = 2 \end{cases}$

تساوی مشتق‌های راست وچپ: $f'_+(1) = f'_-(1) \to 2 \times \frac{4}{2\sqrt{4x - 3}} = 3ax^2 + b \to 4 = 3a + b \ \ (II)$

از I و II جواب $a = 1$ و $b = 1$ بدست می‌آید.

۵۰.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y = f(u) \to y' = u' f'(u)}$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{f(4) + 7}{0} \xrightarrow[\text{کسر}\frac{0}{0}\text{بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است}]{\text{چون جواب حد، عدد شده است پس این}} f(4) + 7 = 0 \to f(4) = -7$$

پس : $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim\limits_{x\to 4} \frac{f'(x)}{1} = f'(4) = -\frac{3}{2}$

اکنون مشتق $y = \frac{f(2x)}{x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y = \frac{f(2x)}{x} \to y' = \frac{2f'(2x) \cdot x - 1 f(2x)}{x^2}$$

$$\to y'(2) = \frac{4f'(4) - f(4)}{4} = \frac{4(-\frac{3}{2}) - (-7)}{4} = \frac{-6 + 7}{4} = \frac{1}{4}$$

۵۱.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{y = f(u) \to y' = u' \cdot f'(u)}$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-2 + h) + 3}{h} = \frac{f(-2) + 3}{0}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس این کسر $\frac{0}{0}$ بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$f(-۲)+۳=۰ \to f(-۲)=-۳$

پس: $\lim_{h\to ۰}\dfrac{f(-۲+h)+۳}{h}=\dfrac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to ۰}\dfrac{f'(-۲+h)}{۱}=f'(-۲)=\dfrac{۱}{۲}$

$y=x^۲\cdot f(x)\to y'=۲x\cdot f(x)+x^۲\cdot f'(x)\to y'(-۲)=(-۴)f(-۲)+۴f'(-۲)$

$\to y'(-۲)=(-۴)(-۳)+۴(\dfrac{۱}{۲})=۱۲+۲=۱۴$

.۵۲گزینه ۴ یعنی اگر خط و منحنی را تلاقی دهیم معادله‌ی تلاقی نباید ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

معادله‌ی تلاقی : $\begin{cases} y=-x^۲+۲x \\ y=mx+۴\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}-x^۲+۲x=mx+۴\Rightarrow \boxed{x^۲+(m-۲)x+۴=۰}$

برای اینکه معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta<۰$ باشد.

$\Delta<۰\Rightarrow b^۲-۴ac<۰$

$\Rightarrow (m-۲)^۲-۱۶<۰\Rightarrow (m-۲)^۲<۱۶\Rightarrow -۴<m-۲<۴\Rightarrow -۲<m<۶$

.۵۳گزینه ۳

$\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲}=\dfrac{۸}{۹}\Rightarrow \dfrac{۲+h+\dfrac{۱}{۲+h}-۲-\dfrac{۱}{۲}}{h}=\dfrac{۸}{۹}\Rightarrow ۸h=۹h+\dfrac{۹}{۲+h}-\dfrac{۹}{۲}$

$h=\dfrac{۹}{۲}-\dfrac{۹}{۲+h}\Rightarrow h=\dfrac{۱۸+۹h-۱۸}{۲(۲+h)}\Rightarrow ۱=\dfrac{۹}{۲(۲+h)}\Rightarrow ۴+۲h=۹\Rightarrow h=\dfrac{۵}{۲}=۲/۵$

.۵۴گزینه ۳ چون نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳+ax+b$ و خط به معادله‌ی $y+۲x=b$ در نقطه‌ای به طول یک روی محور xها متقاطع هستند پس نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ در ضابطه‌ی تابع و خط صدق می‌کند.

$\left.\begin{matrix} f(x)=x^۳+ax+b\xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}۱\\۰\end{smallmatrix}\right.}۰=۱+a+b \\ y+۲x=b\xrightarrow{\left|\begin{smallmatrix}۱\\۰\end{smallmatrix}\right.}۰+۲=b\end{matrix}\right\}\to b=۲\ ,\ a=-۳$

برای پیدا کردن طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر منحنی و خط، باید آنها را تلاقی دهیم.

$x^۳+ax+b=b-۲x\xrightarrow{a=-۳\ ,\ b=۲}x^۳-۳x+۲=۲-۲x$

$\to x^۳-x=۰\to x(x^۲-۱)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=-۱\end{cases}$

.۵۵گزینه ۴ هرگاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند آنگاه $\begin{cases}f(a)=g(a)\\f'(a)=g'(a)\end{cases}$ است.

$\begin{matrix}f(۱)=g(۱)\to ۲-۵=a+b+۱\to a+b=-۴\\ f'(۱)=g'(۱)\to ۲=۲ax+b\to ۲a+b=۲\end{matrix}\quad\to a=۶\ ,\ b=-۱۰$

.۵۶گزینه ۴

آهنگ لحظه‌ای = مشتق = $۶x+۴\xrightarrow{x=a+\frac{h}{۲}}۶(a+\dfrac{h}{۲})+۴=۶a+۳h+۴$

آهنگ متوسط از a تا $a+h$ = $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{۳(a+h)^۲+۴(a+h)-۲-۳a^۲+۴a-۲}{h}$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$= \frac{۶ah + ۳h^۲ + ۴h}{h} = ۶a + ۳h + ۴$$

واضح است تفاضل این دو مقدار برابر صفر است.

روش دوم: در تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ آهنگ متوسط در هر بازه با مشتق تابع در وسط آن بازه برابر است. در تابع درجه‌ی دوم داده شده آهنگ متوسط در بازه‌ی $[a\ ,\ a+h]$ با آهنگ لحظه‌ای در وسط این بازه $\frac{a+a+h}{۲}$ $(a+\frac{h}{۲})$ برابر است و تفاضل آن‌ها صفر است.

۵۷.گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۲/۵۶) - f(۲/۲۵)}{۲/۵۶ - ۲/۲۵} = \frac{\sqrt{۲/۵۶} - \sqrt{۲/۲۵}}{۲/۵۶ - ۲/۲۵} = \frac{۱/۶ - ۱/۵}{۰/۳۱} = \frac{۰/۱}{۰/۳۱} = \frac{۱۰}{۳۱}$$

$$\text{آهنگ آنی (لحظه‌ای)} = f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۲/۲۵) = \frac{۱}{۲ \times ۱/۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} - \frac{۱۰}{۳۱} = \frac{۱}{۹۳}$$

۵۸.گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۳) - f(۰)}{۳ - ۰} = \frac{۵ - ۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱۶}} \Rightarrow f'(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین تفاضل آهنگ متوسط و لحظه‌ای، برابر صفر است.

۵۹.گزینه ۴

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } x \text{ تا } x+\Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xlongequal[\Delta x = ۰/۱]{x=۳} \frac{f(۳/۱) - f(۳)}{۰/۱}$$

$$= \frac{(۳/۱)^۳ - ۳^۳}{۰/۱} = \frac{۲۹/۷۹۱ - ۲۷}{۰/۱} = ۲۷/۹۱$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x = ۳ = f'(۳) = ۳x^۲ \xlongequal{x=۳} ۲۷$$

بنابراین تفاضل آنها می‌شود $۲۷/۹۱ - ۲۷ = ۰/۹۱$ است.

۶۰.گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۲/۰۲) - f(۲)}{۲/۰۲ - ۲} = \frac{\frac{۲/۰۲}{۲/۰۲ - ۱} - ۲}{۰/۰۲} = \frac{\frac{۲/۰۲}{۱/۰۲} - ۲}{۰/۰۲} = \frac{\frac{-۲}{۱۰۲}}{\frac{۲}{۱۰۰}} = -\frac{۵۰}{۵۱}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x = ۲ = f'(۲) = \frac{x - ۱ - x}{(x-۱)۲} = -۱$$

$$\text{پس :} -\frac{۵۰}{۵۱} - (-۱) = -\frac{۵۰}{۵۱} + ۱ = \frac{۱}{۵۱}$$

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۶۱.گزینه ۲

$$۱)\ x=۱ \to y=\sqrt{۴}=۲ \to A\Big|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}$$

$$۲)\ y'=\frac{۱(۲x+۳)}{۲\sqrt{x^{۲}+۳x}} \to m_{\text{مماس}}=\frac{۵}{۴}$$

$$۳)\ y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱) \xrightarrow{x=۰} y-۲=-\frac{۵}{۴} \to y=\frac{۳}{۴}$$

۶۲.گزینه ۴

آهنگ متوسط $=\dfrac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲}=\dfrac{۴-۹}{۱}=-۵$

آهنگ لحظه‌ای $=f'(x)=\dfrac{-۷۲x}{x^{۴}}=\dfrac{-۷۲}{x^{۳}}\xlongequal{x=\sqrt[۳]{۱۲}}\dfrac{-۷۲}{۱۲}=-۶$

پس آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ آنی بیشتر است.

۶۳.گزینه ۲

$$f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}$$

آهنگ متوسط از ۴ تا ۱۲ $=\dfrac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\dfrac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=\dfrac{\frac{-۲}{۱۵}}{\frac{۸}{۱}}=-\dfrac{۱}{۶۰}$

مشتق=آهنگ لحظه‌ای $=\dfrac{\frac{-۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{۲x+۱}\xlongequal{x=۴}\dfrac{-\frac{۲}{۶}}{۹}=-\dfrac{۱}{۲۷}$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۶۰}-\left(-\frac{۱}{۲۷}\right)=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

۶۴.گزینه ۳

آهنگ متوسط تغییر تابع $=\dfrac{f(۵)-f(۲)}{۵-۲}=\dfrac{\frac{۵}{۴}-۲}{۳}=\dfrac{۵-۸}{۱۲}=\dfrac{-۳}{۱۲}=\dfrac{-۱}{۴}$

$$f(x)=\frac{x}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{x-۱-x}{(x-۱)^{۲}}=\frac{-۱}{(x-۱)^{۲}}\xrightarrow[\text{در } x=\alpha]{\text{آهنگ لحظه‌ای}} f'(\alpha)=\frac{-۱}{(\alpha-۱)^{۲}}$$

آهنگ متوسط = آهنگ لحظه ای $\Rightarrow \dfrac{-۱}{۴}=\dfrac{-۱}{(\alpha-۱)^{۲}}\Rightarrow(\alpha-۱)^{۲}=۴$

$$\alpha-۱=\pm۲\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۲+۱=۳\\ \alpha=-۲+۱=-۱\end{cases}$$

۶۵.گزینه ۱

آهنگ متوسط $=\dfrac{f(۶٫۲۵)-f(۴)}{۶٫۲۵-۴}=\dfrac{\sqrt{۶٫۲۵}-\sqrt{۴}}{۲٫۲۵}=\dfrac{۲٫۵-۲}{۲٫۲۵}=\dfrac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۲۲۵}{۱۰۰}}=\dfrac{۲}{۹}$

مشتق = آهنگ لحظه‌ای $=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\xlongequal{x=۴}\dfrac{۱}{۴}$

پس تفاضل آنها $\dfrac{۱}{۴}-\dfrac{۲}{۹}=\dfrac{۱}{۳۶}$ می‌شود.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۶۶.گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول $x=1$ را نوشته و سپس معادله‌ی تلاقی این خط و منحنی را تشکیل داده و حل می‌کنیم.

$$1)\ x=1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=0 \rightarrow A\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

$$2)\ y'=3x^2-2x \rightarrow m_{\text{مماس}}=3-2=1$$

$$3)\ y-0=1(x-1)\rightarrow y=x-1$$

$$\begin{cases} y=x^3-x^2 \\ y=x-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^3-x^2=x-1 \Rightarrow x^3-x^2-x+1=0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=-1-1=-2 \end{cases}$$

۶۷.گزینه ۱ وقتی x اولیه ، یک می‌باشد و نمو متغیر ۰٫۲۱ است پس x ثانویه ۱٫۲۱ است.

$$[1,1.21]\ \text{آهنگ متوسط}=\frac{f(1.21)-f(1)}{1.21-1}=\frac{\sqrt{1.21}-\sqrt{1}}{0.21}=\frac{1.1-1}{0.21}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{21}{100}}=\frac{10}{21}$$

$$x=1\ \text{آهنگ لحظه‌ای در}=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

بنابراین تفاضل آنها $\frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{1}{42}$ است.

۶۸.گزینه ۴ وقتی x اولیه، یک می‌شود و نمو متغیر ۰٫۴۴ است پس x ثانویه ۱٫۴۴ است.

$$[1,1.44]\ \text{آهنگ متوسط در}=\frac{f(1.44)-f(1)}{1.44-1}=\frac{\frac{1.44-1}{\sqrt{1.44}}-0}{0.44}=\frac{\frac{0.44}{1.2}}{0.44}=\frac{0.44}{0.528}=\frac{440}{528}=\frac{5}{6}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(x)=\frac{1(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x}\rightarrow f'(1)=1$$

بنابراین تفاضل آن‌دو $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ می‌شود.

۶۹.گزینه ۱

مشخص است که $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای x آن عدد ۲ را قرار دهیم.

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3\rightarrow f'(x)=3\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^2\left(\frac{\frac{1(2x-3)-2(x+2)}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)\left(\frac{-7}{(2x-3)^2}\right)\rightarrow f'(2)=\frac{3}{2}(2)(-7)=-21$$

۷۰.گزینه ۱

مشخص است که $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$ می‌باشد، بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و به جای x آن عدد یک را قرار دهیم.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}\to f'(x)=\frac{\frac{۴(x+۳)-۱(۴x+۵)}{(x+۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}}\to f'(۱)=\frac{\frac{۷}{۱۶}}{۲(\frac{۳}{۲})}=\frac{۷}{۴۸}$$

۷۱.گزینه ۱ کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه‌ی اول $(y=x)$ تلاقی دهیم و معادله‌ی تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

معادله‌ی تلاقی

$$\begin{cases}y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶\\ y=x\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}۲x^۲+(m+۱)x+m+۶=x\Rightarrow\boxed{۲x^۲+mx+m+۶=۰}:$$

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=۰\to b^۲-۴ac=۰\to m^۲-۴(۲)(m+۶)=۰\to m^۲-۸m-۴۸=۰$

$\to(m-۱۲)(m+۴)=۰\to m=۱۲,-۴$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، طول نقطه‌ی تماس مثبت است (در ناحیه‌ی اول x مثبت است).

$m=۱۲\to۲x^۲+۱۲x+۱۸=۰\to x^۲+۶x+۹=۰\to(x+۳)^۲=۰\to x=-۳$ غ ق ق

$m=-۴\to۲x^۲-۴x+۲=۰\to x^۲-۲x+۱=۰\to(x-۱)^۲=۰\to x=۱$ ق ق

۷۲.گزینه ۲ چون خط بر نمودار توابع مماس است پس معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$-x^۲+bx+۳=۷\to\boxed{x^۲-bx+۴=۰}$: معادله‌ی تلاقی

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=۰\to b^۲-۴ac=۰\to b^۲-۱۶=۰\to b=\pm۴$

$b=۴\xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}}x^۲-۴x+۴=۰\to(x-۲)^۲=۰\to x=۲\to A\begin{vmatrix}۲\\۷\end{vmatrix}$ نقطه‌ی تماس

$b=-۴\xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}}x^۲+۴x+۴=۰\to(x+۲)^۲=۰\to x=-۲\to A'\begin{vmatrix}-۲\\۷\end{vmatrix}$ نقطه‌ی تماس

پس : $AA'=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۷-۷)^۲}=۴$

۷۳.گزینه ۲

شرط مشتق‌پذیری تابع f در $x=a$ آن است که تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x=a$ باهم برابر باشند.

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}(x^۲-x)=۰\\ \lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}(a-a)=۰\end{matrix}\right\}\to\lim_{x\to۱}f(x)=f(۱)=۰\Rightarrow$$ f در $x=۱$ پیوسته است.

$$\left.\begin{matrix}f'(۱^+)=(x^۲-x)'=۲x-۱=۱\\ f'(۱^-)=a\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=۱$$

۷۴.گزینه ۲ شرط اینکه دو تابع برهم مماس باشند آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

$$\begin{cases}y=۲x^۲-۳x+۶\\ y=۵x+a\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}۲x^۲-۳x+۶=۵x+a\to۲x^۲-۸x+۶-a=۰:$$ معادله‌ی تلاقی

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=۰\to b^۲-۴ac=۰\to۶۴-۸(۶-a)=۰$

$\to۸-(۶-a)=۰\to۸-۶+a=۰\to a=-۲$

۷۵.گزینه ۲ شرط مشتق مشتق‌پذیری تابع f در $x=a$ آن است که: تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x=a$ باهم برابر باشند.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$:\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^+}(ax^۲+bx+۴)=۴a-۲b+۴\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}(x^۳-x)=-۸+۲=-۶\\ f(-۲)=۴a-۲b+۴\end{cases}\Rightarrow ۴a-۲b+۴=-۶\to ۴a-۲b=-۱۰$$

پیوستگی

$$f'((-۲)^+)=f'((-۲)^-)\to ۲ax+b=۳x^۲-۱\to -۴a+b=۱۱$$

از حل $\begin{cases}۴a-۲b=-۱۰\\ -۴a+b=۱۱\end{cases}$ به جواب $b=-۱$ و $a=-۳$ می‌رسیم.

پس : $f(۱)\xlongequal{\text{ضابطه‌ی بالا}}a+b+۴=-۳-۱+۴=۰$

۷۶.گزینه ۴ چون $f'(۱)$ موجود است، لذا f در $x=۱$ پیوسته است و مشتق چپ و راست f در $x=۱$ با هم برابرند، پس داریم:

$$\text{شرط پیوستگی:}\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}\sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲}=\sqrt[۳]{۸^۲}=\sqrt[۳]{(۲^۲)^۳}=۴\\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}(ax+b)=a+b\\ f(۱)=a+b\end{cases}\Rightarrow a+b=۴\quad(*)$$

$$\left.\begin{array}{l}x>۱\to f(x)=\sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲}\to f'(x)=\dfrac{۲(۲)}{۳\sqrt[۳]{۲x+۶}}\to f'(۱^+)=\dfrac{۴}{۳(۲)}=\dfrac{۲}{۳}\\ x<۱\to f(x)=ax+b\to f'(x)=a\to f'(۱^-)=a\end{array}\right\}\to a=\frac{۲}{۳}\ ,\ b=\frac{۱۰}{۳}$$

۷۷.گزینه ۲ برای مشتق‌پذیری در یک نقطه، تابع باید در آن نقطه پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ، در آن نقطه با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^+}(\frac{۳}{x}-۵)=۳-۵=-۲\\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۱^-}(x^۲+ax+b)=۱+a+b\\ f(۱)=۳-۵=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۱+a+b=-۲\Rightarrow a+b=-۳$$

$$\left.\begin{array}{l}f'_+(۱)=-\dfrac{۳}{x^۲}=-۳\\ f'_-(۱)=۲x+a=۲+a\end{array}\right\}\to ۲+a=-۳\to a=-۵, b=۲$$

۷۸.گزینه ۳ وقتی $x\to ۱^+$ داخل قدر مطلق، مثبت است و وقتی $x\to ۱^-$ داخل قدر مطلق، منفی است.

$$x\to ۱^+ : f(x)=x\sqrt{x}+x-۱=x^{\frac{۳}{۲}}+x-۱\to f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+۱\to f'_+(۱)=\frac{۳}{۲}+۱=\frac{۵}{۲}$$

$$x\to ۱^- : f(x)=x\sqrt{x}-x+۱=x^{\frac{۳}{۲}}-x+۱\to f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}-۱\to f'_-(۱)=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

پس : $f'_+(۱)+۳f'_-(۱)=\frac{۵}{۲}+۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۸}{۲}=۴$

۷۹.گزینه ۲ در ابتدا قدر مطلق‌های توابع f و g را از بین می‌بریم.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x| \to f(x)=\begin{cases}\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}x & x\geq 0\\ \frac{4}{5}x+\frac{1}{5}x & x<0\end{cases} \to f(x)=\begin{cases}\frac{3}{5}x & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$$

$$g(x)=4x+|x| \to g(x)=\begin{cases}4x+x & x\geq 0\\ 4x-x & x<0\end{cases} \to g(x)=\begin{cases}5x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases}$$

$$x\geq 0 \;:\; fog(x)=f(g(x))=\frac{3}{5}(5x)=3x$$

$$x<0 \;:\; fog(x)=f(g(x))=3x$$

یعنی $fog(x)=3x$ است پس مشتق آن برابر ۳ می‌باشد.

۸۰.گزینه ۴

$$x\to(\sqrt{2})^{+} \Rightarrow f(x)=x^3-\left[4^{+}\right]x \to f(x)=x^3-4x$$

بنابراین: $f'(x)=3x^2-4 \to f'_{+}(\sqrt{2})=3(2)-4=2$

۸۱.گزینه ۱ برای تعیین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی $y=\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه ی $(2,\frac{1}{2})$، ابتدا باید معادله ی خط مماس در این نقطه را بنویسیم.

$$y'=\frac{-\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x)^2}}}{(\sqrt[3]{4x})^2} \Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{-\frac{4}{12}}{4}=-\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{12}(x-2) \xrightarrow{x=0} y-\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \to y=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۸۲.گزینه ۴

$$x-3y=2 \to m_{\text{خط}}=\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{مماس}}=-3$$

شیب خط مماس همان مشتق است، بنابراین کافی است که از تابع، مشتق گرفته و مساوی ۳− قرار دهیم.

$$y'=3x^2+6x=-3 \to 3x^2+6x+3=0 \to x^2+2x+1=0 \to (x+1)^2=0$$

$$\to x=-1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=-1+3+1=3$$

$$A\Big|^{-1}_{3}\;,\; m=-3 \to y-y_1=m(x-x_1) \to y-3=-3(x+1) \to y=-3x$$

فقط گزینه‌ی چهارم در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

۸۳.گزینه ۳

دقت کنید که وقتی $x\to 0^{-}$ داخل قدر مطلق منفی و $[0^{-}]=-1$ است و وقتی $x\to 0^{+}$ داخل قدر مطلق مثبت و $[0^{+}]=0$ است.

$$\left.\begin{matrix} x=0^{-} \Rightarrow f(x)=(-x)(-1) \Rightarrow f(x)=x \Rightarrow f'(0^{-})=1 \\ x=0^{+} \Rightarrow f(x)=(x)(0) \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow f'(0^{+})=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1-0=1$$

۸۴.گزینه ۱ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد. دامنه‌ی تعریف این تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی $Df=(-\infty,+\infty)$ است.

ابتدا قدرمطلق را با تعیین علامت، از بین می‌بریم:

$$x\geq 2 \to f(x)=(x-2)x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} \to f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{\frac{-1}{3}}=0 \xrightarrow{\times 3} 5x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{-1}{3}}=0$$

$\to 5\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}=0 \to \frac{5x-4}{\sqrt[3]{x}}=0 \to x=\frac{4}{5}$,   در $x=0$، مشتق وجود ندارد

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

به ازای $x < ۲$ نیز همین دو نقطه‌ی بحرانی بدست می‌آید. دقت کنید $x = ۲$ ریشه‌ی ساده داخل قدرمطلق می‌باشد، بنابراین تابع در $x = ۲$ مشتق‌ناپذیر است پس بحرانی می‌باشد. (نقطه‌ی زاویه‌دار)

۸۵.گزینه ۱

$$f(x) = x^{۴} - ۶x^{۲} + ۸x \Rightarrow f'(x) = ۴x^{۳} - ۱۲x + ۸ = ۰ \rightarrow x^{۳} - ۳x + ۲ = ۰$$

برای حل این معادله درجه سوم دقت کنید که چون مجموع ضرایب آن صفر است یک ریشه معادله $x = ۱$ می‌باشد و معادله بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است.

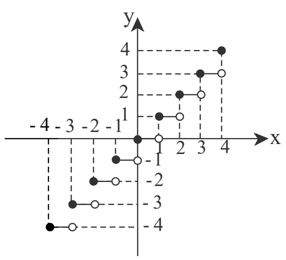
$$(x-۱)(x^{۲}+x-۲) = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۲)(x-۱) = ۰ \rightarrow (x-۱)^{۲}(x+۲) = ۰ \rightarrow x = ۱ \ , \ x = -۲$$

با استفاده از آزمون مشتق اول، داریم:

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
y		$\searrow$	Min	$\nearrow$		$\nearrow$	

$\rightarrow$ **تابع یک Min نسبی دارد.**

۸۶.گزینه ۳



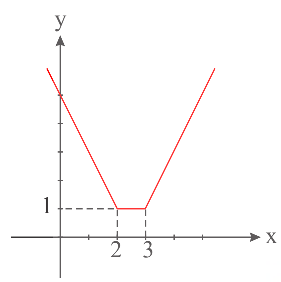
نمودار تابع $y = [x]$ را رسم می کنیم.

این تابع یک به یک نمی‌باشد (زیرا تابعی یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند)

در ضمن همانطور که نمودار نشان می دهد تابع $y = [x]$ تابعی صعودی است.

۸۷.گزینه ۱

تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x < ۲$ اکیداً نزولی است.



$$\rightarrow y = |x-۲| + |x-۳| \xrightarrow{x<۲} y = -x + ۲ - x + ۳ \rightarrow y = -۲x + ۵$$

$$\begin{cases} f(x) = -۲x + ۵ \\ g(x) = ۲x^{۲} - x - ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^{۲} - x - ۱۰ = -۲x + ۵ \rightarrow ۲x^{۲} + x - ۱۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۱ + ۱۲۰ = ۱۲۱} \begin{cases} x = \dfrac{-۱+۱۱}{۴} = \dfrac{۵}{۲} (x < ۲ \text{ غ ق ق (با توجه به}) \\ x = \dfrac{-۱-۱۱}{۴} = -۳ \ \text{ق ق} \end{cases} \rightarrow \text{در یک نقطه مشترک هستند}$$

۸۸.گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x^{۴}}{۴} - \frac{x^{۳}}{۳} - x^{۲}$$

$$f'(x) = x^{۳} - x^{۲} - ۲x = ۰ \Rightarrow x(x^{۲} - x - ۲) = ۰ \Rightarrow x(x-۲)(x+۱) \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

حال، مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(۰) = ۰ \ , \ f(-۱) = \frac{-۵}{۱۲} \ , \ f(۲) = -\frac{۸}{۳} \ , \ f(۳) = \frac{۹}{۴}$$

پس کمترین مقدار تابع برابر $-\dfrac{۸}{۳}$ می‌باشد.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

۸۹.گزینه ۲

$$y' = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = ۳ \text{ (در بازه قرار ندارد) غ ق ق} \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(-۲) = -۸ - ۱۲ + ۱۸ + ۵ = ۳$$
$$f(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ + ۵ = ۱۰$$
$$f(۲) = ۸ - ۱۲ - ۱۸ + ۵ = -۱۷$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر ۱۰ می‌باشد.

۹۰.گزینه ۲ چون بازه‌ای داده نشده‌است دامنه‌ی تعریف این تابع را به‌عنوان بازه در نظر می‌گیریم $Df = (-\infty, +\infty)$

$$y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲ \Rightarrow y' = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = x(x^۲ - ۳x - ۴) = x(x-۴)(x+۱) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \\ x = -۱ \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای طول‌های نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه بدست می‌آوریم.

$$f(\pm\infty) = \frac{۱}{۴}(\pm\infty)^۴ = +\infty \ , \ f(۰) = ۰ \ , \ f(۴) = -۳۲ \ , \ f(-۱) = -\frac{۳}{۴}$$

کمترین مقدار تابع برابر ۳۲− می‌باشد.

۹۱.گزینه ۲ نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$f(x) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲ + ۴} \rightarrow f'(x) = \frac{۳x^۲ - ۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳ - ۲x^۲ + ۴)^۲}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = ۰ \rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \text{ ق ق} \\ x = ۲ \text{ (در بازه قرار ندارد) غ ق ق} \end{cases} \\ \text{مخرج} = ۰ \rightarrow x^۳ - ۳x^۲ + ۴ = ۰ \rightarrow (x+۱)(x-۲)^۲ = ۰ \\ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ (در بازه قرار ندارد) غ ق ق} \\ x = ۲ \text{ (در بازه قرار ندارد) غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

کافی است مشتق را در اطراف $x = ۰$ (ریشه‌ی ساده‌ی مشتق) تعیین علامت کنیم.

x	-۱	۰	۲
y'	$+$	۰	$-$
y	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$\rightarrow$ $x = ۰$ طول نقطه‌ی Max است

برای تجزیه‌ی عبارت درجه‌ی سوم $x^۳ - ۳x^۲ + ۴$ توجه کنید که چون $x = ۲$ عبارت را صفر می‌کند پس این عبارت بر $x - ۲$ بخش‌پذیر است. با تقسیم عبارت درجه‌ی سوم بر $x - ۲$ چندجمله‌ای تجزیه می‌شود.

۹۲.گزینه ۴

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$y = x^۲(x-۲)^۲ \Rightarrow y' = ۲x(x-۲)^۲ + ۲(x-۲)\cdot x^۲ = \underbrace{۲x(x-۲)}_{\text{فاکتور}}(x - ۲ + x) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x(x-۲)(۲x-۲) = ۰$$

$$x = ۰ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۰ \ \rightarrow \ A\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right.$$

$$x = ۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۰ \ \rightarrow \ B\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix}\right. \Rightarrow AB = \sqrt{۴ + ۰} = ۲ \ , \ AC = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲} \ , \ BC = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

$$x = ۱ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۱ \ \rightarrow \ C\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix}\right.$$

مثلث متساوی‌الساقین است و چون $۲^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲$ پس مثلث قائم‌الزاویه نیز می‌باشد.

۹۳.گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x \to f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

$$\to \begin{cases} x=۵ \to \text{غ ق ق (در بازه قرار ندارد)} \\ x=-۳ \end{cases}$$

اکنون باید مقدار تابع را به ازای طول نقطه‌ی بحرانی و ابتدا و انتهای بازه، بدست آوریم.

$$f(-۴)=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳}\sim ۲۲{,}۶$$

$$f(۳)=۹-۹-۴۵=-۴۵ \to \text{مطلق } Min$$

$$f(-۳)=-۹-۹+۴۵=۲۷ \to \text{مطلق } Max$$

۹۴.گزینه ۲ روش اول:

$$y=\frac{۱}{x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵}=\frac{۱}{x^{۲}(x^{۲}-۴x+۴)+۵}=\frac{۱}{x^{۲}(x-۲)^{۲}+۵}$$

کم‌ترین مقدار عبارت $x^{۲}(x-۲)^{۲}$ مساوی صفر است بنابراین کم‌ترین مقدار مخرج کسر مساوی ۵ است پس ماکسیمم مطلق تابع $\frac{۱}{۵}$ است. (صورت کسر یک عدد مثبت است پس بیش‌ترین مقدار کسر وقتی بدست می‌آید که مخرج کسر، کم‌ترین مقدار را داشته باشد)

روش دوم:

$$Df=R=(-\infty,+\infty)$$

$$y'=\frac{-(۴x^{۳}-۱۲x^{۲}+۸x)}{(x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵)^{۲}}=\frac{-۴x(x^{۲}-۳x+۲)}{(x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵)^{۲}}=\frac{-۴x(x-۱)(x-۲)}{(x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}+۵)^{۲}}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای $\pm\infty$ و طول‌های نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(۰)=\frac{۱}{۵} \ \text{مطلق min} \ \text{و} \ f(۱)=\frac{۱}{۶}\ ,\ f(۲)=\frac{۱}{۵}\ ,\ f(\pm\infty)=\frac{۱}{x^{۴}}=\frac{۱}{+\infty}=۰$$

اگر بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع به ازای $\pm\infty$ به‌دست می‌آمدند تابع max یا min مطلق نداشت.

۹۵.گزینه ۱

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۲x}{x+a} \to f'(x)=\frac{(۲x-۲)(x+a)-(x^{۲}-۲x)}{(x+a)^{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۲ax-۲x-۲a-x^{۲}+۲x=۰ \Rightarrow x^{۲}+۲ax-۲a=۰$$

معادله $f'(x)=۰$ باید دارای ریشه ساده باشد پس Δ باید مثبت باشد.

$$\Delta>۰ \to b^{۲}-۴ac>۰ \to ۴a^{۲}+۸a>۰ \Rightarrow a^{۲}+۲a>۰ \Rightarrow a(a+۲)>۰ \Rightarrow \begin{cases} a<-۲ \\ \text{یا} \\ a>۰ \end{cases}$$

۹۶.گزینه ۲ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵− نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx$ هستند. پس به ازای این دو طول، مشتق تابع برابر صفر می‌شود. داریم:

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \begin{cases} f'(3)=0 \Rightarrow 27+6a+b=0 \\ f'(-5)=0 \Rightarrow 75-10a+b=0 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=-45$$

حال با معلوم شدن ضابطه‌ی f، برای تعیین عرض مینیمم نسبی این تابع، ابتدا طول مینیمم نسبی را از روی ریشه‌های ساده‌ی f' مشخص می‌کنیم و با جای‌گذاری طول مینیمم نسبی در تابع، عرض آن را محاسبه می‌نماییم. اما با توجه به صورت تست، $x=-5$, $x=3$ همان طول نقاط اکسترمم نسبی تابع می‌باشند.

$$f(x)=x^3+3x^2-45x \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-45=0 \Rightarrow x^2+2x-15=0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

$$y_{Min}=f(3)=27+27-135=-81$$

۹۷.گزینه ۳

$$f'(x)=4x^3+4x^2-8x=0 \Rightarrow 4x(x^2+x-2)=0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$	

پس، طول نقطه‌ی Max نسبی تابع برابر صفر است.

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۹۸۵۱۷۰

۱- ۱	۲- ۴	۳- ۲	۴- ۱	۵- ۱
۶- ۲	۷- ۱	۸- ۱	۹- ۴	۱۰- ۴
۱۱- ۲	۱۲- ۴	۱۳- ۴	۱۴- ۳	۱۵- ۲
۱۶- ۳	۱۷- ۳	۱۸- ۴	۱۹- ۱	۲۰- ۱
۲۱- ۲	۲۲- ۴	۲۳- ۲	۲۴- ۴	۲۵- ۴
۲۶- ۴	۲۷- ۱	۲۸- ۱	۲۹- ۳	۳۰- ۲
۳۱- ۳	۳۲- ۲	۳۳- ۱	۳۴- ۲	۳۵- ۲
۳۶- ۱	۳۷- ۲	۳۸- ۳	۳۹- ۴	۴۰- ۴
۴۱- ۲	۴۲- ۳	۴۳- ۳	۴۴- ۴	۴۵- ۴
۴۶- ۱	۴۷- ۴	۴۸- ۳	۴۹- ۲	۵۰- ۳
۵۱- ۴	۵۲- ۴	۵۳- ۳	۵۴- ۳	۵۵- ۴
۵۶- ۴	۵۷- ۱	۵۸- ۱	۵۹- ۴	۶۰- ۳
۶۱- ۲	۶۲- ۴	۶۳- ۲	۶۴- ۳	۶۵- ۱
۶۶- ۲	۶۷- ۱	۶۸- ۴	۶۹- ۱	۷۰- ۱
۷۱- ۱	۷۲- ۲	۷۳- ۲	۷۴- ۲	۷۵- ۲
۷۶- ۴	۷۷- ۲	۷۸- ۳	۷۹- ۲	۸۰- ۴
۸۱- ۱	۸۲- ۴	۸۳- ۳	۸۴- ۱	۸۵- ۱
۸۶- ۳	۸۷- ۱	۸۸- ۳	۸۹- ۲	۹۰- ۲
۹۱- ۲	۹۲- ۴	۹۳- ۲	۹۴- ۲	۹۵- ۱
۹۶- ۲	۹۷- ۳			

صادق طاهری
استاد برتر ریاضی کنکور