

۱ اگر  $x$  زاویه‌ای در ربع چهارم باشد، عبارت  $(4\sin^2 60^\circ - 3\sin^2 x)$  با  $\sqrt{\tan^2 x + 2\tan x + 1}$  کدام گزینه برابر است؟

- (۱)  $3 \cos x$   
 (۲)  $-3 \cos x$   
 (۳)  $3 \cot x \cos x$   
 (۴)  $-3 \cot x \cos x$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

۲ در یک جمع شش زوج حضور دارند. به چند طریق می‌توان هفت نفر از آن‌ها را انتخاب کرد، به طوری که بین آن‌ها دقیقاً دو زوج حضور داشته باشند؟

- (۱)  $320$   
 (۲)  $480$   
 (۳)  $792$   
 (۴)  $840$

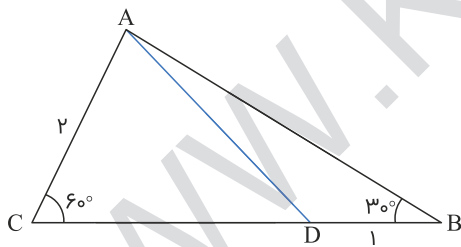
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

۳ عامل مشترک تجزیه دو عبارت  $x^3 + x - 10$  و  $x^3 - 2x^2 - x + 2$  کدام است؟

- (۱)  $x^2 + 2x + 5$   
 (۲)  $x^2 - 1$   
 (۳)  $x + 2$   
 (۴)  $x - 2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

۴ در شکل زیر، مساحت مثلث  $ABC$  برابر  $2\sqrt{3}$  می‌باشد. مساحت مثلث  $ABD$  چقدر است؟



- (۱)  $\sqrt{3}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۳)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$   
 (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

چند عدد صحیح در نامعادله  $\frac{(-x^2 + x - 1)(5 - x^2)}{|x - 2|} \leq 0$  صدق می‌کند؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) بی‌شمار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

کوچک‌ترین جمله دنباله  $t_n = \frac{n}{4n - 17}$  چه مقدار دارد؟

- (۱)  $\frac{-1}{17}$   
(۲)  $\frac{-2}{9}$   
(۳)  $-4$   
(۴)  $\frac{-3}{5}$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم انسانی دوازدهم  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در مدرسه‌ای ۳۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۴۳ نفر عضو تیم بسکتبال و ۱۲ نفر فقط در یکی از دو تیم شرکت کرده‌اند. ۸ نفر نیز در هیچ تیمی حضور ندارند. دانش‌آموزان این مدرسه چند نفرند؟

- (۱) ۵۰  
(۲) ۵۳  
(۳) ۵۵  
(۴) ۵۷

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

به ازای چه مقادیری از  $n$  مجموعه‌های  $[-1, 1]$  و  $[1, 2n + 1]$  جداازهم نیستند؟

- (۱)  $n \in [-4, -1]$   
(۲)  $n \in [-1, 4]$   
(۳)  $n \in [-2, 2]$   
(۴)  $n > 4$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

مجموعه  $A$  دارای ۳۰ عضو و مجموعه  $B$  دارای ۲۵ عضو است و اشتراک آن‌ها ۱۲ عضو دارد. اگر ۱۴ عضو از  $A$  کم شود، از اشتراک آن‌ها ۷ عضو کم می‌شود. تعداد اعضای اجتماع مجموعه جدید  $A$  با مجموعه  $B$  کدام است؟

- (۱) ۲۸  
(۲) ۳۲  
(۳) ۳۶  
(۴) ۴۷

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

جمله چهارم یک دنباله حسابی برابر با 15 است. اگر به جملات اول، سوم و نهم آن، یک واحد اضافه کنیم، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی می‌شوند. قدر نسبت این دنباله هندسی کدام است؟

- (1)  $\frac{5}{3}$   
 (2) 2  
 (3) 3  
 (4) 4

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی دهم

اگر  $\cot x + \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $\cot x - \frac{1}{\sin x}$  کدام است؟

- (1)  $1/5$   
 (2)  $-1/5$   
 (3)  $-3$   
 (4) 3

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

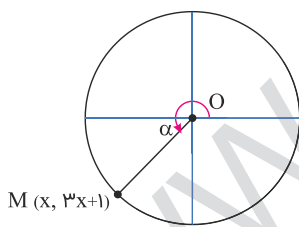
در خانواده‌ای با 6 فرزند، احتمال آنکه تعداد پسرها حداقل 2 تا از تعداد دخترها بیشتر باشد، چقدر است؟

- (1)  $\frac{11}{32}$   
 (2)  $\frac{3}{8}$   
 (3)  $\frac{13}{32}$   
 (4)  $\frac{7}{16}$

تالیفی آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

مطابق شکل، نقطه M بر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. اگر زاویه بین خط OM با جهت مثبت محور افقی باشد، حاصل  $\tan \alpha$  کدام است؟

- (1)  $\frac{4}{3}$   
 (2)  $-\frac{4}{3}$   
 (3)  $-\frac{3}{4}$   
 (4)  $\frac{3}{4}$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $A = 3\sqrt[3]{40} + 4\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{135}$  حاصل  $(\frac{\sqrt[3]{4}}{2A})^{-3}$  برابر کدام است؟

- (۱) ۶۴  
(۲) ۹۰  
(۳) ۱۳۵  
(۴) ۲۷۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر پیشامدهای D و E به صورت زیر تعریف شده باشند، پیشامد D - E کدام است؟

D: B رخ دهد و C رخ ندهد.

E: فقط B رخ دهد.

- (۱) C رخ ندهد.  
(۲) A رخ دهد ولی C و B رخ ندهند.  
(۳) B رخ دهد ولی C و A رخ ندهند.  
(۴) A و B رخ دهند ولی C رخ ندهد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در یک دنباله هندسی، مجموع جملات پنجم و سوم ۶۸ و جمله هفتم، ۸۵ واحد از جمله سوم بیشتر است. قدر نسبت این دنباله هندسی، کدام است؟

- (۱)  $\pm\sqrt{2}$   
(۲)  $\pm\sqrt{3}$   
(۳)  $\pm\frac{3}{2}$   
(۴)  $\pm 2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دوازدهم

اگر  $(A' \cup B)'$  نامتناهی باشد، آنگاه کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

- (۱)  $A'$   
(۲)  $B - A$   
(۳)  $B' - A$   
(۴)  $(A \cap B)'$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۸ با حروف کلمه "shervin" چند کلمه چهارحرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که با حرف صدادار شروع و به حرف n ختم شوند؟

- (۱) ۲۴  
(۲) ۳۶  
(۳) ۴۰  
(۴) ۴۸

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دوازدهم

۱۹ دنباله حسابی  $a_n$ ،  $40$  جمله دارد و جمله چهارم این دنباله  $12$  واحد از جمله هشتم آن بیشتر است. اگر جملات با ردیف زوج این دنباله را حذف کنیم و جمله یازدهم دنباله جدید برابر با  $10$  باشد، جمله یازدهم دنباله  $a_n$  کدام است؟

- (۱) ۳۷  
(۲) ۳۹  
(۳) ۴۰  
(۴) ۴۳

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم انسانی دوازدهم  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۲۰ نمودار تابع درجه دوم  $f(x) = x^2 - 4ax + 3a^2$  را به اندازه  $k$  واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. حداکثر مقدار  $k$  کدام باشد تا نمودار از ربع سوم عبور نکند؟ ( $a, k > 0$ )

- (۱)  $\frac{a}{2}$   
(۲)  $\frac{3}{4}a$   
(۳)  $a$   
(۴)  $\frac{5}{4}a$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۲۱ چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

- الف) دومین مرحله از مراحل علم آمار، تحلیل و تفسیر داده‌هاست.  
ب) علم آمار، همان جمع‌آوری اعداد، ارقام و اطلاعات است.  
پ) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجه استفاده از علم آمار است.  
ت) اعضای جامعه، همان اعضای نمونه‌اند.  
ث) اندازه نمونه، حتماً کمتر از اندازه جامعه است.

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز، حاصل ضرب ارقام بر ۳ بخش پذیر نیست؟

(۲) ۷۲۰

(۱) ۳۶۰

(۴) ۱۲۹۶

(۳) ۸۹۴

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دوازدهم

اگر  $3^\alpha = \sqrt{6}$  و  $6^\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$  باشد، حاصل  $\alpha\beta$  کدام است؟

(۲)  $-\frac{4}{3}$

(۱)  $\frac{4}{3}$

(۴)  $-\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

مجموعه جواب نامعادله  $\frac{1}{x - |x|} > x + |x|$  شامل چند عدد صحیح است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) بی‌شمار

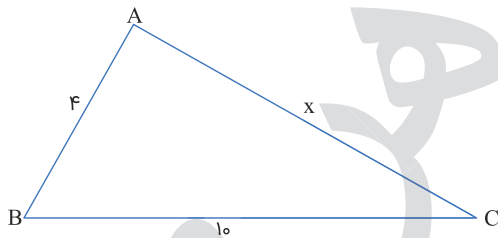
(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر مساحت مثلث زیر  $8\sqrt{5}$  واحد مربع باشد،  $\cot \hat{B}$  کدام است؟ (BC بزرگ‌ترین ضلع است)



(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $-\frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۴)  $-2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

حاصل ضرب نوزده جمله اول دنباله  $a_n = \frac{2n}{2n+2}(-1)^n$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{20}$   
 (۲)  $-\frac{1}{20}$   
 (۳)  $\frac{1}{40}$   
 (۴)  $-\frac{1}{40}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم انسانی دوازدهم

دو ظرف موجود است. در ظرف اول، ۵ مهره زرد و ۳ مهره سفید و در ظرف دوم، ۴ مهره زرد و ۲ مهره سفید موجود است. از هر ظرف ۲ مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه هر چهار مهره خارج شده، از یک رنگ نباشند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{7}$   
 (۲)  $\frac{5}{15}$   
 (۳)  $\frac{6}{7}$   
 (۴)  $\frac{5}{85}$

تالیفی آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

اعداد طبیعی را به صورت زیر به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته مکعب کامل باشد. اختلاف جمله اول و آخر دسته دهم چقدر است؟

... , (۲۷, ..., ۱۰, ۹), (۸, ۷, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲), (۱)

- (۱) ۲۱۶  
 (۲) ۲۱۷  
 (۳) ۲۷۰  
 (۴) ۲۷۱

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $\sin x - \tan x > 0$  و  $\cos x + 2 \cot x < 0$  باشد،  $x$  در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) فقط ناحیه دوم  
 (۲) فقط ناحیه چهارم  
 (۳) ناحیه دوم یا چهارم  
 (۴) هیچ کدام از نواحی

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

۳۰

در چند عدد پنج رقمی با ارقام ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ دقیقاً سه رقم زوج به کار رفته است؟

۷۲۸ (۲)

۵۴۰ (۱)

۱۰۸۰ (۴)

۸۶۴ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

۳۱

اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه  $(Q \cup (Q' \cap (W \cup (Z \cap (Q - N))))$  کدام است؟

 $\mathbb{Z}$  (۲) $\mathbb{R}$  (۱) $Q'$  (۴) $Q$  (۳)

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۳۲

با حروف کلمه  $\text{dimabest}$  چند کلمه ۴ حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت، به طوری که شامل حداقل دو حرف صدادار باشد؟  
(حروف صدادار: a, e, i)

۷۲۰ (۲)

۵۶۰ (۱)

۱۵۶۰ (۴)

۸۴۰ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۳۳

با جایگشت حروف کلمه "SYSTEMS" چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت به طوری که هیچ دو حرف S کنار هم نباشند؟

۱۲۰ (۲)

۶۰ (۱)

۲۸۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۳۴

مجموعه جواب نامعادله  $\frac{(x-2)^3 |3x+9|(x^2-x+5)}{(x^2-1)(x^2-5x+4)} \geq 0$ ، شامل چند عدد صحیح در بازه  $[-5, 5]$  است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

کیسه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سفید است. به چند طریق می‌توان ۳ مهره با رنگ متفاوت از این کیسه انتخاب کرد؟

- (۱) ۶۴  
(۲) ۶۸  
(۳) ۷۰  
(۴) ۷۲

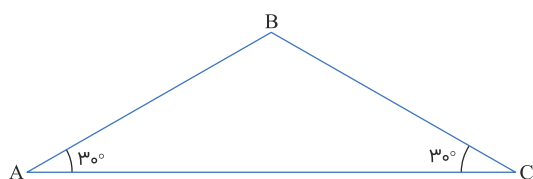
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

متغیر تصادفی "اندازه یا سایز کاغذ" اگر بر مبنای اندازه طول و عرض آن باشد، یک متغیر ..... است و اگر بر مبنای استانداردهای  $A^3$ ،  $A^4$  و ... باشد، یک متغیر ..... است.  
در جاهای خالی به ترتیب چه کلماتی قرار می‌گیرند؟

- (۱) کمی پیوسته - کمی گسسته  
(۲) کمی گسسته - کیفی اسمی  
(۳) کمی گسسته - کمی پیوسته  
(۴) کمی پیوسته - کیفی ترتیبی

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر محیط مثلث زیر  $6 + 4\sqrt{3}$  باشد، مساحت آن کدام است؟



- (۱)  $3\sqrt{3}$   
(۲)  $6\sqrt{3}$   
(۳) ۳  
(۴) ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $x - \frac{2}{x} = 2\sqrt{7}$  باشد، حاصل  $\left| x^3 + \frac{8}{x^3} \right|$  کدام است؟

- (۱) ۱۵۰  
(۲) ۱۶۰  
(۳) ۱۷۰  
(۴) ۱۸۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۳۹ قدر مطلق اختلاف مکعبات دو عدد طبیعی متوالی، ۲۷۲ واحد بیشتر از مجموع مربعات آنهاست، مجموع این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۳۳  
(۲) ۳۱  
(۳) ۳۵  
(۴) ۳۷

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۴۰ تساوی  $\frac{1 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = a \tan x + b \cot x$  به ازای همه مقادیر  $x$  به غیر از  $\frac{k\pi}{2}$  برقرار است.  $ab$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲) ۳  
(۳)  $\frac{1}{2}$   
(۴) ۲

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۴۱ در یک الگوی خطی، مجموع ۵ جمله اول الگو، ۷۵ و مجموع ۷ جمله بعدی الگو، ۲۷۳ است. جمله چندم این الگو برابر با ۲۰۳ است؟

- (۱) چهل و هفتم  
(۲) چهل و هشتم  
(۳) چهل و نهم  
(۴) پنجاهم

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۴۲ ۶ نفر در کنار هم می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. چقدر احتمال دارد بین علی و شروین حداقل یک نفر در عکس باشد؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$   
(۲)  $\frac{3}{4}$   
(۳)  $\frac{4}{5}$   
(۴)  $\frac{5}{6}$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۴۳ در چند زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه اعداد  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  حداقل سه عدد فرد ظاهر شده است؟

- (۱) ۴۲  
(۲) ۸۴  
(۳) ۱۲۶  
(۴) ۱۴۰

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

هریک از رشته‌های پزشکی، دندان پزشکی و داروسازی یک دانشگاه، ۳ استاد مرد و ۳ استاد زن دارند. به چند طریق می‌توان از بین این اساتید، کمیته‌ای چهار نفره شامل دو مرد و دو زن تشکیل داد که اساتید مرد باهم و اساتید زن نیز باهم، هم‌رشته نباشند؟

(۲) ۲۴۰

(۱) ۵۴

(۴) ۱۲۹۶

(۳) ۷۲۹

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه تفاضل اعداد روشده، عددی اول باشد، کدام است؟

(۲)  $\frac{13}{36}$

(۱)  $\frac{5}{36}$

(۴)  $\frac{13}{18}$

(۳)  $\frac{4}{9}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اگر خط  $0 = 12y + 5x - 1$  با جهت مثبت محور طول‌ها، زاویه  $\theta$  بسازد، حاصل  $\sin \theta - \cos \theta$  کدام است؟

(۲)  $-\frac{7}{13}$

(۱)  $\frac{7}{13}$

(۴)  $-\frac{17}{13}$

(۳)  $\frac{17}{13}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

حاصل ضرب جملات ششم و هشتم از یک دنباله هندسی غیرثابت برابر با جمله‌ی چهاردهم این دنباله است. نسبت مربع جمله سوم این دنباله به جمله پنجم آن کدام است؟ (قدر نسبت =  $q$ )

(۲)  $q^2$

(۱)  $q$

(۴)  $2q^2$

(۳)  $2q$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اگر  $\alpha = \sqrt[3]{6 + \sqrt{11}}$  و  $\beta = \sqrt[3]{6 - \sqrt{11}}$  مقدار عبارت  $A = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$  کدام است؟

(۲)  $-\sqrt{2}$

(۱)  $\sqrt{2}$

(۴)  $-\sqrt{22}$

(۳)  $\sqrt{22}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^5 - \sqrt{2}x^4 + 2x^3}{x^3 - 8} < 0$  کدام است؟

- (۱)  $x < 2$   
 (۲)  $0 < x < 2$   
 (۳)  $-1 < x < 2$   
 (۴)  $-2 < x < 1$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

حاصل ضرب ۹۱ جمله اول یک دنباله هندسی برابر  $3^{27}3$  است. حاصل ضرب جملات اول و آخر این دنباله کدام است؟

- (۱) ۸۱  
 (۲) ۲۴۳  
 (۳) ۵۶۴  
 (۴) ۷۲۹

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی دهم

اگر جدول تعیین علامت عبارت  $ax + b$  به صورت زیر باشد، جدول تعیین علامت عبارت  $p(x) = bx^2 + ax - 3a$  به کدام صورت است؟

x	-۲
ax + b	+    0    -

(۱)		-۱	۱/۵
p(x)	-	0	+
(۲)		-۱/۵	۱
p(x)	-	0	+
(۳)		-۱	۱/۵
p(x)	+	0	-
(۴)		-۱/۵	۱
p(x)	+	0	-

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی دهم

- (۱) سن دانش‌آموزان، رنگ ماشین‌ها، تعداد ساختمان‌های اداری تهران، غذای مورد علاقه خانم‌ها
- (۲) تعداد دانه‌های تسبیح، مدل خودروهای خیابان، طول عمر انسان، شدت آلودگی هوا
- (۳) انواع وضعیت آب و هوایی، شدت بارندگی، نوع بارندگی، میزان بارندگی
- (۴) تعداد شهرهای یک کشور، میزان دمای هوا، جنسیت افراد، نوع آلاینده‌های هوا

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $A = \{x - 1 \mid 3x + 1 \in B\}$  و  $B = [-1, 3]$ ، آنگاه  $B \cap A'$  کدام است؟

- (۱)  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$
- (۲)  $[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$
- (۳)  $[-1, -\frac{1}{3}]$
- (۴)  $[-\frac{1}{3}, 3]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

در دنباله حسابی  $a_n$ ، جمله  $a_{14}$  برابر صفر است. جمله  $a_5$  چند برابر جمله  $a_{11}$  است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

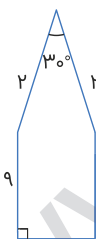
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم انسانی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

زمینی به شکل زیر از یک مستطیل و یک مثلث تشکیل شده است. مساحت این زمین تقریباً کدام است؟ ( $\sin 75^\circ \simeq 0.9$ )



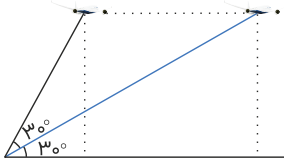
- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۹
- (۴) ۲۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

هواپیمایی با سرعت ثابت  $\sqrt{3}$  کیلومتر بر دقیقه در ارتفاع ۵ کیلومتری از زمین پرواز می‌کند. دو موقعیت زیر از هواپیما بر روی صفحه GPS به فاصله چند دقیقه از هم ثبت شده‌اند؟



$$(1) \frac{5}{3}$$

$$(2) \frac{10}{3}$$

$$(3) 5$$

$$(4) 10$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اگر  $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 2\sqrt{3}$ ، حاصل  $\frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2}$  کدام است؟ (a و b هم‌علامت‌اند)

$$(2) 8$$

$$(4) 16$$

$$(1) 4\sqrt{3}$$

$$(3) 8\sqrt{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در یک دنباله هندسی مجموع چهار جمله اول برابر با ۱۰ و جمله پنجم از جمله اول ۱۰ واحد بیشتر است. قدر نسبت چقدر است؟

$$(2) 2$$

$$(4) \frac{3}{2}$$

$$(1) 1$$

$$(3) \frac{1}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هرکدام می‌توانند از حروف نقطه‌دار فارسی یا صدا دار انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، چند رمز مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟ (حرف "ی" را بدون نقطه در نظر بگیرید.)

$$(2) 1445$$

$$(4) 1870$$

$$(1) 1360$$

$$(3) 1700$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دوازدهم

۶۰

در یک مدرسه ۹۰ نفری، ۴۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۳۱ نفر عضو تیم والیبال و ۲۰ نفر عضو هیچ تیمی نیستند. اگر ۶ نفر از تیم فوتبال و ۴ نفر از تیم والیبال را حذف کنیم، از تعداد افرادی که در هر دو رشته فعالیت می‌کنند، ۳ نفر کم می‌شود. تعداد اعضای که فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند، پس از اعمال این تغییرات کدام است؟

۶۳ (۲)

۶۴ (۱)

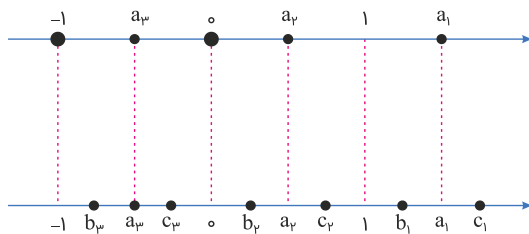
۵۳ (۴)

۶۰ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

۶۱

در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا به عددی روی محور پایین که متناظر با ریشه پنجم آن عدد است، وصل شده‌اند.  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  به ترتیب به کدام یک از اعداد روی محور پایین وصل می‌شوند؟

 $b_3$  و  $b_2$ ،  $b_1$  (۱) $c_3$  و  $c_2$ ،  $c_1$  (۲) $c_3$  و  $c_2$ ،  $b_1$  (۳) $b_3$  و  $c_2$ ،  $b_1$  (۴)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۶۲

در سهمی  $f(x) = x^2 + bx + 2c$ ، اگر دامنه و برد تابع به ترتیب  $\mathbb{R} - \{1\}$  و  $(c, +\infty)$  باشند، حاصل  $b + c$  کدام است؟

-۱ (۲)

۱ (۱)

-۳ (۴)

۳ (۳)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۶۳

فاصله رأس سهمی  $y = kx^2 - 4kx + 6$  از محورهای مختصات یکسان است. مجموع مقادیر  $k$  کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زبرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۶۴

سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی مفروض‌اند. از جمله اول، یک واحد، از جمله دوم، دو واحد و از جمله سوم، سه واحد کم می‌کنیم. اعداد جدید تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت (اختلاف مشترک) این دنباله حسابی کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴) ۳

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم انسانی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۶۵

از ۶۰ نفر دانش‌آموز یک مدرسه ۲۰ نفر به والیبال و ۳۰ نفر به فوتبال علاقه دارند. اگر ۲۲ نفر به هیچ‌کدام از این دو ورزش علاقه‌مند نباشند، چند نفر فقط به فوتبال علاقه دارند؟

- (۱) ۸  
(۲) ۱۸  
(۳) ۱۲  
(۴) ۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۶۶

رابطه  $f = \left\{ \left( \frac{|m|}{m}, m^2 - 2 \right), (1, -2), (-1, 7) \right\}$  به ازای چند مقدار از  $m$  یک تابع را مشخص می‌کند؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دهم

۶۷

مجموع ۴ جمله متوالی یک دنباله حسابی برابر ۲۰ و مجموع مربعات آن‌ها ۱۴۵ است. قدر نسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$   
(۲)  $\frac{5}{2}$   
(۳) ۳  
(۴) -۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

۶۸

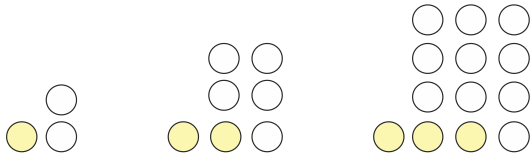
از بین ۴ برزیلی، ۵ آلمانی و ۳ ایتالیایی، به چند طریق می‌توانیم یک گروه ۵ نفره انتخاب کنیم، به طوری که حداکثر ۲ آلمانی باشد؟

- (۱) ۴۴۶  
(۲) ۴۹۶  
(۳) ۵۴۶  
(۴) ۵۹۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم



$$\begin{array}{r} 11 \quad (1) \\ \frac{122}{11} \quad (2) \\ \frac{110}{11} \quad (3) \\ \frac{119}{11} \quad (4) \end{array}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دوازدهم

عبارت  $2 - x + x^2 + 2x^4 - x^5 + x^6$  را به حاصل ضرب سه عامل تجزیه کرده‌ایم. اگر یکی از این عوامل  $x^4 + 1$  باشد، مجموع دو عامل دیگر به کدام صورت خواهد بود؟

$$\begin{array}{ll} (1) & 2x - 1 \\ (2) & 2x + 1 \\ (3) & 2x + 3 \\ (4) & 2x - 3 \end{array}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

ارتفاع هر یک از دوزنقه‌هایی که از رسم قطر بزرگ در یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع  $\sqrt{3}$  به وجود می‌آیند، کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{3}{2} \\ (2) & 2\sqrt{3} \\ (3) & 3\sqrt{3} \\ (4) & 6 \end{array}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

۶ فوتبالیست و ۳ والیبالیست می‌خواهند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند و عکس بگیرند. در چند حالت، والیبالیست‌ها کنار هم نیستند؟

$$\begin{array}{ll} (1) & 30 \times 7! \\ (2) & 30 \times 6! \\ (3) & 180 \times 7! \\ (4) & 180 \times 6! \end{array}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در چند جایگشت از حروف کلمه ABSTRACT دو حرف A کنار هم نیستند؟

$$۲ \times ۷! \quad (۲)$$

$$۳ \times ۶! \quad (۱)$$

$$\frac{۱}{۲} \times ۷! \quad (۴)$$

$$\frac{۳}{۲} \times ۷! \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۴ رقمی بزرگتر از ۲۳۰۰ می‌توان نوشت؟

$$۷۵۶ \quad (۲)$$

$$۶۴۸ \quad (۱)$$

$$۷۵۰ \quad (۴)$$

$$۷۵۵ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، مجموعه جواب نامعادله  $|x^3 - 7| \geq 4m^2 + 5m - 6$ ، شامل تمام اعداد حقیقی است؟

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$\text{بی‌شمار} \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر جملات سوم، چهارم و ششم یک دنباله هندسی غیرثابت با جملات مثبت، سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{۲} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{۲} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{۲} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{7} - 1}{۲} \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

تابع درجه دوم  $f(x) = 3x^2 - bx + b$ ، با محورهای مختصات فقط در نقاط A و B برخورد دارد. مساحت مثلث OAB کدام است؟ (O مبدأ مختصات است)

$$۱۲ \quad (۲)$$

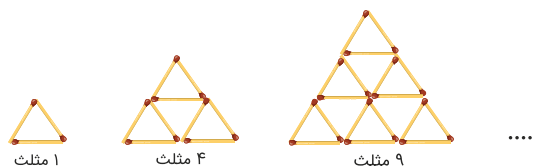
$$۶ \quad (۱)$$

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۶ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

باتوجه به الگوی زیر، با داشتن ۶۳۰ عدد چوب کبریت، چند مثلث می‌توان ساخت؟



(۱) ۲۱۰

(۲) ۴۰۰

(۳) ۴۲۰

(۴) ۴۴۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اگر  $n(A - B) = ۱$ ،  $n(B - A) = ۲$  و  $n(A \cap B) = ۳$ ، آنگاه مجموعه  $A \cup B$  چند عضو دارد؟

(۲) ۵

(۱) ۳

(۴) ۸

(۳) ۶

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

به کمک یک طناب به طول  $L$ ، زمینی مستطیل شکل را به سه قسمت مربع شکل تقسیم می‌کنیم. اگر عدد مساحت شکل از عدد محیط آن، ۴ واحد کمتر باشد،  $L$  کدام می‌تواند باشد؟

(۱)  $\frac{۱۶}{۳}$ 

(۲) ۶

(۳)  $\frac{۲۰}{۳}$ (۴)  $\frac{۲۲}{۳}$ 

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دهم

به ازای چند مقدار طبیعی و یک رقمی  $a$ ، رابطه  $\frac{۲x^۲ + ۲x + ۳}{x^۲ + x + ۱} \leq a$  برای همه مقادیر حقیقی  $x$  برقرار است؟

(۲) ۶

(۱) ۷

(۴) ۴

(۳) ۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۸۲ اگر  $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$  باشد، حاصل  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{3}$   
(۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $6\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۸۳ مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^3 + 8}{9 - x^2} > 0$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳  
(۳) ۴ (۴) بی‌شمار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

۸۴ از میان ۴ معلم ریاضی، ۳ معلم فیزیک و ۲ معلم شیمی، به چند طریق می‌توان یک گروه علمی ۴ نفره تشکیل داد، به طوری که حداقل ۲ نفر از این گروه معلم ریاضی باشند؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۸۱  
(۳) ۹۰ (۴) ۱۲۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

۸۵ سه دانش‌آموز و دو معلم می‌خواهند در ردیفی کنار هم بنشینند. اگر بخواهیم هر دانش‌آموز با معلمی مجاور باشد، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲  
(۳) ۲۴ (۴) ۳۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۸۶ مجموعه جواب نامعادله  $(3x^2 - x)^2 < 4$  به صورت بازه  $(a, b)$  است. حداکثر مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{4}{3}$   
(۳)  $\frac{5}{3}$  (۴) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه  $\mathbb{Z} \cup (\mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q}' \cap (\mathbb{N} \cap \mathbb{R})))$  کدام است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$   
 (۲)  $\mathbb{Q}$   
 (۳)  $\mathbb{Z}$   
 (۴)  $\mathbb{Q}'$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی دهم

نمودار تابع  $y = (m + 2)x^2 + 2mx + m$  همواره بالای خط  $y = x + 1$  قرار می‌گیرد. مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-1 < m < \frac{9}{8}$   
 (۲)  $-2 < m < \frac{9}{8}$   
 (۳)  $m < -2$   
 (۴)  $m > \frac{9}{8}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

رابطه بین دما برحسب درجه سانتی‌گراد ( $C$ ) و دما برحسب درجه فارنهایت ( $F$ ) از تابع خطی  $F = \frac{9}{5}C + 32$  به دست می‌آید. دمای یک جسم چند درجه سانتی‌گراد افزایش یابد تا دمای آن برحسب فارنهایت، ۸۱ درجه زیاد شود؟

- (۱)  $\frac{9}{5}$   
 (۲)  $\frac{729}{5}$   
 (۳) ۳۲  
 (۴) ۴۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر متمم مجموعه‌های  $A$  و  $B$  نامتناهی باشند، آنگاه:

- (۱)  $A \cap B$  نامتناهی است.  
 (۲)  $A' \cap B'$  متناهی است.  
 (۳)  $A - B$  متناهی است.  
 (۴) تمامی گزینه‌ها می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی دهم

۹۱ نمودار تابع  $y = (m + 2)x^2 + 2mx + m$  همواره بالای خط  $y = x + 1$  قرار می‌گیرد. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای  $m$  کدام است؟

$$\begin{aligned} (۲) \quad -۲ < m < \frac{۹}{۸} \\ (۴) \quad m > \frac{۹}{۸} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۱) \quad -۱ < m < \frac{۹}{۸} \\ (۳) \quad m < -۲ \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۹۲ در الگوی خطی با جمله عمومی  $a_n = (n + 1)^2 + k(n - 2)^2$  جمله چندم الگو، برابر با ۱۶۵ است؟

(۲) بیست و نهم

(۱) بیست و هشتم

(۴) سی و یکم

(۳) سی‌ام

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

۹۳ دو دنباله  $a_n = 3n - 1$  و  $b_n = 5n - 6$  چند جمله سه رقمی مشترک دارند؟

(۲) ۵۹

(۱) ۵۸

(۴) ۶۱

(۳) ۶۰

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۹۴ جملات دوم، پنجم و چهاردهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی و نخستین از یک دنباله هندسی هستند. اگر جمله دهم این دنباله حسابی برابر با ۱۹ باشد، جمله پنجم دنباله هندسی کدام است؟

(۲) ۶۳

(۱) ۲۷

(۴) ۲۴۳

(۳) ۱۸۹

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۹۵ اگر  $A = \sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{3}$  باشد، آنگاه حاصل  $A^2$  کدام است؟

(۲) ۴

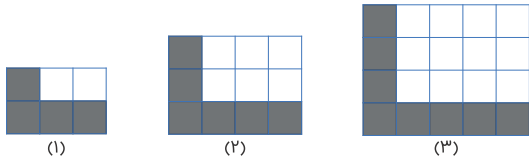
(۱) ۳

(۴) ۱۲

(۳) ۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

باتوجه به الگوی زیر، در مرحله‌ای که تعداد خانه‌های سفید ۳۸۰ تا می‌باشد، تعداد خانه‌های سیاه چندتا است؟



- (۱) ۳۶
- (۲) ۳۸
- (۳) ۴۰
- (۴) ۴۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

جمله ششم دنباله  $a_{n+1} = 2a_n$  و  $a_1 = 3$  با جمله چندم دنباله  $b_{n+1} = b_n + 7$  و  $b_1 = -2$  برابر است؟

- (۱) دوازدهم
- (۲) سیزدهم
- (۳) چهاردهم
- (۴) پانزدهم

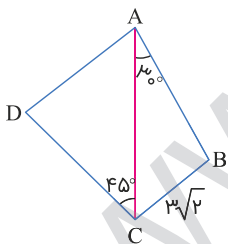
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اگر تابع  $y = x^2 + x$  را  $a$  واحد به راست و  $b$  واحد به پایین ببریم به تابع  $y = x^2 - 4x$  می‌رسیم. مقدار  $a + 2b$  کدام است؟

- (۱) ۸
- (۲) ۹
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در چهار ضلعی  $ABCD$ ، زوایای  $B$  و  $D$  مکمل یکدیگرند. اندازهٔ ضلع  $AD$  کدام است؟



- (۱)  $3\sqrt{3}$
- (۲)  $2\sqrt{3}$
- (۳) ۴
- (۴) ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

۱۰۰ کمترین مقدار تابع  $y = mx^2 - \lambda x + m + \lambda$  با عدد میانگین ریشه‌ها برابر است. محور تقارن این تابع، نمودار تابع  $y = 3x^2 + 2x - 1$  را با چه عرضی قطع می‌کند؟

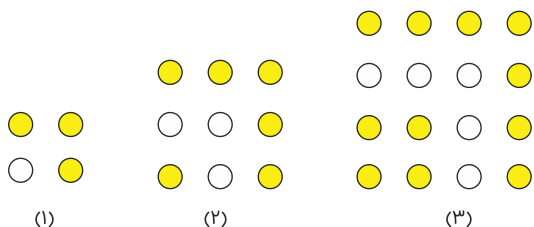
- (۱) ۱۵  
(۲) ۱۳  
(۳) -۱۳  
(۴) -۱۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

۱۰۱ در الگوی زیر، در شکل هجدهم، تعداد دایره‌های توپُر کدام است؟



- (۱) ۳۲۲  
(۲) ۳۲۴  
(۳) ۳۲۶  
(۴) ۳۲۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۲ حاصل عبارت  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}}{2 - \sqrt{6} - \sqrt{21} + \sqrt{14}}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$   
(۲)  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$   
(۳)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$   
(۴)  $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۳ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = (ax + 6)(x + b) - 3x^2$  یک تابع ثابت است. مقدار  $a + b$  کدام گزینه است؟

- (۱) ۲  
(۲) -۲  
(۳) ۳  
(۴) ۱

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم انسانی یازدهم

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۴ هواپیمایی در ارتفاع ثابت ۳ کیلومتری از سطح زمین پرواز می‌کند. در لحظه‌ای که بین دو جزیره قرار می‌گیرد، این دو جزیره را نسبت به سطح افقی با زوایای  $45^\circ$  و  $30^\circ$  رؤیت می‌کند. فاصله بین دو جزیره تقریباً کدام است؟ ( $\sqrt{3} \simeq 1/7$ )

- (۱)  $4/8$  (۲) ۶  
(۳)  $8/1$  (۴)  $10/2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۵ با حروف کلمه online، چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

- (۱) ۱۶۲ (۲) ۱۷۲  
(۳) ۱۸۲ (۴) ۱۹۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۶ مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  چند زیرمجموعه دارد که دقیقاً ۲ تا از عضوهای ۱، ۲ و ۳ در آن باشند؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴  
(۳) ۳۲ (۴) ۴۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۷ اگر  $1 = (\sin^6 x - \sin^2 x)(\tan x + \cot x)$ ، حاصل  $|\sin x - \cos x|$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\sqrt{2}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۸ در پرتاب دو تاس، احتمال اینکه مجموع دو تاس، ۷ یا عدد تاس اول، بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{17}{36}$  (۲)  $\frac{4}{9}$   
(۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{19}{36}$

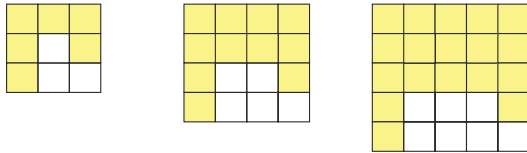
تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که اگر ۲ واحد از آن‌ها کم کنیم، حاصل مضرب ۳ باشد؟

- (۱) ۲۹۹  
(۲) ۳۰۰  
(۳) ۳۰۱  
(۴) ۳۰۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در الگوی زیر، در شکل چندم تفاضل مربع‌های رنگی و سفید برابر با ۱۲۳ است؟



- (۱) دهم  
(۲) یازدهم  
(۳) دوازدهم  
(۴) سیزدهم

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

حاصل  $\frac{1}{\cos^4 x} + \tan^2 x + \tan^4 x$  کدام است؟

- (۱)  $\tan^2 x$   
(۲)  $\cot^2 x$   
(۳)  $-\tan^2 x$   
(۴)  $-\cot^2 x$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a-3} = \frac{3}{4}$ ، حاصل  $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2-3a} + \sqrt[3]{a^2-6a+9}$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۴  
(۳)  $\frac{2}{3}$   
(۴)  $\frac{4}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

سه‌می  $f(x) = (x-1)^2 + 3$ ، بالای خط  $y = k(x-2)$  قرار دارد. محدوده  $k$  کدام است؟

- (۱)  $-2 < k < 6$   
(۲)  $-6 < k < 2$   
(۳)  $2 < k < 8$   
(۴)  $-8 < k < -2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۱۴  $a_n$  دنباله‌ای هندسی است و می‌دانیم  $18 = 3(a_2 + a_3) = a_4 + a_3$  می‌باشد.  $a_1$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲)  $0/25$   
(۳)  $0/5$   
(۴)  $0/75$

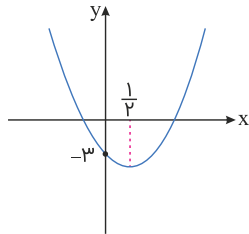
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دوازدهم

۱۱۵ شکل زیر، نمودار سهمی  $y = (2a - 1)x^2 + (b - 1)x + (c - 2)$  است. حاصل  $1 + \frac{a}{4} + \frac{b}{8} - \frac{3c}{4}$  کدام است؟



- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) صفر  
(۴) -۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۱۶ ..... بارندگی، ..... بارندگی و ..... بارندگی به ترتیب، متغیرهای کمی پیوسته، کیفی ترتیبی و کیفی اسمی هستند. در جاهای خالی به ترتیب چه کلماتی می‌توانند قرار بگیرند؟

- (۱) شدت، میزان، نوع  
(۲) میزان، نوع، شدت  
(۳) میزان، شدت، نوع  
(۴) شدت، نوع، میزان

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

تستر علوم انسانی دهم

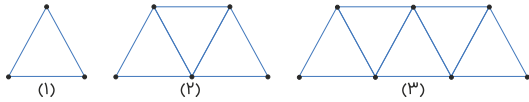
۱۱۷ اگر  $[2a - 1, 5) \cap [a, 6) = [-1, 5)$ ، در بازه  $[-a, a]$  چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم



(۱) ۲۵

(۲) ۳۷

(۳) ۴۹

(۴) ۵۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

۱۱۹ مجموع سه جمله اول یک دنباله هندسی نزولی، ۷ برابر جمله دوم آن است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(۲)  $۲ - \sqrt{۳}$

(۱)  $۳ - ۲\sqrt{۲}$

(۴)  $\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲}$

(۳)  $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم انسانی دوازدهم  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

داخل رادیکال اتحاد مربع است:

$$\sqrt[4]{\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1} = \sqrt[4]{(\tan^2 x + 1)^2} = \sqrt{\tan^2 x + 1}$$

حالا از اتحاد  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{\tan^2 x + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\underbrace{|\cos x|}_{\text{ربع چهارم: } \cos x > 0}} = \frac{1}{\cos x}$$

عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$4 \sin^2 60^\circ - 3 \sin^2 x = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 3 \sin^2 x = 3(1 - \sin^2 x) = 3 \cos^2 x$$

پس:

$$\sqrt[4]{\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1} \times (4 \sin^2 60^\circ - 3 \sin^2 x) = \frac{1}{\cos x} \times 3 \cos^2 x = 3 \cos x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

ابتدا ۲ زوج از ۶ زوج انتخاب می‌کنیم (به  $\binom{6}{2}$  حالت). با انتخاب این ۲ زوج، ۴ نفر از ۷ نفر مشخص می‌شوند و ۳ نفر دیگر کم داریم. اما در بین این ۳ نفر نباید زوج دیگری وجود داشته باشد. به همین جهت ۳ زوج از ۴ زوج باقی‌مانده را انتخاب کرده (به  $\binom{4}{3}$  طریق) و از هر کدام از این ۳ زوج، یک نفر را برمی‌گزینیم. (یا زن یا شوهر) بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{3} \times 2^3 = 480$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x^3 - x) - (2x^2 - 2) \\ &= x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = (x - 2)(x^2 - 1)\end{aligned}$$

$$= (x - 2)(x - 1)(x + 1)$$

$$\begin{aligned}x^3 + x - 10 &= (x^3 - 8) + (x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)\end{aligned}$$

همان‌طور که واضح است عبارت  $x - 2$  در تجزیه دو عبارت به عنوان عامل مشترک حضور دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

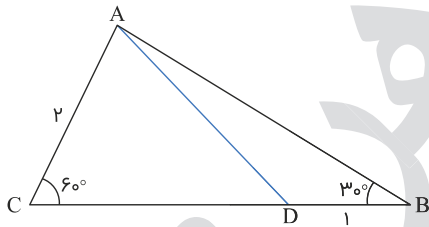
چون مساحت مثلث ABC برابر است با  $2\sqrt{3}$ ، می‌توان طول CD را پیدا کرد:

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (2)(1 + CD) \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow CD = 3$$

در نتیجه مساحت مثلث ACD برابر است با:

$$\frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (2)(3) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$2\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ بنابراین مساحت مثلث ABD برابر است با: } \frac{\sqrt{3}}{2}$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اول ریشه‌های عبارت  $A = \frac{(-x^2 + x - 1)(5 - x^2)}{|x - 2|}$  را تعیین می‌کنیم:

$$A = \frac{(-x^2 + x - 1)(5 - x^2)}{|x - 2|} = \frac{(-x^2 + x - 1)(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)}{|x - 2|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-x^2 + x - 1) = 0, & \Delta < 0: \text{ ریشه ندارد} \\ \sqrt{5} - x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5} \\ \sqrt{5} + x = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5} \\ |x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2 (*) \end{cases}$$

جدول تعیین علامت یک سطر را می‌کشیم و آن را پر می‌کنیم:

	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$2$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
A	+	+	-	-	+

ما دنبال قسمت‌های  $A \leq 0$  هستیم یعنی  $\{2\} - [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ ، اعداد صحیح این محدوده را می‌نویسیم:

$$[-2/2, 2/2] - \{2\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} -2, -1, 0, 1 \quad \text{جواب صحیح ۴}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

واضح است که به ازای  $n \geq 5$  تمامی جملات این دنباله مثبت هستند (صورت و مخرج کسر هر دو مثبت‌اند) و قطعاً کوچک‌ترین جمله دنباله منفی است؛ بنابراین کافی است جملات اول تا چهارم را به دست آوریم و مقایسه کنیم که کدام جمله کوچک‌ترین خواهد بود:

$$t_1 = \frac{1}{4(1) - 17} = \frac{-1}{13}, t_2 = \frac{2}{4(2) - 17} = \frac{-2}{9}$$

$$t_3 = \frac{3}{4(3) - 17} = \frac{-3}{5}, t_4 = \frac{4}{4(4) - 17} = -4$$

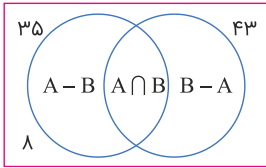
بنابراین کوچک‌ترین جمله این دنباله  $t_4 = -4$  خواهد بود.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم انسانی دوازدهم

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم



$$n(A - B) + n(A \cap B) = 35$$

$$n(B - A) + n(A \cap B) = 43$$

طرفین را باهم جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{n(A - B) + n(B - A)}_{12} + 2n(A \cap B) = 78$$

$$\Rightarrow 2n(A \cap B) = 66 \Rightarrow n(A \cap B) = 33$$

پس تعداد دانش‌آموزان مدرسه برابر است با:

$$n(A \cup B) + 8 = (35 + 43 - 33) + 8 = 53$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

برای اینکه مجموعه  $[n - 3, 2n + 1]$  تعریف شود باید  $n - 3 < 2n + 1$  باشد:

$$n - 3 < 2n + 1 \Rightarrow -4 < n$$

اگر دو مجموعه  $[-1, 1]$  و  $[n - 3, 2n + 1]$  جداازهم باشند ۲ حالت داریم:

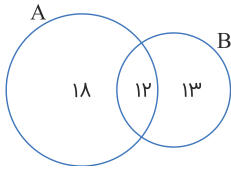
$$1) 2n + 1 < -1 \Rightarrow n < -1$$

$$2) n - 3 > 1 \Rightarrow n > 4$$

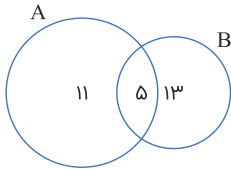
پس شرط اینکه جداازهم نباشند این است که  $-1 \leq n \leq 4$  باشد. اشتراک آن با  $n > -4$  برابر با  $[-1, 4]$  می‌شود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اول شرایط این طوری بوده!



بعد این شکلی شده:



تعداد کل اعضا در حالت جدید برابر است با:  $11 + 5 + 13 = 28$

ولی سؤال تعداد عضوهای مجموعه جدید A را با مجموعه قبلی B می‌خواهد. B که ۲۵ عضو داشت. مجموعه جدید A هم ۱۱ عضو دارد که با B مشترک نیست. در کل  $25 + 11 = 36$  عضو خواهیم داشت.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

جملات اول، سوم و نهم را برحسب جمله چهارم می‌نویسیم. چون  $a_4 = 15$  است، پس داریم:

$$a_1 = a_4 - 3d = 15 - 3d$$

$$a_3 = a_4 - d = 15 - d$$

$$a_9 = a_4 + 5d = 15 + 5d$$

اگر  $x, y$  و  $z$ ، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، رابطه  $y^2 = xz$  بین آن‌ها برقرار است، پس داریم:

$$(a_1 + 1)(a_9 + 1) = (a_3 + 1)^2 \Rightarrow \underbrace{(16 - 3d)}_x \underbrace{(16 + 5d)}_z = \underbrace{(16 - d)}_y^2$$

$$\Rightarrow 256 + 32d - 15d^2 = 256 - 32d + d^2$$

$$\Rightarrow 16d^2 - 64d = 0 \Rightarrow 16d(d - 4) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} d = 4$$

با جایگذاری  $d = 4$ ، سه جمله متوالی دنباله هندسی به صورت زیر درمی‌آیند. داریم:

$$\underbrace{16 - 3d}_4, \underbrace{16 - d}_{12}, \underbrace{16 + 5d}_{36}$$

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{\times 3} 36$$

پس قدر نسبت دنباله هندسی برابر با  $q = 3$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

عبارتی که به عنوان فرض داده شده است و عبارت خواسته شده، مزدوج یکدیگرند، پس حاصل ضرب آن ها را محاسبه می کنیم. اگر  $\cot x - \frac{1}{\sin x}$  را A فرض کنیم، داریم:

$$\left(\cot x + \frac{1}{\sin x}\right)\left(\cot x - \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{2}{3}A \Rightarrow \cot^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2}{3}A$$

باتوجه به فرمول  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$  داریم:

$$\frac{1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}}{\cot^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}} \rightarrow \cot^2 x - (1 + \cot^2 x) = \frac{2}{3}A \Rightarrow -1 = \frac{2}{3}A \Rightarrow A = \frac{-3}{2} = -1/5$$

$$\xrightarrow{A=-1/5} \cot x - \frac{1}{\sin x} = -1/5$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تعداد اعضای فضای نمونه ای در n فرزند،  $2^n$  است، پس:  $n(S) = 2^6 = 64$   
قرار است تعداد پسرها، حداقل ۲ تا از تعداد دخترها بیشتر باشد، پس سه حالت داریم:

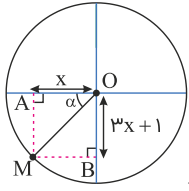
$$\begin{cases} (۱) \text{ دختر } ۲, \text{ پسر } ۴: \frac{6!}{4!2!} = ۱۵ \\ (۲) \text{ دختر } ۱, \text{ پسر } ۵: \frac{6!}{5!1!} = ۶ \Rightarrow \text{مجموع} = n(A) = ۲۲ \\ (۳) \text{ حالت } ۱: \text{ پسر } ۶ \end{cases}$$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

به شکل زیر دقت کنید (حواسمان باشد تانژانت زاویه  $\alpha$  شکل با تانژانت زاویه صورت سؤال برابر است).



طبق رابطه فیثاغورس در مثلث OMB داریم:

$$(MB)^2 + (OB)^2 = (OM)^2 \xrightarrow{OM=R=1} x^2 + (3x+1)^2 = 1$$

$$x^2 + 9x^2 + 6x + 1 = 1 \Rightarrow 10x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(5x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

پس:

$$\begin{cases} \cos \alpha = x = \frac{-3}{5} \\ \sin \alpha = 3x + 1 = 3\left(\frac{-3}{5}\right) + 1 = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{4}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

کلیه اعداد را تا می‌توانیم ساده می‌کنیم:

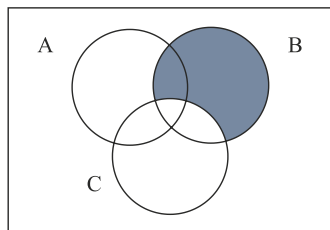
$$A = 3\sqrt[3]{40} + 4\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{135}$$

$$= 6\sqrt[3]{5} + 12\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{5} \Rightarrow A = 3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{135}$$

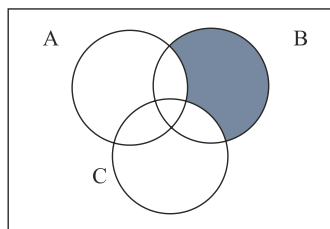
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2A}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2A}}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2 \times 135}}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{270}}\right)^{-3} = (\sqrt[3]{270})^3 = 270$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

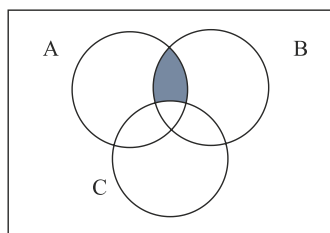
نمودارون را برای پیشامدهای  $D$  و  $E$  رسم می‌کنیم:  
 $D$ :  $B$  رخ دهد و  $C$  رخ ندهد.



$E$ : فقط  $B$  رخ دهد. ( $A$  و  $C$  رخ ندهند)



پس پیشامد  $D - E$  برابر است با:  $A$  و  $B$  رخ دهند ولی  $C$  رخ ندهد.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

مجموع جمله سوم و پنجم، ۶۸ است، داریم:

$$a_1 q^2 + a_1 q^6 = 68 \Rightarrow a_1 q^2 (1 + q^4) = 68$$

جمله هفتم، ۸۵ واحد از جمله سوم بیشتر است، داریم:

$$a_1 q^6 - a_1 q^2 = 85 \Rightarrow a_1 q^2 (q^4 - 1) = 85$$

طرفین دو رابطه بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{a_1 q^2 (q^4 - 1)}{a_1 q^2 (q^4 + 1)} = \frac{85}{68} \Rightarrow \frac{(q^4 - 1)(\cancel{q^2 + 1})}{\cancel{q^2 + 1}} = \frac{85}{68} \Rightarrow q^4 - 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{3}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دوازدهم

طبق قوانین دمورگان، داریم:

$$(A' \cup B)' = A \cap B'$$

وقتی  $A \cap B'$  نامتناهی است، پس باید  $A$  و  $B'$  هر دو نامتناهی باشند.  
در بین گزینه ها، گزینه ۴ را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

چون  $B'$  نامتناهی است، پس اجتماع آن با  $A'$  هم نامتناهی خواهد بود.

گزینه (۱): وقتی  $A$  نامتناهی است، قطعاً متمم آن، یعنی  $A'$  متناهی خواهد بود.

گزینه (۲): تفاضل مجموعه متناهی  $B$  از یک مجموعه نامتناهی، قطعاً متناهی خواهد بود.

گزینه (۳) تفاضل دو مجموعه نامتناهی  $A$  و  $B'$ ، الزاماً نامتناهی نمی‌باشد. به‌عنوان مثال، مجموعه اعداد حسابی و طبیعی را در نظر بگیریم. داریم:

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\} \Rightarrow \text{متناهی است}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

چهار جایگاه زیر را در نظر می‌گیریم. جایگاه اول به ۲ انتخاب (e, i) و جایگاه آخر به ۱ انتخاب (n) پر می‌شوند.

$$\bar{e}, \bar{i} \quad \bar{\quad} \quad \bar{\quad} \quad \bar{n}$$

جایگاه دوم به دلیل حذف حرف n و یکی از دو حرف e و i، ۵ انتخاب خواهد داشت و جایگاه سوم نیز به همین ترتیب ۴ انتخاب دارد. بنابراین تعداد کل این کلمات برابر است با:

$$۲ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۴۰$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دوازدهم

از اختلاف جمله چهارم و هشتم، مقدار قدر نسبت را به دست می‌آوریم:

$$a_4 - a_8 = ۱۲ \Rightarrow (a_1 + 3d) - (a_1 + 7d) = ۱۲ \Rightarrow -4d = ۱۲ \Rightarrow d = -۳$$

با حذف جملات با ردیف زوج، جملات  $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{39}$  باقی می‌مانند. جمله یازدهم این دنباله  $a_{11}$  است. لذا داریم:

$$a_{11} = ۱۰ \Rightarrow a_1 + 10d = ۱۰ \Rightarrow a_1 - ۶۰ = ۱۰ \Rightarrow a_1 = ۷۰$$

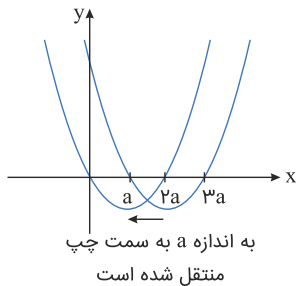
حال مقدار  $a_{11}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{11} = a_1 + 10d = ۷۰ - ۳۰ = ۴۰$$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم انسانی دوازدهم  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$f(x) = x^2 - 4ax + 3a^2 = x^2 - (a + 3a)x + a \times 3a = (x - a)(x - 3a)$$

نمودار سهمی را رسم می‌کنیم که دهانه آن رو به بالاست و صفرهای (ریشه‌های) آن  $x = a$  و  $x = 3a$  است. برای آنکه نمودار از ربع سوم عبور نکند، منحنی تا حدی می‌تواند به چپ منتقل شود که نقطه  $x = a$  روی تابع  $f(x)$  به مبدأ منتقل شود، یعنی:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

مراحل علم آمار عبارت‌اند از:

جمع‌آوری اعداد، ارقام و اطلاعات! سازمان‌دهی و نمایش آن‌ها! تحلیل و تفسیر آن‌ها! نتیجه‌گیری، پیش‌بینی و تصمیم برای آینده به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) همان‌طور که می‌بینید، تحلیل و تفسیر داده‌ها، سومین مرحله از مراحل علم آمار است و این مورد نادرست می‌باشد.

ب) جمع‌آوری اعداد، ارقام و اطلاعات، اولین مرحله از مراحل علم آمار می‌باشد، نه خود علم آمار! علم آمار، علم اعداد، ارقام و اطلاعات است، نه صرفاً جمع‌آوری آن‌ها. پس این مورد هم نادرست است.

پ) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، آخرین مرحله از مراحل علم آمار و لذا نتیجه استفاده از آن است، پس این مورد درست است.

در رابطه با موارد "ت" و "ث"، می‌دانیم نمونه زیرمجموعه‌ای از جامعه است و لذا اعضای نمونه همان اعضای جامعه‌اند ولی اعضای جامعه لزوماً از اعضای نمونه نیستند، ولی اگر سرشماری انجام شود، جامعه همان نمونه خواهد بود و اندازه‌های آن‌ها برابر می‌شود. پس موارد "ت" و "ث" هر دو نادرست‌اند.

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

برای آنکه حاصل ضرب ارقام این اعداد بر ۳ بخش پذیر نباشند؛ لازم است که هیچ یک از ارقام این اعداد مضرب ۳ نباشند؛ یعنی ارقام ۰، ۳، ۶ و ۹ نباید در ساختار ارقام این اعداد دیده شوند. لذا ما به دنبال اعدادی هستیم که با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ ساخته می‌شوند و ارقام متمایزی دارند که تعداد این اعداد برابر است با:

$$\frac{۳}{یکان} \times \frac{۴}{دهگان} \times \frac{۵}{صدگان} \times \frac{۶}{هزارگان} = ۳۶۰$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دوازدهم

برای رسیدن از معادلهٔ مربوط به  $\alpha$  به معادلهٔ مربوط به  $\beta$  دو قدم طی می‌کنیم:  
قدم اول: طرفین معادلهٔ  $\sqrt{6} = 3^\alpha$  را به توان دو می‌رسانیم. داریم:  $3^{2\alpha} = 6$   
قدم دوم: طرفین معادلهٔ اخیر را به توان  $\beta$  می‌رسانیم. داریم:

$$(3^{2\alpha})^\beta = 6^\beta \Rightarrow 3^{2\alpha\beta} = 6^\beta \xrightarrow{\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{81}}} 3^{2\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$$

$$\Rightarrow 3^{2\alpha\beta} = 3^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow 2\alpha\beta = -\frac{4}{3} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $x \geq 0$  باشد، مخرج کسر  $\frac{1}{x - |x|}$  صفر می‌شود، پس  $x < 0$  است.

$$\frac{1}{x - |x|} > x + |x| \xrightarrow{x < 0} \frac{1}{x + x} > x + (-x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

چون باید  $x < 0$  باشد، به تناقض می‌رسیم؛ پس مجموعه جواب نامعادله  $\emptyset$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \times AB \times BC \times \sin \widehat{B} \Rightarrow \lambda\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 \times 10 \times \sin \widehat{B} \Rightarrow \sin \widehat{B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

با داشتن  $\sin \widehat{B}$ ، مقدار  $\cot \widehat{B}$  را حساب می‌کنیم:

$$1 + \cot^2 \widehat{B} = \frac{1}{\sin^2 \widehat{B}} \Rightarrow 1 + \cot^2 \widehat{B} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cot \widehat{B} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

از آنجایی که BC بزرگترین ضلع است، پس زاویه A بزرگترین زاویه است و B نمی‌تواند منفرجه باشد و در نتیجه کتانژانتش حتماً

$$\cot \widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ مثبت است}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$a_n = \frac{2n}{2n+2} (-1)^n$$

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{19} = -\left(\frac{2}{4}\right) \times \frac{4}{6} \times -\left(\frac{6}{8}\right) \times \left(\frac{8}{10}\right) \times \dots \times -\left(\frac{38}{40}\right) = (-1)^{10} \times \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دوازدهم

پیشامد خواسته شده، متمم این پیشامد است که هر چهار مهره خارج شده از یک رنگ باشند. متمم آن را حساب می‌کنیم و جواب را از عدد یک کم می‌کنیم:

$$\frac{\binom{5}{2} \binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{4}{2} \binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{5 \times 4}{8 \times 7} \times \frac{4 \times 3}{6 \times 5} + \frac{3 \times 2}{8 \times 7} \times \frac{2}{6 \times 5} = \frac{1}{7} + \frac{1}{140} = \frac{21}{140} = \frac{3}{20} = 0/15$$

هر چهار مهره زرد      هر چهار مهره سفید

پس جواب نهایی برابر است با:  $1 - 0/15 = 0/85$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

واضح است که اعداد موجود در دسته  $n$ م از  $1 + (n-1)^3$  شروع شده و به  $n^3$  ختم می‌شوند؛ بنابراین دسته دهم این اعداد عبارت است از:

$$10^3, (10-1)^3 + 1, (10-1)^3 + 2, (10-1)^3 + 3, \dots, 10^3$$

پس اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو دسته دهم برابر است با:

$$10^3 - (9^3 + 1) = 1000 - (729 + 1) = 270$$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$\sin x - \tan x > 0 \Rightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{\sin x (\cos x - 1)}^{\text{منفی}}}{\cos x} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \tan x < 0 \Rightarrow x \text{ در ربع } 2 \text{ یا } 4$$

$$\cos x + 2 \cot x < 0 \Rightarrow \cos x + \frac{2 \cos x}{\sin x} < 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{\cos x (\sin x + 2)}^{\text{مثبت}}}{\sin x} < 0$$

$$\Rightarrow \cot x < 0 \Rightarrow x \text{ در ربع } 2 \text{ یا } 4$$

از اشتراک دو شرط بالا می‌فهمیم که  $x$  در ناحیه ۲ یا ۴ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

برای به دست آوردن تعداد اعداد مطلوب، کافی است تعداد کل ۵ رقمی‌ها با شرایط فوق را به دست آورده و آن‌هایی که با صفر آغاز می‌شوند را از آن کم کنیم:

$$\underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{\text{۳ رقم زوج ۲ رقم فرد}}$$

اعداد مورد نظر ما ۳ رقم زوج و ۲ رقم فرد دارند. سه جایگاه از پنج جایگاه را برای ارقام زوج انتخاب می‌کنیم (به  $\binom{5}{3}$  طریق) و دو جایگاه باقی‌مانده به طور یکتا فرد خواهند بود. در سه جایگاه انتخاب‌شده برای ارقام زوج می‌توان هر یک از ارقام صفر، ۲ و ۴ و در دو جایگاه باقی‌مانده می‌توان ارقام ۱ و ۳ را انتخاب کرد. بنابراین تعداد کل پنج‌رقمی‌ها برابر است با:  $\binom{5}{3} \times 3^3 \times 2^2 = 1080$

تعداد پنج‌رقمی‌هایی که با رقم صفر آغاز می‌شوند را می‌شماریم: چپ‌ترین جایگاه به ۱ انتخاب با صفر پر می‌شود.

$$\circ \underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{\text{۲ رقم زوج ۲ رقم فرد}}$$

در چهار جایگاه باقی‌مانده ۲ رقم زوج و ۲ رقم فرد لازم داریم. دو جایگاه از چهار جایگاه را برای ارقام زوج انتخاب می‌کنیم (به  $\binom{4}{2}$  طریق) و دو جایگاه دیگر به صورت یکتا فرد خواهند بود. در دو جایگاه مذکور، می‌توان هر یک از ارقام صفر، ۲ و ۴ و در دو جایگاه دیگر می‌توان ارقام ۱ و ۳ را انتخاب کرد. بنابراین تعداد این پنج‌رقمی‌ها برابر است با:  $\binom{4}{2} \times 3^2 \times 2^2 = 216$ . حال کافی است این دو عدد را از هم کم کنیم:

$$1080 - 216 = 864$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اگر از مجموعه  $\mathbb{Q}$ ، اعداد  $1, 2, 3, \dots$  را حذف کنیم، مجموعه  $\mathbb{Q} - \mathbb{N}$  تشکیل می‌شود. اشتراک این مجموعه با  $\mathbb{Z}$  مجموعه  $\{0, -1, -2, \dots\}$  است. اجتماع مجموعه اخیر با  $\mathbb{W}$  دوباره  $\mathbb{Z}$  را تولید می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$\mathbb{W} \cup (\mathbb{Z} \cap (\mathbb{Q} - \mathbb{N})) = \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Q}' \cap \mathbb{Z} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{Q} \cup \emptyset = \mathbb{Q}$$

دقت کنید که خواسته مسئله متمم مجموعه مذکور یعنی  $\mathbb{Q}'$  است.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

حروف صدادار : a, e, i

حروف بی صدا : s, m, b, t, d

حالت ۱: دقیقاً دو حرف صدادار موجود باشد و دو حرف بی صدا:

$$\binom{3}{2} \times \binom{5}{2} \times 4! = 3 \times 10 \times 24 = 720$$

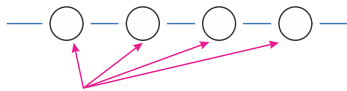
حالت ۲: دقیقاً سه حرف صدادار موجود باشد و یک حرف بی صدا:

$$\binom{3}{3} \times \binom{5}{1} \times 4! = 1 \times 5 \times 24 = 120$$

دقت کنیم امکان اینکه همه حرف‌های این کلمه ۴ حرفی صدادار باشد، وجود ندارد. بنابراین تعداد کلمات ۴ حرفی برابر با  $720 + 120 = 840$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

روش اول: ابتدا حروف  $\{Y, T, E, M\}$  را به  $4!$  حالت جایگشت می‌دهیم. با انجام این کار بین این ۴ حرف و دو طرف آن، ۵ فضای خالی ایجاد می‌شود که از بین آن‌ها ۳ فضای خالی را انتخاب کرده و به یک حالت Sها را می‌چینیم. داریم:



جایگشت  $\{Y, T, E, M\}$

$$\Rightarrow 4! \times \binom{5}{3} \times 1 = 24 \times 10 = 240$$

روش دوم:

$$4! \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 24 \times 10 = 240$$

$\downarrow$   
 جایگشت  
 Sهای تکراری

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

ابتدا با تجزیه عوامل مخرج، عبارت را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\frac{(x-2)^3 |3x+9|(x^2-x+5)}{\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)} \underbrace{(x^2-5x+4)}_{(x-1)(x-4)}} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^3 |3x+9|(x^2-x+5)}{(x-1)^2(x+1)(x-4)} \geq 0$$

عبارت به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

	$-\infty$	$-3$	$-1$	$1$	$2$	$4$	$+\infty$
$(x-2)^3$	-	-	-	-	o	+	+
$ 3x+9 $	+	o	+	+	+	+	+
$x^2-x+5$	+	+	+	+	+	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+	o	+	+	+
$x+1$	-	-	o	+	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	-	o	+
P	-	o	-	+	+	-	+

مجموعه جواب نهایی برابر است با:

$$(-1, 1) \cup (1, 2] \cup (4, +\infty) \cup \{-3\}$$

پس در مجموعه جواب آخر، ۴ عدد صحیح ۵، ۲، ۰، -۳، x متعلق به بازه  $[-5, 5]$  وجود دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

روش اول:

برای انتخاب ۳ مهره با رنگ متفاوت، ۲ حالت داریم:

۵ مهره قرمز  
۴ مهره سفید

حالت اول: ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد:

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$$

حالت دوم: ۲ مهره سفید و ۱ مهره قرمز باشد:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$$

حال باتوجه به اصل جمع، داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = 40 + 30 = 70$$

روش دوم: از روش کل حالت‌ها منهای حالت‌های نامطلوب نیز می‌توان به جواب درست رسید (متمم). داریم:

$$\text{حالت‌های مطلوب} = \binom{9}{3} - \binom{5}{3} + \binom{4}{3}$$

$\downarrow$  مهره ۳ قرمز       $\downarrow$  مهره ۳ سفید

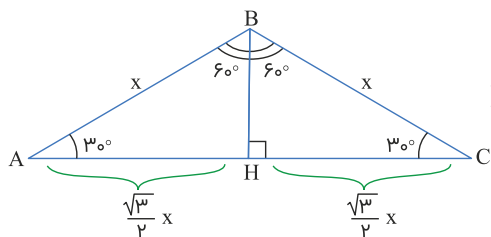
$$= 84 - \overbrace{(10 + 4)}^{14} = 70$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

بدون شرح

چون زوایای A و C باهم برابرند، پس مثلث ABC متساوی الساقین است ( $AB = BC$ ). حال طول دو ساق را برابر x می‌گیریم. به کمک رسم ارتفاع BH، اندازه ضلع AC را بر حسب x حساب می‌کنیم، داریم:



$$\Delta BCH : \cos 30^\circ = \frac{HC}{x} \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{3}}{2}x \xrightarrow{\times 2} AC = 2HC = \sqrt{3}x$$

محیط مثلث ABC،  $6 + 4\sqrt{3}$  است، پس داریم:

$$x + x + x\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})x = 6 + 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

حالا مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \underset{x}{AB} \times \underset{x}{BC} \times \underbrace{\sin \hat{B}}_{\sin 120^\circ} = \frac{1}{2} \times \cancel{2}\sqrt{3} \times \cancel{2}\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 3\sqrt{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

طرفین تساوی اولیه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 = 28 \xrightarrow{+4} x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = 36$$

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = 36 \xrightarrow{\text{جذر}} \left|x + \frac{2}{x}\right| = 6$$

حالا به کمک اتحاد  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  داریم:

$$\left|x^3 + \frac{8}{x^3}\right| = \left|x^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^3\right| = \left|\underbrace{\left(x + \frac{2}{x}\right)^3}_{6^3} - \underbrace{3x\left(\frac{2}{x}\right)}_2 \underbrace{\left(x + \frac{2}{x}\right)}_6\right| = |216 - 36| = 180$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$k \in \mathbb{N}, (k+1)^3 - k^3 = 272 + (k+1)^2 + k^2 \Rightarrow k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 272 + 2k^2 + 2k + 1$$

$$\Rightarrow k^2 + k - 272 = 0 \Rightarrow (k+17)(k-16) = 0$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 16, k+1 = 17 \Rightarrow 16 + 17 = 33$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$\frac{1 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x + 2 \cot x$$

پس:

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow ab = 2$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

نکته: در الگوی خطی یا دنباله حسابی، مجموع تعدادی فرد جمله متوالی، برابر با حاصل ضرب تعداد آن جمله در جمله وسط است.  
پس مجموع ۵ جمله اول می شود  $5a_3$  که برابر با ۷۵ است:

$$5a_3 = 75 \Rightarrow a_3 = 15$$

و مجموع ۷ جمله بعدی (یعنی  $a_6$  تا  $a_{12}$ ) می شود  $7a_9$  که برابر با ۲۷۳ است:

$$7a_9 = 273 \Rightarrow a_9 = 39$$

جمله اول و قدر نسبت را حساب می کنیم:

$$a_9 - a_3 = (8 - 2)d \Rightarrow 39 - 15 = 6d \Rightarrow d = 4$$

در نتیجه:

$$a_3 = 15 \Rightarrow a_1 + \underbrace{2d}_8 = 15 \Rightarrow a_1 = 7$$

جمله  $n$ ام یا همان جمله عمومی را برابر با  $203$  قرار می دهیم، داریم:

$$a_n = 203 \Rightarrow 7 + (n-1) \times 4 = 4n + 3 = 203 \Rightarrow n = 50$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تعداد کل حالات برابر است با:  $n(S) = 6!$   
 متمم پیشامد "بین علی و شروین حداقل یک نفر باشد (A)", پیشامد "بین علی و شروین کسی نباشد (A') است."  
 پس "علی و شروین" را در یک بسته قرار می‌دهیم:

علی, شروین, B, C, D, E

$$\Rightarrow n(A') = 5! \times 2!$$

در نتیجه:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

در بین اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰، پنج عدد فرد و پنج عدد زوج وجود دارد. بنابراین یک زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه اعداد  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  نهایتاً می‌تواند ۵ عضو فرد داشته باشد. لذا زیرمجموعه‌های ۵ عضوی که حداقل سه عدد فرد دارند را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:

- ۱- سه عضو فرد و دو عضو زوج (انتخاب ۳ عدد از ۵ عدد فرد و ۲ عدد از ۵ عدد زوج):  $\binom{5}{3} \binom{5}{2}$
- ۲- چهار عضو فرد و یک عضو زوج (انتخاب ۴ عدد از ۵ عدد فرد و ۱ عدد از ۵ عدد زوج):  $\binom{5}{4} \binom{5}{1}$
- ۳- پنج عضو فرد و صفر عضو زوج (انتخاب ۵ عدد از ۵ عدد فرد و ۰ عدد از ۵ عدد زوج):  $\binom{5}{5} \binom{5}{0}$

پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{5}{3} \binom{5}{2} + \binom{5}{4} \binom{5}{1} + \binom{5}{5} \binom{5}{0} = 126$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
 تستر علوم تجربی دهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

هدف ما انتخاب ۲ مرد غیرهم‌رشته‌ای و ۲ زن غیرهم‌رشته‌ای است. به همین منظور برای انتخاب ۲ استاد مذکور، ۲ رشته از ۳ رشته را انتخاب کرده (به  $\binom{۳}{۲}$  طریق) و سپس یک استاد از سه استاد رشته اول (به  $\binom{۳}{۱}$  طریق) و یک استاد از سه استاد رشته دوم (به  $\binom{۳}{۱}$  طریق) انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد حالات انتخاب ۲ استاد مرد غیرهم‌رشته‌ای برابر است با:

$$\binom{۳}{۲} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۲۷$$

به همین ترتیب تعداد حالات انتخاب ۲ استاد زن غیرهم‌رشته‌ای نیز برابر با  $\binom{۳}{۲} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۲۷$  خواهد بود. لذا تعداد طرق انتخاب کمیته ۴ نفره برابر است با:

$$\left( \binom{۳}{۲} \binom{۳}{۱} \binom{۳}{۱} \right)^2 = ۲۷^2 = ۷۲۹$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

می‌دانیم تفاضل دو تاس در کمترین حالت برابر با صفر و در بیشترین حالت برابر با پنج خواهد شد (یک تاس ۱ و یک تاس ۶ بیاید!). پس برای آنکه تفاضل دو تاس، عددی اول شود، باید یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ باشد. حالات مربوط به هرکدام را می‌نویسیم:

تفاضل دو تاس ۲ شود:  $\{(۱, ۳), (۲, ۴), (۳, ۵), (۴, ۶), (۳, ۱), (۴, ۲), (۵, ۳), (۶, ۴)\}$

تفاضل دو تاس ۳ شود:  $\{(۱, ۴), (۲, ۵), (۳, ۶), (۴, ۱), (۵, ۲), (۶, ۳)\}$

تفاضل دو تاس ۵ شود:  $\{(۱, ۶), (۶, ۱)\}$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:  $۱۶ = ۲ + ۶ + ۸$  و لذا احتمال موردنظر برابر  $\frac{۴}{۹} = \frac{۱۶}{۳۶}$  می‌شود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

نکته: اگر خط  $d$  با جهت مثبت محور  $x$ ها، زاویه  $\theta$  بسازد، آنگاه:

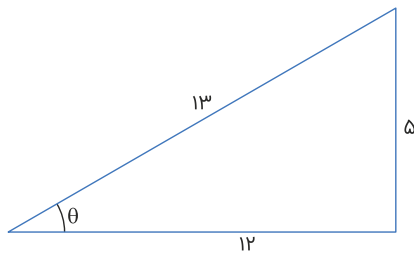
$$\text{شیب خط} = \tan \theta \quad (0^\circ \leq \theta < 180^\circ)$$

شیب خط داده شده را حساب می‌کنیم:

$$5x + 12y - 1 = 0 \Rightarrow y = \underbrace{\frac{-5}{12}}_{\text{شیب}} x + \frac{1}{12}$$

پس  $\tan \theta = \frac{-5}{12}$  و  $\theta$  در ربع دوم قرار دارد.

مقدار  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  را به کمک مثلث قائم‌الزاویه که تانژانت یکی از زوایای آن  $\frac{5}{12}$  است، به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{5}{13} \xrightarrow{\text{ربع دوم } \sin \theta > 0} \sin \theta = \frac{5}{13} \\ \cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{12}{13} \xrightarrow{\text{ربع دوم } \cos \theta < 0} \cos \theta = \frac{-12}{13} \end{cases}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{5}{13} - \left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{17}{13} \text{ پس:}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

باتوجه به صورت سؤال داریم:

$$a_6 a_8 = a_{14} \Rightarrow (aq^6)(aq^8) = aq^{14} \Rightarrow a^2 q^{14} = aq^{14} \Rightarrow a^2 q^{14} - aq^{14} = 0$$

$$\Rightarrow aq^{14}(a - q) = 0 \Rightarrow \begin{cases} aq^{14} = 0 \Rightarrow a_{14} = 0 \quad (*) \\ a = q \end{cases}$$

(\*): تمام جملات برابر صفر هستند در نتیجه دنباله ثابت صفر است (غیرقابل قبول).

آنچه پرسیده شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\frac{a_3}{a_5} = \frac{(aq^2)^3}{aq^5} = \frac{a^3 q^6}{aq^5} = a = q$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

عبارت مورد نظر را تا حد امکان ساده می‌کنیم.  $((\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta)$  و  $((\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta)$  مزدوج یکدیگرند، پس داریم:

$$A = (\alpha^2 - \beta^2)((\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta)((\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta) = (\alpha^2 - \beta^2)((\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2)$$

$$= (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2) = \alpha^6 - \beta^6$$

$$\text{حال مقادیر } \alpha \text{ و } \beta \text{ را جایگذاری می‌کنیم. باتوجه به اینکه } 6 + \sqrt{11} = \left(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \text{ و } 6 - \sqrt{11} = \left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$$

داریم:

$$A = \alpha^6 - \beta^6 = \left(\sqrt[3]{6 + \sqrt{11}}\right)^6 - \left(\sqrt[3]{6 - \sqrt{11}}\right)^6 = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$$

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

با فاکتورگیری از عامل  $x^3$  در صورت و تجزیهٔ مخرج به کمک اتحاد چاق و لاغر، عبارت را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{x^3(x^2 - \sqrt{2}x + 2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} < 0$$

در عبارت‌های  $x^2 - \sqrt{2}x + 2$  و  $x^2 + 2x + 4$  واضح است که  $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$  پس این عبارت‌ها، همواره مثبت بوده و تأثیری در تعیین علامت ندارند، لذا کافی است عبارت زیر را تعیین علامت کنیم:

$$\frac{x^3}{x-2} < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$a \times aq \times aq^2 \times \dots \times aq^{90} = a^{91} \times q^{1+2+\dots+90}$$

$$= a^{91} \times q^{\frac{91 \times 91}{2}} = a^{91} \times q^{45 \times 91} = (aq^{45})^{91} = 3^{273} = (3^3)^{91}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر ۹۵}} aq^{45} = 3^3 = 27$$

$$\text{نکته: حاصل ضرب } \Pi \text{ جمله اول هر دنباله هندسی از رابطه زیر به دست می‌آید. داریم: } a \times aq^{90} = a^2 q^{90} = (aq^{45})^2 = 27^2 = 729$$

نکته: حاصل ضرب  $\Pi$  جمله اول هر دنباله هندسی از رابطه زیر به دست می‌آید. داریم:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}} \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \dots a_{91} = (a_1 \cdot a_{91})^{\frac{91}{2}} = 3^{273} = (3^3)^{91}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[91]{\quad}} (a_1 \cdot a_{91})^{\frac{1}{2}} = 3^3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a_1 \cdot a_{91} = (3^3)^2 = 27^2 = 729$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

از جدول تعیین علامت  $ax + b$  دو نتیجه می‌گیریم:

اولاً علامت ضریب  $x$  (شیب خط)، یعنی  $a$  منفی است (یعنی  $a < 0$ ) و ثانیاً ریشه عبارت  $ax + b$  برابر  $-2$  است، پس داریم:

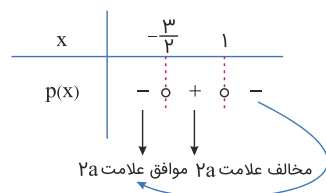
$$ax + b \xrightarrow{x=-2} -2a + b = 0 \Rightarrow 2a = b$$

با جایگذاری  $b = 2a$ ،  $p(x)$  به صورت زیر درمی‌آید، داریم:

$$p(x) = bx^2 + ax - 3a \xrightarrow{b=2a} 2ax^2 + ax - 3a = a(2x^2 + x - 3)$$

$$= a(x-1)(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

حال با معلوم بودن ریشه‌های عبارت درجه دوم و علامت ضریب  $x^2$  (یعنی علامت  $2a$  که منفی است)، جدول تعیین علامت  $p(x)$  را رسم می‌کنیم، داریم:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) سن دانش‌آموزان (پیوسته)، رنگ ماشین‌ها (اسمی)، تعداد ساختمان‌های اداری تهران (گسسته)، غذای مورد علاقه خانم‌ها (اسمی)

۲) تعداد دانه‌های تسبیح (گسسته)، مدل خودروهای خیابان (اسمی)، طول عمر انسان (پیوسته)، شدت آلودگی هوا (ترتیبی) کم، متوسط، زیاد))

۳) انواع وضعیت آب و هوایی (اسمی)، شدت بارندگی (ترتیبی)، نوع بارندگی (اسمی)، میزان بارندگی (پیوسته)

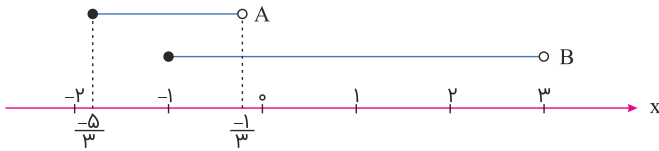
۴) تعداد شهرهای یک کشور (گسسته)، میزان دمای هوا (پیوسته)، جنسیت افراد (اسمی)، نوع آلاینده‌های هوا (اسمی)

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

باید مجموعه A را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} 3x + 1 \in B &\Rightarrow -1 \leq 3x + 1 < 3 \Rightarrow -2 \leq 3x < 2 \\ &\Rightarrow \frac{-2}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-5}{3} \leq x - 1 < \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

بنابراین  $A = [\frac{-5}{3}, \frac{-1}{3})$  است. حاصل  $B \cap A'$  یعنی  $B - A$  را می‌خواهیم:



$$B - A = [\frac{-1}{3}, 3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

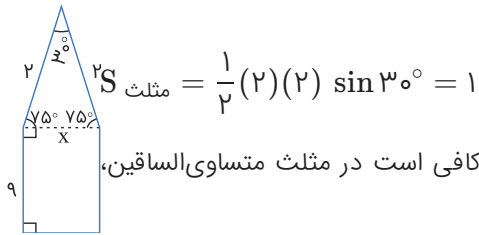
$$a_{14} = 0 \Rightarrow a_1 + 13d = 0 \Rightarrow a_1 = -13d$$

برای اینکه پی ببریم جمله  $a_5$  چندبرابر جمله  $a_{11}$  است، کافی است نسبت آن‌ها را محاسبه نماییم. داریم:

$$\frac{a_5}{a_{11}} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + 10d} \xrightarrow{a_1 = -13d} \frac{-13d + 4d}{-13d + 10d} = \frac{-9d}{-3d} = 3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم انسانی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

ابتدا شکل زیر را ببینید و به زوایای محاسبه شده دقت کنید.  
باید مساحت مثلث متساوی الساقین و مستطیل را حساب کنیم:



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(2)(2) \sin 30^\circ = 1$$

برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل، ابتدا باید طول ضلع دیگر آن را محاسبه کنیم؛ کافی است در مثلث متساوی الساقین، قضیه سینوس‌ها را بنویسیم:

$$\frac{\sin 30^\circ}{x} = \frac{\sin 75^\circ}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\sin 75^\circ}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{\sin 75^\circ}$$

پس:

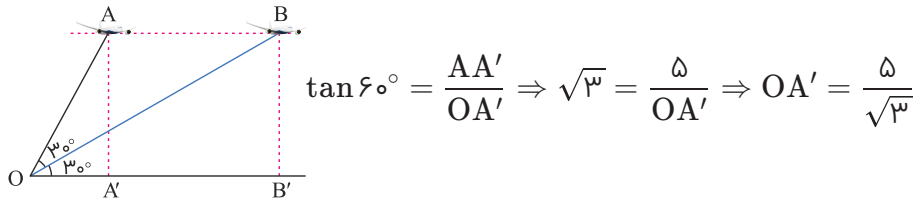
$$S_{\text{مستطیل}} = 9 \times \frac{2}{\sin 75^\circ} = 10$$

و لذا:

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}} = 1 + 10 = 11$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

به شکل زیر توجه کنید:  
در مثلث  $OAA'$  داریم:



$$\tan 60^\circ = \frac{AA'}{OA'} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5}{OA'} \Rightarrow OA' = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

در مثلث  $OBB'$  هم داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{BB'}{OB'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{OB'} \Rightarrow OB' = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

پس:

$$A'B' = OB' - OA' = \frac{15}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

پس درواقع هواپیما مسافت  $\frac{10}{\sqrt{3}}$  کیلومتر را با سرعت  $\sqrt{3}$  کیلومتر بر دقیقه طی کرده است. مطابق رابطه  $x = Vt$  داریم:

$$\frac{10}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}t \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}t \Rightarrow t = \frac{10}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

با فرض  $\frac{a}{b} = x$  داریم:  $\frac{b}{a} = \frac{1}{x}$ . در این صورت  $2\sqrt{3}$  ،  $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$  ، حال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{a^f - b^f}{a^f b^f} &= \frac{a^f}{a^f b^f} - \frac{b^f}{a^f b^f} = \left(\frac{a}{b}\right)^f - \left(\frac{b}{a}\right)^f \\ &= x^f - \frac{1}{x^f} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

مقدار  $x - \frac{1}{x}$  را که داریم. پس کافی است حاصل  $x + \frac{1}{x}$  را محاسبه کنیم. با استفاده از توان دوم  $x - \frac{1}{x}$ ، حاصل  $x + \frac{1}{x}$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 &= \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 12 \\ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} &= 14 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16 \end{aligned}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 16 \xrightarrow{x = \frac{a}{b} > 0} x + \frac{1}{x} = 4$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a^f - b^f}{a^f b^f} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

باتوجه به فرض مسأله داریم:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 10 \Rightarrow x + xq + xq^2 + xq^3 = 10 \\ \Rightarrow x(1 + q + q^2 + q^3) &= 10 \xrightarrow{1 + q + q^2 + q^3 = \frac{q^4 - 1}{q - 1}} x \times \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 10 \quad (1) \end{aligned}$$

$$a_5 = 10 + a_1 \Rightarrow xq^4 = 10 + x \Rightarrow x(q^4 - 1) = 10 \Rightarrow q^4 - 1 = \frac{10}{x} \quad (2)$$

حال با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$x \times \frac{10}{q - 1} = 10 \Rightarrow q - 1 = 1 \Rightarrow q = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

تعداد حروف نقطه‌دار زبان فارسی ۱۷ و تعداد حروف صدادار زبان انگلیسی ۵ است. چون حروف کنار هم نباید از یک زبان باشد، دو حالت وجود دارد:

شروع با حرف فارسی: ۱۷ ۵ ۱۷

شروع با حرف انگلیسی: ۵ ۱۷ ۵

پس جواب نهایی برابر است با:

$$17 \times 5 \times 17 + 5 \times 17 \times 5 = 17 \times 5 (17 + 5) = 17 \times 5 \times 22 = 17 \times 110 = 1870$$

دقت کنید! در ساختن رمز، تکرار مجاز است!

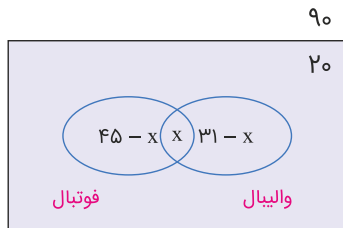
تالیفی آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دوازدهم

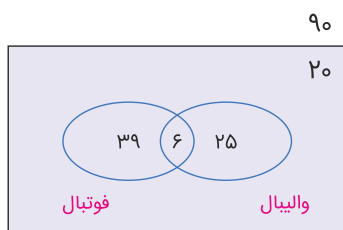
داده‌های مسئله را روی نمودار ون نمایش می‌دهیم. دقت کنید که تعداد اعضای مشترک دو تیم را  $x$  فرض کرده‌ایم:



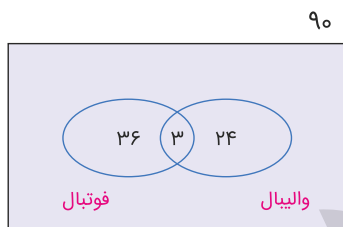
واضح است که:

$$(45 - x) + x + (31 - x) = 90 - 20 \Rightarrow x = 6$$

پس داریم:



حالا قرار است ۶ نفر از تیم فوتبال و ۴ نفر از تیم والیبال حذف شوند و در نتیجه این حرکت، ۳ نفر از تعداد اعضای مشترک کم شود، پس به‌جز این ۳ نفر، باید ۳ نفر از اعضای فقط عضو تیم فوتبال و ۱ نفر از اعضای فقط عضو تیم والیبال حذف شوند. همان‌طور که می‌بینیم ۳۶ نفر فقط عضو تیم فوتبال و ۲۴ نفر فقط عضو تیم والیبال هستند و جواب آخر تست برابر است با:  $۳۶ + ۲۴ = ۶۰$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

باتوجه به اینکه  $a_1 < 1$  و می‌دانیم از اعداد بزرگ‌تر از ۱ هرچه ریشه بزرگ‌تری بگیریم، مقدار عبارت کوچک‌تر می‌شود (البته بزرگ‌تر از ۱ باقی می‌ماند) پس:

$$1 < \sqrt[4]{a_1} < a_1 \Rightarrow \sqrt[4]{a_1} = b_1$$

اما از آنجا که  $0 < a_2 < 1$  و می‌دانیم از اعداد بین صفر و ۱ هرچه ریشه بزرگ‌تری بگیریم، مقدار عبارت بزرگ‌تر می‌شود (البته کوچک‌تر از ۱ باقی می‌ماند) پس:

$$a_2 < \sqrt[4]{a_2} < 1 \Rightarrow \sqrt[4]{a_2} = c_2$$

در مورد  $-1 < a_3 < 0$  نیز ماجرا از همین قرار است، با این تفاوت که وقتی ریشه پنجم  $a_3$  به لحاظ مقداری از خود  $a_3$  بزرگ‌تر می‌شود، از آنجا که در حوزه اعداد منفی قرار داریم، هرچه یک مقداری به لحاظ عددی بزرگ‌تر باشد، در واقع عدد کوچک‌تری است، پس:

$$-1 < \sqrt[4]{a_3} < a_3 \Rightarrow \sqrt[4]{a_3} = b_3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

در سهمی اگر ضریب  $x^2$  مثبت باشد، برد سهمی، بازه  $(-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$  است.

اگر یک عدد از دامنه حذف شود، برد تغییری نمی‌کند، مگر آن عدد طول رأس سهمی باشد. پس  $x = 1$ ، طول رأس سهمی است:

$$\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow \frac{-b}{2} = 1 \Rightarrow b = -2$$

از طرفی عدد  $c$ ، همان  $y$  رأس سهمی است:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2c \xrightarrow{f(1)=c} 1 - 2 + 2c = c \Rightarrow c = 1$$

در نتیجه:  $b + c = -2 + 1 = -1$ .

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

مفهوم سؤال این است که رأس سهمی روی یکی از دو خط  $y = x$  یا  $y = -x$  واقع است. یعنی مختصات رأس سهمی به صورت  $(\alpha, \alpha)$  یا  $(\alpha, -\alpha)$  است. با توجه به معادله سهمی می‌توانیم طول رأس سهمی را حساب کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4k}{2k} = 2 \Rightarrow y_S = \pm 2 \Rightarrow k(2)^2 - 4k(2) + 6 = \pm 2$$

$$4k - 8k + 6 = \pm 2 \Rightarrow -4k + 6 = \pm 2$$

$$\Rightarrow -4k + 6 = 2 \quad \text{یا} \quad -4k + 6 = -2 \Rightarrow k = 1 \quad \text{یا} \quad 2$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k = 1 + 2 = 3$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

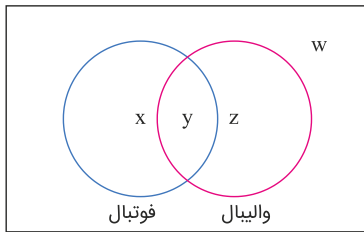
سه جمله متوالی را  $a-d, a, a+d$  در نظر می‌گیریم. باید  $d$  را پیدا کنیم. طبق فرض اعداد  $a-d-1, a-2, a-d-1$  تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. پس جمله وسط، واسطه هندسی دو جمله دیگر است. لذا خواهیم داشت:

$$(a-2)^2 = (a-d-1)(a+d-3) \Rightarrow a^2 + 4 - 4a = a^2 + ad - 3a - ad - d^2 + 3d - a - d + 3$$

$$\Rightarrow a^2 + 4 - 4a = a^2 - 4a - d^2 + 2d + 3 \Rightarrow d^2 - 2d + 1 = 0 \Rightarrow (d-1)^2 = 0 \Rightarrow d = 1$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم انسانی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تعداد افرادی که فقط به فوتبال علاقه دارند را  $x$ ، تعداد افرادی که فقط به والیبال علاقه دارند را  $z$  و تعداد افراد علاقه‌مند به هر دو ورزش را  $y$  در نظر می‌گیریم. اگر تعداد افرادی که به هیچ‌کدام از دو ورزش علاقه‌مند نیستند را  $w = ۲۲$  فرض کنیم، آنگاه باتوجه به نمودار ون می‌توان مقدار  $x$  را محاسبه کرد:



$$\begin{cases} x + y + z + w = ۶۰ \\ x + y = ۳۰ \\ y + z = ۲۰ \\ w = ۲۲ \end{cases} \quad \begin{array}{l} y+z=۲۰, w=۲۲ \\ x+y+z+w=۶۰ \end{array} \Rightarrow x + \underbrace{(y+z)}_{۲۰} + \underbrace{w}_{۲۲} = ۶۰ \Rightarrow x = ۶۰ - ۴۲ = ۱۸$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

می‌دانیم اگر  $m > ۰$  باشد،  $\frac{|m|}{m} = ۱$  و اگر  $m < ۰$  باشد،  $\frac{|m|}{m} = -۱$  است. (واضح است که  $m \neq ۰$ )

$$۱) m > ۰ \Rightarrow f = \{(1, m^2 - 2), (1, -2), (-1, 7)\}$$

$$m^2 - 2 = -2 \Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \quad \times$$

$$۲) m < ۰ \Rightarrow f = \{(-1, m^2 - 2), (1, -2), (-1, 7)\}$$

$$m^2 - 2 = 7 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases} \quad \times$$

فقط به ازای  $m = -3$  رابطه داده شده تابع است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دهم

۴ جمله متوالی دنباله را  $a + 3t, a + t, a - t, a - 3t$  در نظر می‌گیریم. حواسمان باشد که قدر نسبت این دنباله  $2t$  است و ما باید مقدار  $2t$  را پیدا کنیم (نه  $t$ ). باتوجه به فرض مسأله داریم:

$$(a - 3t) + (a - t) + (a + t) + (a + 3t) = 20 \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5$$

$$(a - 3t)^2 + (a - t)^2 + (a + t)^2 + (a + 3t)^2 = 145$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 20t^2 = 145 \xrightarrow{a=5} 100 + 20t^2 = 145$$

$$\Rightarrow 20t^2 = 45 \Rightarrow t^2 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \text{قدر نسبت} = 2t = \pm 3$$

که از دو مقدار فوق فقط  $+3$  در گزینه‌ها موجود است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

می‌خواهیم حداکثر ۲ آلمانی داشته باشیم، پس تعداد آلمانی‌ها، صفر یا ۱ یا ۲ نفر است و بقیه ۵ نفر از بین ۷ برزیلی و ایتالیایی انتخاب می‌شوند (۴ برزیلی و ۳ ایتالیایی). داریم:

$$\binom{5}{0} \binom{7}{5} + \binom{5}{1} \binom{7}{4} + \binom{5}{2} \binom{7}{3} = 1 \times 21 + 5 \times 35 + 10 \times 35 = 21 + 175 + 350 = 546$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

شکل	۱	۲	۳	ام n
گلوله‌های سفید	۲	۵	۱۰	$(n+1) \times n - (n-1) = n^2 + 1$
گلوله‌های مشکی	۱	۲	۳	n

$$\Rightarrow \frac{\text{گلوله‌های سفید}}{\text{گلوله‌های رنگی}} = \frac{n^2 + 1}{n}$$

پس نسبت گلوله‌های سفید به رنگی در شکل یازدهم برابر است با:

$$\frac{11^2 + 1}{11} = \frac{121 + 1}{11} = \frac{122}{11}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم انسانی دوازدهم

عبارت را تجزیه می‌کنیم و سعی بر این داریم که تا آنجا که می‌توان  $x^6 + 1$  تولید کرد:

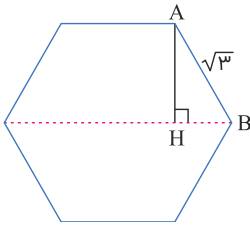
$$\begin{aligned} x^6 + x^5 - 2x^4 + x^3 + x - 2 &= (x^6 + x^3) + (x^5 + x) - (2x^4 + 2) = x^3(x^3 + 1) + x(x^4 + 1) - 2(x^4 + 1) \\ &= (x^3 + 1)(x^3 + x - 2) = (x^3 + 1)(x + 2)(x - 1) \end{aligned}$$

بنابراین دو عامل دیگر  $x + 2$  و  $x - 1$  هستند که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$(x + 2) + (x - 1) = 2x + 1$$

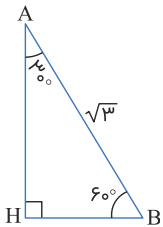
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

شکل زیر را ببینید:



هدف مسئله در واقع پیدا کردن طول AH است.

می‌دانیم اندازه هر یک از زوایای داخلی یک شش ضلعی منتظم برابر با  $120^\circ$  است، پس در مثلث AHB داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

نکته: اگر بخواهیم اشیایی را جایگشت دهیم به طوری که k شیء هیچ دوه‌دویشان کنار هم نباشند، باید ابتدا مابقی اشیاء را جایگشت دهیم و سپس این k شیء را در فضای یکی بیشتر از تعداد اشیایی که چیدیم، جایگشت دهیم. باتوجه به نکته بالا برای آنکه هیچ دو والیبالیست کنار هم نباشند، باید ابتدا ۶ فوتبالیست را جایگشت داده و سپس ۳ والیبالیست را در ۷ فضای خالی ایجادشده، جایگشت دهیم. برای این منظور از اصل ضرب کمک گرفته یا ۳ جای خالی را انتخاب کرده (از ۷ جا) و آن ۳ نفر را در آن‌ها جایگشت می‌دهیم. داریم:

— F — F — F — F — F — F —

$$\underbrace{6!}_{\substack{\text{جایگشت} \\ \text{فوتبالیست‌ها}}} \times \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{\substack{\text{جایگشت} \\ \text{والیبالیست‌ها}}} \quad \text{یا} \quad 6! \times \binom{7}{3} \times 3! = 7! \times 30$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

AA TT B S R C

ابتدا حروف T, T, B, S, R, C را به  $\frac{6!}{2!}$  طریق کنار هم می‌چینیم.



$$\frac{6!}{2!} \rightarrow \text{تعداد حالت‌ها}$$

حال در هفت جایگاه رنگی ایجاد شده، دو حرف A را به  $\binom{7}{2}$  طریق قرار می‌دهیم. در آخر باتوجه به اصل ضرب، داریم:

$$\text{روش اول: } \frac{6!}{2!} \times \binom{7}{2} = \frac{6!}{2} \times 7 \times 3 = \frac{3}{2} \times 7!$$

$$\text{روش دوم: } \frac{6!}{2!} \times \frac{7 \times 6}{2} = \frac{3}{2} \times 7!$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

در حل این مسئله، تکرار ارقام مجاز است. تنها نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم آن است که محدودیت رقم‌گذاری در خانه هزارگان است و اگر هزارگان عدد ۲ باشد، خانه صدگان نیز دارای محدودیت خواهد بود. داریم:

حالت اول: رقم هزارگان ۳، ۴ یا ۵ باشد:

$$\underbrace{3}_{\{3,4,5\}} \times \underline{6} \times \underline{6} \times \underline{6} = 3 \times 216 = 648$$

حالت دوم: رقم هزارگان ۲ باشد:

$$\underbrace{1}_{\{2\}} \times \underbrace{3}_{\{3,4,5\}} \times \underline{6} \times \underline{6} = 108$$

دقت کنیم در حالت دوم عدد ۲۳۰۰ نیز ساخته می‌شود. پس از تعداد حالت‌های به‌دست‌آمده، ۱ واحد کم می‌کنیم. داریم:

$$\text{جواب حالت دوم} = 108 - 1 = 107$$

$$2300 \text{ بزرگ‌تر از } 755 = 648 + 107 = 755$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

می‌دانیم  $|x^3 - 7| \geq 0$ ، پس برای آنکه نامساوی  $|x^3 - 7| \geq 4m^2 + 5m - 6$  همواره برقرار باشد، کافی است:

$$4m^2 + 5m - 6 \leq 0$$

$$4m^2 + 5m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 + 5m - 24 = 0 \Rightarrow m = -8, 3$$

پس جواب‌های واقعی این معادله عبارت‌اند از:

$$m = \frac{-8}{4} = -2, \frac{3}{4}$$

حال داریم:

$$4m^2 + 5m - 6 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{4}$$

این بازه شامل سه عدد صحیح  $0, -1, -2$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

جملات سوم  $(aq^2)$ ، چهارم  $(aq^3)$  و ششم  $(aq^5)$  دنباله هندسی  $a_n$  را سه جمله متوالی  $b_k, b_{k+1}, b_{k+2}$  از دنباله حسابی  $b_n$  در نظر می‌گیریم. باتوجه به اینکه در هر سه جمله متوالی یک دنباله حسابی، مجموع جملات اول و سوم، دو برابر جمله دوم است، داریم:

$$b_k + b_{k+2} = 2b_{k+1} \Rightarrow aq^2 + aq^5 = 2aq^3 \Rightarrow aq^2(1 + q^3) = 2aq^3$$

$$\Rightarrow 1 + q^3 = 2q \Rightarrow 1 - q = q - q^3 \Rightarrow 1 - q = q(1 - q^2) = q(1 - q)(1 + q)$$

$$\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{q \neq 1} 1 = q(1 + q) \Rightarrow q^2 + q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

باتوجه به اینکه جملات دنباله هندسی موردنظر همگی مثبت هستند، می‌توان دریافت که مقدار قدر نسبت باید مثبت باشد. زیرا در دنباله‌های هندسی با قدر نسبت منفی علامت جملات به صورت یک‌درمیان مثبت و منفی خواهد بود. بنابراین فقط مقدار  $q = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  قابل قبول است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

هر سهمی حتماً محور  $y$  ها را در یک نقطه قطع می‌کند:

$$f(0) = b \Rightarrow A(0, b)$$

پس این سهمی، محور  $x$  ها را فقط در یک نقطه باید قطع کند.

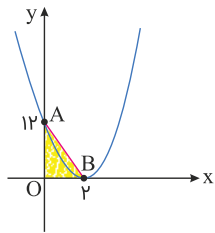
$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 12b = 0 \Rightarrow b = 0, 12$$

اگر  $b = 0$  باشد، سهمی به صورت  $f(x) = 3x^2$  در می‌آید و این سهمی فقط در مبدأ با محورهای مختصات برخورد دارد، پس این حالت رد می‌شود.

با جایگذاری  $b = 12$ ، داریم:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$$

شکل سهمی را می‌کشیم:



$$S = \frac{12 \times 2}{2} = 12 \text{ برابر است با: } S = \frac{12 \times 2}{2} = 12$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

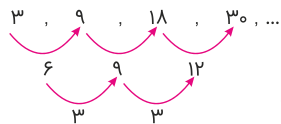
تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

مطابق الگوی داده شده داریم:

$$1, 4, 9, 16, \dots \Rightarrow a_n = n^2$$

تعداد چوب کبریت‌ها: ۳, ۹, ۱۸, ۳۰, ...



دقت می‌کنیم که در این الگو، اختلاف جملات ثابت نیست، ولی اختلاف اختلاف جملات، مقداری ثابت است و لذا با الگویی از درجه دوم به صورت زیر مواجه‌ایم:

$$b_n = \frac{3}{2}n^2 + bn + c$$

نصف اختلاف اختلاف!

و برای پیدا کردن  $b$  و  $c$  کافی است دو تا از جملات این دنباله را تست کنیم:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \Rightarrow \frac{3}{2} + b + c = 3 \Rightarrow b + c = \frac{3}{2} \\ b_2 = 9 \Rightarrow 6 + 2b + c = 9 \Rightarrow 2b + c = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین را از هم کم می‌کنیم}} b = \frac{3}{2} \Rightarrow c = 0$$

پس:

$$b_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

حالا داریم:

$$\text{تعداد چوب کبریت‌ها} = \frac{3}{2}n(n+1) = 630 \Rightarrow n(n+1) = 420 = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$$

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = n^2 = 20^2 = 400$$

باتوجه به فرض مسئله داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow ۱ = n(A) - ۳ \Rightarrow n(A) = ۴ \quad (۱)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۲ = n(B) - ۳ \Rightarrow n(B) = ۵ \quad (۲)$$

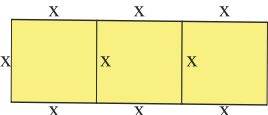
$$\xrightarrow{(۱), (۲)} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۴ + ۵ - ۳ = ۶$$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر ضلع مربعها را  $x$  در نظر بگیریم، رابطه بین  $x$  و  $L$  به صورت زیر است:



$$\Rightarrow ۱۰x = L \Rightarrow x = \frac{L}{۱۰}$$

محیط و مساحت کل شکل برابر است با:

$$\text{محیط} = ۲(x + ۳x) = ۸x$$

$$\text{مساحت} = x(۳x) = ۳x^۲$$

سؤال گفته، عدد مساحت از عدد محیط، ۴ واحد کمتر است، پس:

$$\text{محیط} - \text{مساحت} = ۴ \Rightarrow ۸x - ۳x^۲ = ۴ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۸ \pm \sqrt{۶۴ - ۴۸}}{۶} = ۲, \frac{۲}{۳}$$

پس  $L$  می‌تواند مقادیر زیر را داشته باشد:

$$L = ۱۰x = ۱۰ \times ۲ = ۲۰ \quad \text{یا} \quad L = ۱۰x = ۱۰ \times \frac{۲}{۳} = \frac{۲۰}{۳}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دهم

چون مخرج کسر همواره مثبت است، با مخرج مشترک‌گیری در نامعادله صورت تست، به نامعادله زیر می‌رسیم. داریم:

$$\frac{2x^2 + 2x + 3 - a(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \leq 0 \xrightarrow{x^2+x+1 > 0} (2-a)x^2 + (2-a)x + 3 - a \leq 0$$

عبارت حاصل باید همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد؛ بنابراین باید  $\Delta$  را کوچک‌تر مساوی صفر قرار داده و ضریب  $x^2$  را منفی قرار دهیم. داریم:

$$x^2 \text{ ضریب } = 2 - a < 0 \Rightarrow a > 2$$

$$\Delta = (2-a)^2 - 4(2-a)(3-a) = (2-a)(2-a-12+4a) = (2-a)(3a-10)$$

$$\frac{\Delta \leq 0}{\Rightarrow} a \leq 2 \text{ یا } a \geq \frac{10}{3} \xrightarrow{a > 2} a \geq \frac{10}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{عدد طبیعی تک رقمی است}} a \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

پس برای  $a$ ، ۶ مقدار طبیعی و یک رقمی وجود دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

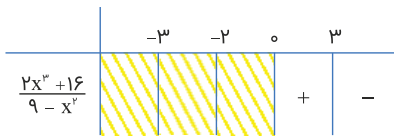
از اتحاد  $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$  کمک می‌گیریم. داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \underbrace{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3}_{\sqrt{3}} + 3x \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)}_{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = \underbrace{\sqrt{3^3}}_{3\sqrt{3}} + 3\sqrt{3} \Rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = 6\sqrt{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $x < 0$  باشد، عبارت  $\frac{x}{|x|} + 1$  صفر می‌شود، پس کل عبارت  $\frac{x^3 + 8}{9 - x^2} + 1$  هم صفر خواهد بود و نامعادله برقرار نیست. پس باید  $x > 0$  باشد. در این صورت  $1 + 1 = 2$  می‌شود.



پس جواب نامعادله فقط بازه  $(0, 3)$  است که شامل اعداد صحیح  $x = 1$  و  $x = 2$  می‌باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

تشکیل یک گروه علمی ۴ نفره با شرایط مسئله به سه حالت زیر تقسیم می‌شود:

$$\begin{aligned} (1) \text{ انتخاب } 2 \text{ نفر از } 4 \text{ معلم ریاضی و } 2 \text{ نفر از } 5 \text{ معلم غیر ریاضی: } & \binom{4}{2} \binom{5}{2} = 60 \\ (2) \text{ انتخاب } 3 \text{ نفر از } 4 \text{ معلم ریاضی و } 1 \text{ نفر از } 5 \text{ معلم غیر ریاضی: } & \binom{4}{3} \binom{5}{1} = 20 \\ (3) \text{ انتخاب } 4 \text{ نفر از } 4 \text{ معلم ریاضی و } 0 \text{ نفر از } 5 \text{ معلم غیر ریاضی: } & \binom{4}{4} \binom{5}{0} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} \binom{5}{0} = 81$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

اگر دانش‌آموزان را با حرف  $D$  و معلم‌ها را با حرف  $M$  نمایش دهیم، سه آرایش زیر را برای نشستن این افراد در کنار هم می‌توان در نظر گرفت به طوری که هر دانش‌آموز با معلمی مجاور باشد:

$DMDMD$ ,  $DMDDM$ ,  $MDDMD$

حال سه دانش‌آموز در جایگاه‌های مشخص شده با حرف  $D$  در هریک از آرایش‌ها، به  $3!$  طریق و دو معلم در جایگاه‌های مشخص شده با حرف  $M$  در هریک از آرایش‌ها، به  $2!$  طریق جایگشت دارند. بنابراین تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

$$3 \times 3! \times 2! = 36$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$(3x^2 - x)^2 < 4 \xrightarrow{\text{رادیکال}} |3x^2 - x| < 2 \Rightarrow -2 < 3x^2 - x < 2$$

$$1) -2 < 3x^2 - x \Rightarrow 3x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ و همواره برقرار است.}$$

$$2) 3x^2 - x < 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (3x + 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow \frac{-2}{3} < x < 1$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت  $\frac{-2}{3} < x < 1$  است. پس:

$$b - a = 1 - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

از داخلی ترین پرانتز شروع می کنیم:

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}' \cap \mathbb{N} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{Q} \cup \emptyset = \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}' = \text{متمم } \mathbb{Q}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

می خواهیم تابع  $y = (m + 2)x^2 + 2mx - m$  همواره بالای خط  $y = x + 1$  باشد. یعنی:

$$(m + 2)x^2 + 2mx + m > x + 1 \Rightarrow (m + 2)x^2 + (2m - 1)x + m - 1 > 0$$

رابطه بالا همواره برقرار است. پس باید:

$$1) m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4(m + 2)(m - 1) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 + m - 2) < 0$$

$$\Rightarrow -8m + 9 < 0 \Rightarrow 8m > 9 \Rightarrow m > \frac{9}{8}$$

بین مقادیر به دست آمده برای  $m$  باید اشتراک بگیریم. اشتراک آن ها  $m > \frac{9}{8}$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

طبق رابطه داده شده داریم:

$$F_2 - F_1 = 81 \Rightarrow \left(\frac{9}{5}C_2 + 32\right) - \left(\frac{9}{5}C_1 + 32\right) = 81$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5}(C_2 - C_1) = 81 \Rightarrow C_2 - C_1 = 45$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر متمم A و B نامتناهی باشند، خود A و B می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند. برای هر گزینه مثال‌هایی می‌زنیم که ثابت کنیم می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.  
اگر مجموعه مرجع را  $\mathbb{R}$  در نظر بگیریم، داریم: (توجه کنید در تمام حالت‌ها  $A'$  و  $B'$  نامتناهی هستند).  
گزینه "۱":

$$\begin{cases} A = \emptyset \\ B = \emptyset \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \text{ متناهی}$$

$$\begin{cases} A = \mathbb{N} \\ B = \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \mathbb{N} \text{ نامتناهی}$$

گزینه "۲":

$$\begin{cases} A' = \mathbb{N} \\ B' = \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow A' \cap B' = \mathbb{N} \text{ نامتناهی}$$

$$\begin{cases} A' = \text{اعداد گویا} \\ B' = \text{اعداد گنگ} \end{cases} \Rightarrow A' \cap B' = \emptyset$$

گزینه "۳":

$$\begin{cases} A = \mathbb{N} \\ B = \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow A' - B' = \emptyset \text{ متناهی}$$

$$\begin{cases} A = \mathbb{Z} \\ B = \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow A - B = \text{صحيح منفي}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

می‌خواهیم تابع  $y = (m + 2)x^2 + 2mx - m$  همواره بالای خط  $y = x + 1$  باشد. یعنی:

$$(m + 2)x^2 + 2mx + m > x + 1 \Rightarrow (m + 2)x^2 + (2m - 1)x + m - 1 > 0$$

رابطه بالا همواره برقرار است. پس باید:

$$1) m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4(m + 2)(m - 1) < 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 + m - 2) < 0$$

$$\Rightarrow -8m + 9 < 0 \Rightarrow 8m > 9 \Rightarrow m > \frac{9}{8}$$

بین مقادیر به دست آمده برای  $m$  باید اشتراک بگیریم. اشتراک آن‌ها  $m > \frac{9}{8}$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

جمله عمومی الگوی خطی به صورت  $a_n = bn + c$  است، یعنی ضریب  $n^2$  باید صفر باشد:

$$a_n = (n + 1)^2 + k(n - 2)^2 \Rightarrow a_n = n^2 + 2n + 1 + kn^2 - 4kn + 4k$$

$$\Rightarrow a_n = \underbrace{(1 + k)}_{\text{صفر}} n^2 + (2 - 4k)n + 4k + 1$$

ضریب  $n^2$  صفر است:

$$1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$$

با جایگذاری  $k = -1$ ، جمله عمومی به صورت  $a_n = 6n - 3$  درمی‌آید. جای  $a_n$ ، عدد ۱۶۵ را قرار می‌دهیم:

$$165 = 6n - 3 \Rightarrow 6n = 168 \Rightarrow n = 28$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

جملات مشترک دو دنباله حسابی تشکیل یک دنباله حسابی جدید می‌دهند که جمله اول آن اولین جمله مشترک دو دنباله و قدر نسبت آن ک.م.م. قدر نسبت‌های دو دنباله است؛ بنابراین داریم:

$$a_n : ۲, ۵, ۸, ۱۱, \underline{۱۴}, ۱۷, \dots$$

$$b_n : -۱, ۴, ۹, \underline{۱۴}, ۱۹, \dots$$

اولین جمله مشترک دو دنباله ۱۴ است. قدر نسبت دنباله مشترک‌ساز  $c_n$  هم برابر با  $d = ۳ \times ۵ = ۱۵$  است. پس جمله عمومی دنباله  $c_n$  عبارت است از:

$$c_n = c_1 + (n-1)d = ۱۴ + ۱۵(n-1) = ۱۵n - ۱$$

حال باید ببینیم دنباله مشترک‌ساز  $c_n$  چند جمله سه رقمی دارد؛ یعنی چند جمله بزرگ‌تر از ۹۹ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ دارد:

$$۱۰۰ \leq c_n < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \leq ۱۵n - ۱ < ۱۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۱ \leq ۱۵n < ۱۰۰۱ \Rightarrow \frac{۱۰۱}{۱۵} \leq n < \frac{۱۰۰۱}{۱۵}$$

$$\Rightarrow ۶/... \leq n \leq ۶۶/... \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} ۷ \leq n \leq ۶۶$$

به ازای  $۷ \leq n \leq ۶۶$ ، یعنی جملات  $c_۷$  تا  $c_{۶۶}$  جملات دنباله مشترک‌ساز، سه رقمی خواهند بود که تعداد این جملات  $۶۰ = ۶۶ - ۷ + ۱$  است.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر جمله اول و قدر نسبت دنباله حسابی را  $a_1$  و  $d$  در نظر بگیریم، داریم:

$$a_۲ \cdot a_{۱۴} = a_۵^۲ \Rightarrow (a_1 + d)(a_1 + ۱۳d) = (a_1 + ۴d)^۲$$

$$\Rightarrow a_1^۲ + ۱۴a_1d + ۱۳d^۲ = a_1^۲ + ۱۶d^۲ + ۸a_1d \Rightarrow ۳d^۲ = ۶a_1d$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{d}{۲} \xrightarrow{a_۱=۱۹} a_1 + ۹d = ۱۹ \Rightarrow \frac{۱۹d}{۲} = ۱۹ \Rightarrow d = ۲ \Rightarrow a_1 = ۱$$

$$\Rightarrow \text{جمله اول دنباله هندسی} : t_1 = a_۲ = a_1 + d = ۱ + ۲ = ۳$$

می‌دانیم اگر جملات  $a_m, a_n$  و  $a_p$  از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند در این صورت قدر نسبت دنباله هندسی برابر با  $\frac{p-n}{n-m}$  است. لذا چون  $a_۲, a_۵$  و  $a_{۱۴}$  سه جمله متوالی دنباله هندسی ما هستند، داریم:

$$q = \frac{۱۴-۵}{۵-۲} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

$$\Rightarrow \text{جمله پنجم دنباله هندسی} : t_۱ \times q^۴ = ۳ \times ۳^۴ = ۳^۵ = ۲۴۳$$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

باید بتوانیم به جای  $\sqrt{48} + 7$ ، یک عبارت مربع کامل قرار دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{7 + \sqrt{48}} - \sqrt{3} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 \\ \Rightarrow A^2 &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

سعی می‌کنیم الگوی تعداد خانه‌های سفید و سیاه را پیدا کنیم:

شماره مرحله	۱	۲	۳	۴
تعداد خانه‌های سفید	۲	۶	۱۲	۲۰
تعداد خانه‌های سیاه	۴	۶	۸	۱۰

همان‌طور که می‌بینیم در مورد الگوی تعداد خانه‌های سیاه، با یک الگوی خطی مواجه هستیم که محاسبه آن کار ساده‌ای است و به الگوی  $a_n = 2n + 2$  می‌رسیم. اما در مورد الگوی تعداد خانه‌های سفید با توجه به اینکه اختلاف تعداد هر دو مرحله متوالی تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند، می‌توان دریافت که به یک الگوی درجه دوم برخورد می‌کنیم. اما برای به دست آوردن

رابطه این الگو، کافی است کمی دقت کنیم:  $2 = 1 \times 2$ ،  $6 = 2 \times 3$ ،  $12 = 3 \times 4$  و ... بنابراین الگوی تعداد خانه‌های سفید  $b_n = n(n + 1)$  است. باید ببینیم در چه مرحله‌ای (به ازای کدام  $n$ ) تعداد خانه‌های سفید  $380$  تا است و بعد تعداد خانه‌های سیاه را از رابطه  $a_n = 2n + 2$  محاسبه کنیم:

$$b_n = n(n + 1) = 380 \Rightarrow n(n + 1) = 19 \times 20 \Rightarrow n = 19 \Rightarrow a_{19} = 2(19) + 2 = 40$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

نکته: دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = r \cdot a_n$  یک دنباله هندسی با قدر نسبت  $r$  است.

نکته: دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = a_n + d$  یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $d$  است.

پس دنباله  $a_{n+1} = 2a_n$  یک دنباله هندسی با  $a_1 = 3$  و  $r = 2$  است، جمله ششم آن را حساب می‌کنیم:

$$a_6 = a_1 r^5 = 3 \times 2^5 = 96$$

دنباله  $b_{n+1} = b_n + 7$  هم یک دنباله حسابی با  $b_1 = -2$  و  $d = 7$  است. جمله عمومی آن را می‌نویسیم و مساوی ۹۶ قرار می‌دهیم:

$$b_n = b_1 + (n - 1) d \Rightarrow 96 = -2 + (n - 1) (7)$$

$$\Rightarrow 98 = 7(n - 1) \Rightarrow 14 = n - 1 \Rightarrow n = 15$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

روش اول: ضابطه‌های داده‌شده را به صورت مربع کامل تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(۱) y = x^2 + x \xrightarrow{\text{اضافه و کم کردن } \frac{1}{4}} y = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$(۲) y = x^2 - 4x \xrightarrow{\text{اضافه و کم کردن } 4} y = x^2 - 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x - 2)^2 - 4$$

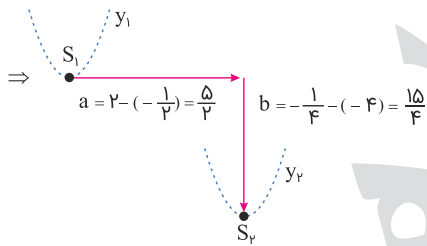
پس برای تبدیل ضابطه تابع (۱) به ضابطه تابع (۲)، ابتدا باید تابع را  $2 - (-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$  به راست و  $-\frac{1}{4} - (-4) = \frac{15}{4}$  پایین ببریم، پس داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{5}{2} + 2\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{5}{2} + \frac{15}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

روش دوم: اگر نخواهیم ضابطه دو تابع را به صورت مربع کامل تبدیل کنیم، کافی است مختصات رأس این دو تابع درجه دوم را به دست آورده و مقدار انتقال افقی و عمودی خواسته‌شده را مشخص نماییم. داریم:

$$(۱) y = x^2 + x \Rightarrow S_1 \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

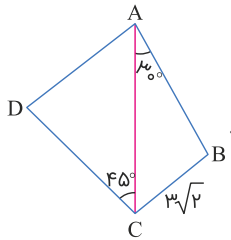
$$(۲) y = x^2 - 4x \Rightarrow S_2 \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

دو مثلث  $ABC$  و  $ACD$ ، یک ضلع مشترک دارند که روبه‌رو به دو زاویهٔ مکمل چهار ضلعی است. بنابراین قضیهٔ سینوس‌ها را در این دو مثلث نوشته و طرفین رابطه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$(\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \sin \hat{B} = \sin \hat{D})$$



$$\begin{cases} \triangle ABC : \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin 30^\circ} \\ \triangle ACD : \frac{AC}{\sin \hat{D}} = \frac{AD}{\sin 45^\circ} \end{cases} \xrightarrow[\sin \hat{B} = \sin \hat{D}]{\div} 1 = \frac{BC \cdot \sin 45^\circ}{AD \cdot \sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow BC \cdot \sin 45^\circ = AD \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = AD \times \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 6$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

میانگین ریشه‌ها در تابع درجهٔ دو، برابر با طول رأس سهمی است. از طرف دیگر کمترین مقدار تابع درجهٔ دو همان عرض رأس سهمی است. پس منظور از برابری این دو مقدار باهم، در واقع برابری طول و عرض رأس سهمی است. کمترین مقدار سهمی زمانی اتفاق می‌افتد که ضریب  $x^2$  بزرگ‌تر از صفر باشد. ( $m > 0$ )

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{\lambda}{2(m)} = \frac{4}{m}$$

$$y_{\text{رأس}} = f\left(\frac{4}{m}\right) = m\left(\frac{4}{m}\right)^2 - \lambda\left(\frac{4}{m}\right) + m + \lambda = \frac{16}{m} - \frac{32}{m} + m + \lambda = \frac{-16}{m} + m + \lambda$$

$$x_{\text{رأس}} = y_{\text{رأس}} \Rightarrow \frac{4}{m} = \frac{-16}{m} + m + \lambda \Rightarrow \frac{20}{m} = m + \lambda$$

با ضرب طرفین معادله در  $m$  داریم:

$$20 = m^2 + \lambda m \Rightarrow m^2 + \lambda m - 20 = 0 \Rightarrow m = 2, -10$$

$m = -10$  غیرقابل قبول است.

به ازای  $m = 2$ ، تابع به صورت  $y = 2x^2 - \lambda x + 10$  درمی‌آید و محور تقارن آن که همان خط قائم گذرنده از رأس سهمی است، به صورت  $x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{\lambda}{4} = 2$  خواهد بود و عرض تلاقی آن با نمودار تابع  $y = 3x^2 + 2x - 1$  برابر است با:

$$3(2)^2 + 2(2) - 1 = 15$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی دهم

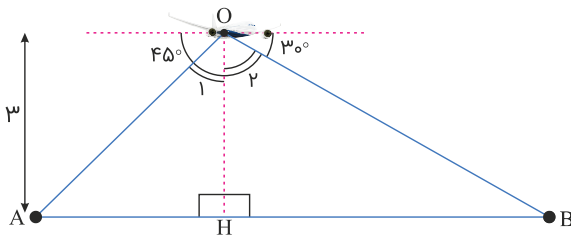


ضابطه تابع ثابت باید به فرم  $f(x) = c$  باشد؛ بنابراین ضریب هر عبارت  $x$  دار در ضابطه  $f$  را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + 6)(x + b) - 3x^2 = ax^2 + abx + 6x + 6b - 3x^2 \\ \Rightarrow f(x) &= (a - 3)x^2 + (ab + 6)x + 6b \\ \Rightarrow a - 3 &= 0, ab + 6 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -2 \Rightarrow a + b = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم انسانی یازدهم  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

به شکل زیر دقت کنید.



واضح است که:  $\widehat{O}_1 = 45^\circ$  و  $\widehat{O}_2 = 60^\circ$ .  
حالا در مثل OAH داریم:

$$\tan \widehat{O}_1 = \frac{AH}{OH} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = 3$$

به طریق مشابه در مثل OBH داریم:

$$\tan \widehat{O}_2 = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$$

پس:

$$\text{فاصله بین دو جزیره} = AB = AH + BH = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \simeq 3(2/7) = 8/1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر بخواهیم یک کلمه ۴ حرفی بنویسیم، دو حالت رخ می‌دهد.  
حالت اول: حرف تکراری در کلمه ۴ حرفی وجود ندارد. بنابراین باید با جابجایی حروف o, l, i, e, یک کلمه ۴ حرفی بنویسیم (بدون تکرار حروف). داریم:

$$\frac{5}{\text{حرف اول}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم}} \times \frac{3}{\text{حرف سوم}} \times \frac{2}{\text{حرف چهارم}} = 120$$

حالت دوم: دو حرف تکراری n در کلمه وجود دارد. بنابراین باید ۲ حرف از بین حروف دیگر e, i, l, o انتخاب کرده و به همراه ۲ حرف n، یک کلمه ۴ حرفی بنویسیم. داریم:

$$\binom{4}{2} \times \frac{4!}{2!} = 6 \times 12 = 72$$

$\downarrow$  انتخاب ۲ حرف دیگر  
 $\downarrow$  جایگشت nها

بنابراین تعداد کلمات ۴ حرفی که می‌توانیم با حروف online بنویسیم برابر است با:

$$120 + 72 = 192$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

برای آنکه دقیقاً ۲ عضو از بین اعضای ۱، ۲ و ۳ در زیرمجموعه باشد، سه حالت برای عضوهای ۱، ۲ و ۳ رخ می‌دهد (۱ و ۲ یا ۱ و ۳ و ۲ یا ۲ و ۳ در زیرمجموعه ما هستند). از طرفی دیگر اعضای ۴، ۵ و ۶ هم هرکدام ۲ حالت دارند. می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس داریم:

$$\frac{3}{\text{حالت } 3, 2, 1} \times \frac{2}{\text{حالت } 4} \times \frac{2}{\text{حالت } 5} \times \frac{2}{\text{حالت } 6} = 24$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$\begin{aligned} 4(\sin^6 x - \sin^2 x)(\tan x + \cot x) &= 1 \\ \Rightarrow 4\sin^2 x(\sin^4 x - 1)\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) &= 1 \\ \Rightarrow 4\sin^2 x(-\cos^2 x)\left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right) &= 1 \\ \Rightarrow -4\sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x &= \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

عبارت خواسته شده را مساوی A قرار می‌دهیم و  $A^2$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A &= |\sin x - \cos x| \Rightarrow A^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2\sin x \cos x}_{\frac{-1}{2}} \\ \Rightarrow A^2 &= \frac{3}{2} \xrightarrow{A > 0} A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow n(A) = 6 \\ B &= \{(2, 1), (3, 2), (3, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1), \dots\} \Rightarrow n(B) = 15 \\ A \cap B &= \{(4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{15}{36} - \frac{3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

تالیفی آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - محمد مصطفی ابراهیمی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

اعداد دورقمی حاصل باید به صورت  $a_n = 3n + 2$  باشند.

$$100 \leq 3n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 3n \leq 997 \Rightarrow 32/6 \leq n \leq 332/3$$

چون  $n$  عددی طبیعی است، پس:

$$n = 33, 34, \dots, 332 \Rightarrow \text{تعداد} : 332 - 33 + 1 = 300$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

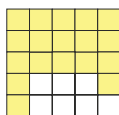
در هر شکل تعداد مربع‌های رنگی را می‌نویسیم:



$$(1 \times 2) + 2 + 1$$



$$(2 \times 3) + 2 + 1$$



$$(3 \times 4) + 2 + 1$$

... شکل  $a_n = n(n+2) + 2 + 1 = n^2 + 2n + 3$

تعداد کل مربع‌ها در شکل  $n$ ام،  $(n+2)^2$  است، پس تعداد مربع‌های سفید در شکل  $n$ ام برابر است با:

$$b_n = \text{کل} - a_n = (n+2)^2 - (n^2 + 2n + 3) = 2n + 1$$

تفاضل دو دنباله بالا را حساب می‌کنیم:

$$c_n = a_n - b_n = (n^2 + 2n + 3) - (2n + 1) = n^2 + 2$$

$n^2 + 2$  را برابر با ۱۲۳ قرار می‌دهیم:

$$n^2 + 2 = 123 \Rightarrow n^2 = 121 \Rightarrow n = 11$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

می‌دانیم  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  است، پس داریم:

$$1 + \tan^2 x + \tan^2 x - (1 + \tan^2 x)^2 \\ = 1 + \tan^2 x + \tan^2 x - (1 + \tan^2 x + 2\tan^2 x) = -\tan^2 x$$

تذکر: دانش آموزان عزیز، به صورت‌های دیگری نیز می‌توانند حاصل عبارت داده‌شده را مشخص نمایند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

فرض کنیم:  $\sqrt[3]{a} = x$  و  $\sqrt[3]{a-3} = y$ . در این صورت  $\sqrt[3]{a^2} = x^2$  و  $\sqrt[3]{a^2-3a} = xy$  و  $\sqrt[3]{a^2-6a+9} = y^2$  بنابراین داریم:

$$x^2 + xy + y^2 = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2-3a} + \sqrt[3]{a^2-6a+9}, \quad x - y = \frac{3}{4}$$

با دیدن دو عبارت  $x - y$  و  $x^2 + xy + y^2$  باید بلافاصله یاد اتحاد چاق و لاغر افتاد. با استفاده از این اتحاد داریم:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

$$\frac{x^3 - y^3 = a - (a-3) = 3}{x - y = \frac{3}{4}} \rightarrow \frac{3}{\frac{3}{4}} (x^2 + xy + y^2) = 3$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2-3a} + \sqrt[3]{a^2-6a+9} = 4$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

ضابطه سهمی را بزرگتر از ضابطه خط قرار می‌دهیم:

$$f(x) > y \text{ خط}$$

$$(x - 1)^2 + 3 > kx - 2k \Rightarrow x^2 + (-2 - k)x + 4 + 2k > 0$$

برای آنکه نامعادله بالا، همواره برقرار باشد، باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

$$1) x^2 > 0 \text{ ضرب ۱)}$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 16 - 8k < 0 \Rightarrow k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$\Rightarrow (k - 6)(k + 2) < 0 \Rightarrow -2 < k < 6$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

$$a_2 + a_3 = 6 \Rightarrow a_1q + a_1q^2 = 6 \Rightarrow a_1q(1+q) = 6 \quad (I)$$

$$a_3 + a_4 = 18 \Rightarrow a_1q^2 + a_1q^3 = 18 \Rightarrow a_1q^2(1+q) = 18 \quad (II)$$

حالا (II) را بر (I) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{II}{I} = \frac{a_1q^2(1+q)}{a_1q(1+q)} = \frac{18}{6} \Rightarrow q = 3$$

با جایگذاری  $q$  در رابطه اول، داریم:

$$a_1q(1+q) = 6 \xrightarrow{q=3} a_1(3)(4) = 6 \Rightarrow a_1 = 0.5$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم انسانی دوازدهم

باتوجه به شکل، عرض از مبدأ سهمی،  $y = -3$  است. پس واضح است که:

$$c - 2 = -3 \Rightarrow c = -1$$

از طرفی طول نقطه رأس سهمی،  $x = \frac{1}{2}$  است، پس:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(b-1)}{2(2a-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow -b+1 = 2a-1 \Rightarrow 2a+b=2$$

طرفین تساوی اخیر را بر ۸ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2a}{8} + \frac{b}{8} = \frac{2}{8} \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{8}\right) - \frac{3c}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

میزان بارندگی: مثلاً ۱۰ میلی‌لیتر کمی پیوسته  
شدت بارندگی: زیاد، متوسط، کم کیفی ترتیبی  
نوع بارندگی: باران، برف و ... کیفی اسمی

هدف از طرح این تست، این بود که در تست‌های مربوط به انواع متغیرهای آماری، به تمام کلمات توجه کنید! در این تست با سه متغیر آماری مختلف مواجه‌ایم که همه آن‌ها به صورت "..... بارندگی" مطرح شده و کلمه بارندگی در همه آن‌ها مشترک است و این کلمه قبل از کلمه بارندگی است که نوع متغیر را مشخص می‌کند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر علوم انسانی دهم

سه حالت ممکن است وجود داشته باشد:

حالت اول:  $a = 2a - 1 = -1$  که غیرممکن است.

حالت دوم:  $a = 0$  که در نتیجه  $a = 0$  پس:  $[-1, 5) \cap [0, 6) = [-1, 5)$  که تساوی فوق درست نیست.

حالت سوم:  $a = 2a - 1 = a$  که در نتیجه  $a = 1$  و  $[-1, 5) \cap [1, 6) = [1, 5)$  که تساوی فوق درست است؛ بنابراین بازه  $[-a, a]$  با بازه  $[-1, 1]$  برابر و شامل سه عدد صحیح است.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تعداد اضلاع و تعداد رئوس از دو الگوی زیر پیروی می‌کنند:

شماره مرحله	۱	۲	۳	...
تعداد اضلاع	۳	۷	۱۱	...
تعداد رئوس	۳	۵	۷	...

حال باید دید که در کدام مرحله (به ازای کدام  $n$ ) رابطه  $4n - 1 = 99$  برقرار است؛ که به وضوح به  $n = 25$  می‌رسیم. تعداد رئوس در مرحله ۲۵م برابر با  $2n + 1 = 51$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی دهم

طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= 7t_2 \Rightarrow x + xq + xq^2 = 7xq \\ \Rightarrow x(1 + q^2) &= 6xq \Rightarrow q^2 - 6q + 1 = 0 \\ \Rightarrow q &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

چون دنباله نزولی است، پس حتماً  $q < 1$ ، پس  $q = 3 - 2\sqrt{2}$ .

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

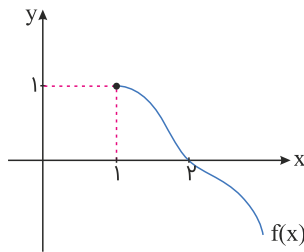
تستر علوم انسانی دوازدهم

تستر علوم تجربی دهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱

اگر نمودار  $f(x)$  به شکل زیر باشد، در این صورت دامنه تابع  $y = \frac{f^{-1}(x)}{f(x+1)}$  کدام است؟



(۱)  $[0, 1)$

(۲)  $[0, 1]$

(۳)  $[1, +\infty)$

(۴)  $[0, +\infty) - \{1\}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۲

بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  که  $b < c$ ، دو زیرمجموعه از بازه  $[0, 2\pi]$  هستند. اگر به ازای هر  $x$  از این بازه‌ها داشته باشیم  $\sin x + \cos x > 0$  و  $\tan x - \cot x > 0$ ، کمترین مقدار  $c - b$  کدام است؟

(۲)  $\frac{5\pi}{4}$

(۱)  $\frac{\pi}{4}$

(۴)  $\frac{5\pi}{8}$

(۳)  $\frac{\pi}{8}$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۳

نمودار تابع  $y = [x^2]$  در بازه  $(-1, 2)$  شامل  $n$  پاره‌خط بوده که طول بزرگ‌ترین پاره‌خط برابر  $l$  می‌باشد. دوتایی مرتب  $(l, n)$  کدام است؟

(۲)  $(2, 4)$

(۱)  $(2, 3)$

(۴)  $(1, 3)$

(۳)  $(1, 4)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴

تعداد صفرهای تابع  $f(x) = (x^2 + 3x + 3)^2 + x^2 + 3x + 1$  کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

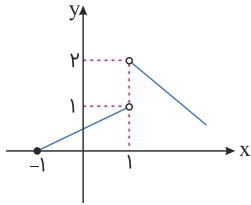
(۴) ۴

(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

شکل زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  است. به ازای چه مقداری از  $a$  تابع  $g(x) = \begin{cases} \frac{[-x] + f(x)}{2x} & ; x > 1 \\ [f(x)] + a & ; x < 1 \\ b & ; x = 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته

است؟



(۱) صفر

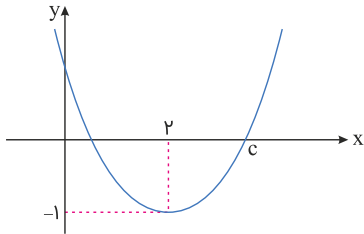
(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) تابع نمی‌تواند در  $x = 1$  پیوسته باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نمودار تابع  $y = ax^2 + bx + 1$  به صورت زیر است.  $c$  کدام است؟



(۱)  $1 + \sqrt{2}$

(۲)  $4 - \sqrt{2}$

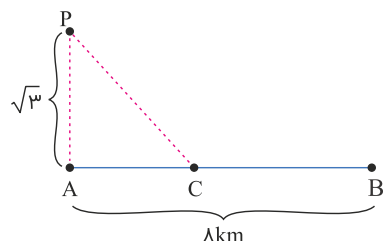
(۳)  $2 + \sqrt{2}$

(۴)  $3 + \sqrt{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

7

مطابق شکل، فردی درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک‌ترین نقطه ساحل یعنی A،  $\sqrt{3}$  کیلومتر است. این فرد می‌خواهد به نقطه B برود و برای این منظور، ابتدا با قایق و سرعت  $3 \text{ km/h}$  به سمت نقطه C از ساحل می‌رود و سپس از C به B با سرعت  $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  پیاده‌روی می‌کند. اگر زمان رسیدن این فرد از P به A برابر با ۹۰ دقیقه باشد، او در چند کیلومتری نقطه B از قایق پیاده شده است؟ ( $\sqrt{3840} \approx 62$ )



(۱)  $\sqrt{3}$

(۲) ۴

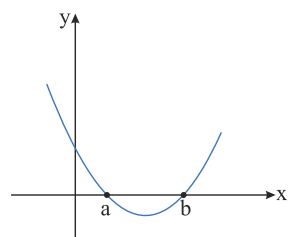
(۳)  $5/2$

(۴)  $15/2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

8

نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 3ax + c$  به صورت زیر است. کدام گزینه در مورد c لزوماً درست است؟ ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ )



(۱) بزرگ‌تر از a است.

(۲) کوچک‌تر از b است.

(۳) زوج است.

(۴) بر ۳ بخش‌پذیر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

9

اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{5x + 3}{mx^2 + (m-2)x - (m+m^2)}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{\pm a\}$  باشد، کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

10

به ازای کدام مقادیر k، سهمی  $y = (k-2)x^2 - kx - k + 3$  محور xها را در دو نقطه با طول‌های نامنفی قطع می‌کند؟

(۲)  $k > 0$

(۱)  $2 < k \leq 3$

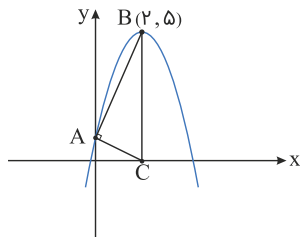
(۴)  $|k| > 2$

(۳)  $2 < |k| \leq 3$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۱

شکل زیر نمودار تابع درجه دوم  $f$  است. اگر مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائمه باشد، حاصل  $f(5)$  کدام می تواند باشد؟ (B رأس سهمی است)

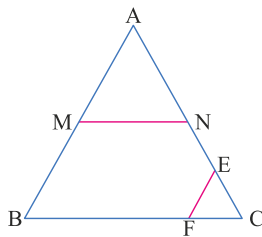


- (۱)  $-5$
- (۲)  $-4$
- (۳)  $-3$
- (۴)  $-2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۲

در شکل زیر  $MN \parallel BC$ ، از نقطه  $E$  وسط  $NC$  خط  $EF$  را موازی  $AB$  رسم می کنیم. اگر  $\frac{EF}{AB} = \frac{1}{4}$ ، آنگاه حاصل  $\frac{MN}{BC}$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{3}$
- (۲)  $\frac{1}{2}$
- (۳)  $\frac{1}{6}$
- (۴)  $\frac{1}{5}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۳

اگر  $f^{-1} = \{(-3, 4), (2, 5), (7, -3)\}$  و  $g(x) = x^2 + 2$  ( $x \leq 0$ )، در صورتی که  $g^{-1}(11) = f(2a - 5)$  باشد،  $a$  کدام است؟

- (۱)  $1/5$
- (۲)  $3$
- (۳)  $4/5$
- (۴)  $6$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴

تابع  $f(x)$  کدام باشد تا تابع  $y = [x + 1]f(x)$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته شود؟

- (۱)  $\sin \pi x$
- (۲)  $\cos \pi x$
- (۳)  $\sin \frac{\pi x}{2}$
- (۴)  $\cos \frac{\pi x}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۵ اگر توابع  $f(x) = \sqrt{2x+a} + \sqrt{-3x+b}$  و  $g(x) = \sqrt{x(2-x)} - 1$  با هم برابر باشند، مقدار  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) ۵  
(۴) -۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۶ باتوجه به معادلات لگاریتمی  $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y^2 = 2 \\ \log_2(x+y) = 3 \end{cases}$  حاصل  $|x-y|$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲)  $2\sqrt{7}$   
(۳)  $7\sqrt{2}$   
(۴) ۷

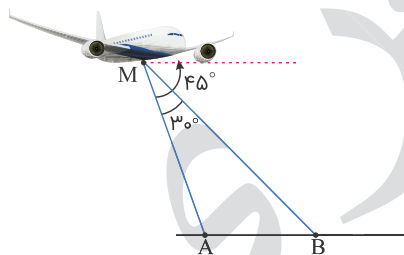
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۷ اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، حاصل  $\sqrt{(2\cos^2 x - \cot x)} \sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$   
(۲)  $\frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$   
(۳)  $\sin x - \cos x$   
(۴)  $\cos x - \sin x$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۸ مطابق شکل، یک هواپیما بر فراز یک منطقه پرواز می‌کند. از نقطه  $M$  دو هدف  $A$  و  $B$  به فاصله ۴ کیلومتر روی زمین به زاویه  $30^\circ$  از هواپیما دیده می‌شوند و زاویه مسیر افقی هواپیما با  $MA$  نیز  $45^\circ$  است. هواپیما در چه ارتفاعی از زمین برحسب کیلومتر واقع است؟



- (۱)  $2(\sqrt{3} + 1)$   
(۲)  $2(\sqrt{3} - 1)$   
(۳)  $2\sqrt{3}$   
(۴)  $2(\sqrt{2} + 1)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

اگر میانگین و میانه داده‌های آماری  $b, 10, 18, 7, a, 6$  به ترتیب برابر با  $10$  و  $9$  باشند،  $a.b$  کدام است؟

(۲) ۸۴

(۱) ۷۸

(۴) ۹۰

(۳) ۸۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم انسانی دهم

کدام یک از گزینه‌های زیر، معرف یک تابع گویا نیست؟

(۲)  $y = \frac{2x}{\sqrt[3]{7x^3 + 1}}$

(۱)  $y = \frac{4x + 1}{2x - 3}$

(۴)  $y = 3$

(۳)  $y = \frac{5x + 1}{\sqrt{7x + 2}}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نمودار تابع  $f(x) = \frac{a}{2bx+1}$  نمودار تابع  $y = \frac{17x+14}{4x}$  را در نقاطی به طول  $-1$  و  $2$  قطع می‌کند. نمودار تابع  $f^{-1}$  از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

(۲)  $(-2, 3)$

(۱)  $(-1, 3)$

(۴)  $(3, 1)$

(۳)  $(1, 3)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

احتمال فروش میوه‌های مرغوب در یک میوه‌فروشی  $\frac{1}{3}$  و همین احتمال برای میوه‌های متوسط  $\frac{1}{4}$  است. اگر میوه‌های مرغوب فروش روند، احتمال فروش میوه‌های متوسط  $\frac{1}{3}$  افزایش می‌یابد. احتمال اینکه هیچ‌یک از این دو نوع میوه به فروش نرود، کدام است؟

(۲)  $\frac{5}{12}$

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۴)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{7}{12}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در یک دوزنقه، قاعده بزرگ سه برابر قاعده کوچک است. پاره‌خطی موازی با قاعده‌ها و محدود به ساق‌ها توسط قطر‌ها به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. این پاره‌خط ساق‌ها را به چه نسبتی می‌تواند تقسیم می‌کند؟

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

مجموعه جواب معادله  $(x + \sqrt{x})^2 - 5x = 5\sqrt{x} - 6$  شامل چند عدد صحیح است؟

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر  $x \neq [x]$  باشد، برد تابع  $f(x) = 3x^2 - 3[x^2]$  شامل چند مقدار صحیح است؟

$$۲ \quad (۲)$$

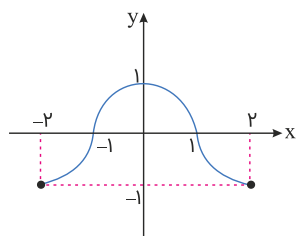
$$۱ \quad (۱)$$

$$\text{بی‌شمار} \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

نمودار تابع  $f(x)$  رسم شده است. مساحت ناحیه محدود بین نمودار تابع  $f([x])$  و محور  $x$ ‌ها کدام است؟



$$۱ \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۴)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

با کدامیک از انتقال‌های افقی زیر، می‌توان نمودار تابع  $f(x) = 4^{x+1}$  را بر نمودار تابع  $g(x) = \frac{1}{8}(4^x)$  منطبق کرد؟

$$۲/۵ \text{ واحد به چپ} \quad (۲)$$

$$۲/۵ \text{ واحد به راست} \quad (۱)$$

$$۵ \text{ واحد به چپ} \quad (۴)$$

$$۵ \text{ واحد به راست} \quad (۳)$$

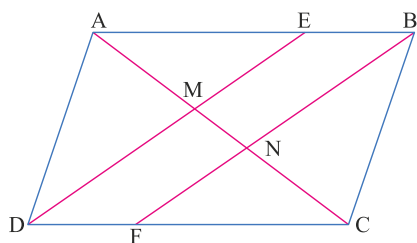
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۲۸ معادله  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$  چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی‌شمار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۲۹ چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. اگر  $AB = 12$  و  $BE = DF = 3$  باشند، مقدار  $\frac{NM}{AM}$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{5}$   
(۲)  $\frac{1}{4}$   
(۳)  $\frac{1}{3}$   
(۴)  $\frac{1}{6}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۳۰ شعاع دایره‌ای که از دو نقطه  $(1, 2)$  و  $(3, 0)$  گذشته و مرکز آن روی خط  $y = 2x - 1$  قرار دارد، چقدر است؟

- (۱)  $\sqrt{8}$   
(۲) ۳  
(۳)  $\sqrt{10}$   
(۴)  $2\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۳۱ اگر دو خط به معادلات  $ax - y - 8 = 0$  و  $y - x + 4 = 0$  روی نیمساز ربع دوم و چهارم متقاطع باشند، مقدار  $a$  چقدر است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم

در یک مستطیل با طول و عرض  $2\sqrt{6}$  و  $2\sqrt{3}$ ، فاصله هر رأس از قطر مستطیل کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$   
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴)  $2\sqrt{2}$

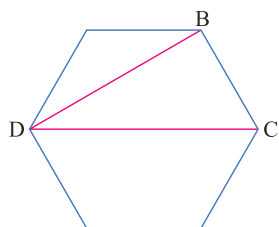
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

به ازای کدام مقدار از  $a$  توابع  $f(x) = \frac{-1}{[x] + [-x]}$  و  $g(x) = \tan ax \times \cot ax$  با هم برابرند؟

- (۱) ۱  
 (۲)  $\frac{\pi}{2}$   
 (۳) ۲  
 (۴)  $\pi$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در شش ضلعی منتظم زیر، قطرهای  $BD$  و  $CD$  رسم شده‌اند. اگر ارتفاع وارد بر ضلع  $CD$  از مثلث  $BCD$  را رسم کنیم، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع  $BC$  و  $BD$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 (۳)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$   
 (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر هریک از ریشه‌های معادله  $x^2 - ax + a - 4 = 0$ ، نصف هریک از ریشه‌های معادله  $x^2 - bx - 2x - b = 0$  باشند، حاصل  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۲  
 (۲) ۵  
 (۳) ۱  
 (۴) -۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

زاویه بین عقربه های ساعت ۱۸' : ۷ چند رادیان است؟

۳۶

$$\frac{3\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{19\pi}{30} \quad (۴)$$

$$\frac{7\pi}{12} \quad (۱)$$

$$\frac{37\pi}{60} \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

توابع  $f(x) = 2x^2 - x + 3$  و  $g(x) = -x^2 + m$  در ۲ نقطه به اختلاف طولهای  $\frac{1}{3}$  باهم برخورد می‌کنند.  $m$  کدام است؟

۳۷

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر  $f = \{(-1, 0), (1, 2), (3, -1), (4, 3)\}$  و ضابطه تابع  $g$  به صورت  $g(x) = x^2 - 2x$  باشد. در این صورت، حاصل ضرب عضوهای برد تابع  $\frac{g-1}{f+1}$  کدام است؟

۳۸

$$-\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (۴)$$

$$۱ \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مقدار عددی  $\sin(510^\circ) \cos(660^\circ) + \sin \frac{11\pi}{3} \cos \frac{17\pi}{6}$  کدام است؟

۳۹

$$\text{صفر} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

معادله  $\log_{5-x}(x-1) + \log_{5-x}(x+2) = \log_{5-x} 4$  چند جواب دارد؟

۴۰

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۱ تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 3 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$  روی بازه  $\{-0\} - [3, -3]$  در چند نقطه از دامنه‌اش حد ندارد؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) بی‌شمار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۲ میانه داده‌های آماری متمایز، میانگین داده‌های پنجم و ششم است. اگر مجموع داده‌های قبل و بعد از میانه برابر با ۴۰۰ باشد، میانگین کل داده‌ها کدام است؟

- (۱) ۲۰  
(۲) ۳۰  
(۳) ۴۰  
(۴) ۵۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۳ معادله لگاریتمی  $\log_{x^2+3x} x = 1 - \log_x(x+3)$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۴ میانگین و واریانس داده‌های  $5, a, a+3, a+1$  و  $a-1$  برابرند. واریانس داده‌های  $5a, 4a, 3a, 2a$  و  $a$  کدام است؟

- (۱)  $12/25$   
(۲)  $11/25$   
(۳)  $24/5$   
(۴)  $22/5$

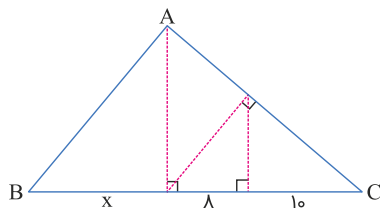
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۵ فردی با سرعت ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند. هم‌زمان فرد دیگری از نقطه C واقع در ۵۰ کیلومتری نقطه A (نزدیک‌تر به نقطه B) با سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت به سمت نقطه B حرکت می‌کند و یک ساعت دیرتر از نفر اول به مقصد می‌رسد. فاصله A تا B چند کیلومتر است؟

- (۱) ۳۸۰  
(۲) ۳۹۰  
(۳) ۴۰۰  
(۴) ۴۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در شکل زیر، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. مقدار  $x$  کدام است؟



(۱)  $12/4$

(۲)  $14/4$

(۳)  $15/6$

(۴)  $19/6$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دهم

اگر  $x^m = y^3$  آنگاه ..... .

در جای خالی چه تعداد از گزاره‌های زیر می‌توانند قرار بگیرند تا یک قضیهٔ دوشرطی حاصل شود؟

الف)  $x^2 = y^2$

ب)  $x^3 z = y^3 z$

پ)  $\sqrt{x} = \sqrt{y}$

ت)  $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$

ث)  $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$

ج)  $\cos x = \cos y$

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۵

(۳) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی یازدهم

دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{(2^x - 1) \log x}$  شامل چند عدد طبیعی نیست؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) بی‌نهایت

(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۹

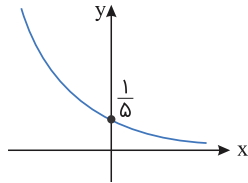
اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $4x^2 + 7x - 3 = 0$  و  $(2\alpha + 2)^2$  و  $(2\beta + 2)^2$  ریشه‌های معادله  $-2x^2 + ax + b = 0$  باشند،  $a$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲)  $6/125$   
(۳)  $12/25$   
(۴)  $24/5$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۵۰

اگر نمودار تابع  $f$  مطابق شکل زیر باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{5}{f^{-1}(x)}}$  کدام است؟



- (۱)  $(\frac{1}{5}, +\infty)$   
(۲)  $[\frac{1}{5}, +\infty)$   
(۳)  $(0, \frac{1}{5})$   
(۴)  $(0, \frac{1}{5}]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۵۱

فاصله نقطه برخورد دو تابع  $f(x) = 2^{x+2}$  و  $g(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{2x} - 3$  از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$   
(۲)  $\sqrt{3}$   
(۳)  $2$   
(۴)  $\sqrt{5}$

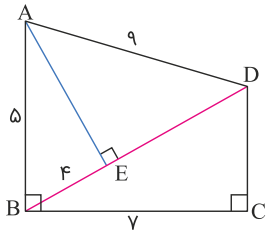
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۵۲

حاصل عبارت  $A = \cot^2(51^\circ) \tan(30^\circ) + 8 \sin^2(495^\circ) \cos(-57^\circ)$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{3}$   
(۲)  $-4\sqrt{3}$   
(۳)  $-7\sqrt{3}$   
(۴)  $-5\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم



(۱) ۲۸

(۲) ۳۶

(۳) ۳۵

(۴) ۲۰

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

معادله  $|2^{(x+2)}| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x}$  چند جواب دارد؟ **۵۴**

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

به داده‌های ۱۱ و ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۱ و  $\pi$  داده برابر اضافه کرده‌ایم و میانگین تغییری نکرده است. اگر واریانس داده‌ها ۶ واحد کاهش یافته باشد،  $\pi$  کدام است؟ **۵۵**

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

قوتی فلزی استوانه‌ای در بازی (بدون در) موجود است. مجموع ارتفاع و قطر قاعده این قوتی برابر با ۳۰ است. حداکثر فلز به کاررفته در ساخت این قوتی چندبرابر عدد  $\pi$  است؟ **۵۶**

(۱) ۱۰۰

(۲) ۳۰۰

(۳) ۴۰۰

(۴) ۶۰۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۵۷

دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{\frac{1-2[x]}{[x]+[-x]}}$  در کدام گزینه آمده است؟

- (۱)  $(\frac{1}{2}, +\infty)$   
 (۲)  $(1, +\infty)$   
 (۳)  $(-\infty, 1) - \mathbb{Z}$   
 (۴)  $(1, +\infty) - \mathbb{N}$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

۵۸

اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ ، حاصل  $\frac{\sin(3\alpha + 4\beta)}{\cos(-6\alpha - 7\beta)}$ ، کدام است؟

- (۱)  $\sin \alpha$   
 (۲)  $\cos \beta$   
 (۳) ۱  
 (۴) -۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

۵۹

اگر  $2 = \cos(x + \frac{3\pi}{4}) - \sin(x - 5\pi)$  باشد، مقدار  $\tan(x - \frac{3\pi}{4})$  کدام است؟  $(\pi < x < \frac{3\pi}{2})$

- (۱)  $\frac{2}{\sqrt{21}}$   
 (۲)  $\frac{-2}{\sqrt{21}}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{21}}{2}$   
 (۴)  $\frac{-\sqrt{21}}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۶۰

اگر  $\log_6 2 = 0/4$  باشد، مقدار  $\log_6 \sqrt{243}$  کدام خواهد بود؟

- (۱)  $1/5$   
 (۲)  $1/25$   
 (۳)  $1/45$   
 (۴)  $1/75$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

۶۱

تعداد بیماران ویزیت شده توسط یک پزشک در پنج روز هفته به صورت  $4x$ ،  $x-3$ ،  $x-1$ ،  $x+3$  و  $2x$  است. اگر میانگین و میانگین این پنج داده آماری باهم برابر باشند، چارک سوم کدام است؟

- (۱) ۴  
 (۲) ۷  
 (۳) ۸  
 (۴) ۱۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در تابع خطی  $f$ ، اگر  $f^{-1}(0) = f(0) \neq 0$  و  $f^{-1}(2) = 7$  باشد، مقدار  $f(4)$  کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۵  
(۳) ۳  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx + c}{x-1} & ; x \neq k \\ n & ; x = k \end{cases} \text{ و } f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{x-1}{1+|x|} & ; x \leq 0 \\ m + 2x - 3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

اگر دو تابع  $a - b + c - m + n - k$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

خط  $x = 3$  دو سهمی  $f$  و  $g$  را به ترتیب در نقاطی به عرض ۲ و ۴ و خط  $y = 3$  هر دو آن‌ها را در نقاطی به طول‌های ۲ و ۵ قطع می‌کند. حاصل  $(f - g)(-1)$  کدام است؟

- (۱) ۱۸  
(۲) ۲۰  
(۳) ۲۲  
(۴) ۲۴

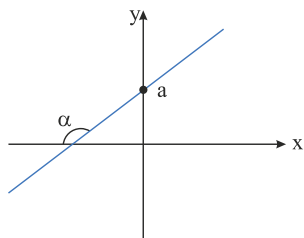
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

فاصله خانه شروین و علی ۷۲۰ متر است. یک روز که هر دو این مسیر را می‌رفتند، شروین ۱۰۰ قدم بیشتر از علی برداشت، زیرا هر قدم او ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از علی بود. طول هر قدم شروین چقدر بوده است؟

- (۱) ۷۵  
(۲) ۸۰  
(۳) ۸۵  
(۴) ۹۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم انسانی دهم

شکل زیر، نشان‌دهنده نمودار وارون تابع  $f(x) = 3x - 3$  می‌باشد. حاصل  $\tan \alpha$  کدام است؟



- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳)  $-\frac{1}{3}$
- (۴)  $\frac{1}{3}$

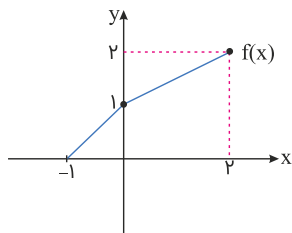
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مجموع جواب‌های معادله  $(\sqrt{x})^x = (x)^{\sqrt{x+3}}$  (x ≠ 0) کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۶
- (۴) ۷

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

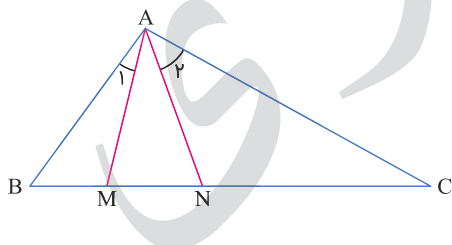
نمودار تابع f به صورت زیر است. مساحت محدود بین نمودار  $f^{-1}(x+1)$  و محور y‌ها کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) ۱/۵
- (۳) ۳
- (۴) ۳/۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در مثلث ABC، پاره‌خط‌های AM و AN را طوری رسم می‌کنیم که  $\hat{A}_1 = \hat{C}$  و  $\hat{A}_2 = \hat{B}$ ، اگر  $BM = 3$  و  $CN = 4$ ، طول پاره‌خط AM کدام است؟



- (۱)  $2\sqrt{3}$
- (۲) ۵
- (۳)  $\frac{7}{2}$
- (۴) ۷

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبازی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۷۰ نمودار وارون تابع خطی  $ax + b$ ، نمودار خود تابع را در نقطه‌ای که عرض آن دو برابر طولش است، قطع می‌کند. اگر  $a, b \in \{-1, 0, 1, 2\}$  باشند، برای  $a$  و  $b$  به ترتیب چند مقدار وجود دارد؟

- (۱) یک و چهار  
(۲) صفر و صفر  
(۳) سه و یک  
(۴) چهار و یک

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۷۱ حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $\frac{x-3}{x+3} + \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$   
(۲)  $\frac{9}{2}$   
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴) معادله فقط یک ریشه دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۷۲ نمودار توابع  $f(x) = (\sqrt{5} - 2)^{3x^2 - 3x + 4}$  و  $g(x) = (9 + 4\sqrt{5})^{\frac{x}{4}(x-1)}$  در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۷۳ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویه حاده  $30^\circ$  مفروض است. ارتفاع وارد بر وتر، وتر را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
(۴)  $\frac{1}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۷۴ میانگین و واریانس داده‌های آماری  $x, y$  و  $z$  به ترتیب برابر با ۴ و ۲ است. میانگین اعداد  $xy, yz$  و  $xz$  کدام است؟

- (۱) ۱۵  
(۲) ۲۵  
(۳) ۳۰  
(۴) ۴۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۷۵ نمودار تابع درجهٔ دوم  $f(x) = mx^2 - \lambda x + 2m - 4$  با محور  $x$ ها فقط در یک نقطه در سمت راست محور  $y$ ها مشترک می‌باشد. مجموع مقادیر ممکن برای  $m$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) -۲  
(۳) -۴  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۷۶ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $f(x) = x[-x]$  در فاصله  $[-1, 3]$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۷۷ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} ([\cot(\pi x)] \sin(\pi x) + [\cos(6\pi x)] \cos(\pi x))$  ( [ ] نماد جزء صحیح است) کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) -۱  
(۴) حد ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۷۸ اگر  $A_i = [[\sin i], i]$  باشد، آنگاه  $A_4 - A_1$  کدام است؟

- (۱)  $[-1, 0) \cup (1, 4]$   
(۲)  $[-1, 0] \cup [1, 4]$   
(۳)  $(1, 4]$   
(۴)  $\emptyset$

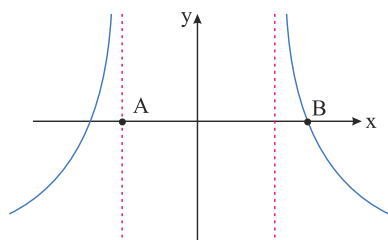
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۷۹ معادله  $5\sqrt{2x-6} + 9\sqrt{x+10} = 13$  چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

نمودار زیر متعلق به تابع  $y = \log \frac{a}{|x| - a}$  است. اگر فاصله نقطه A از B برابر ۶ باشد، a کدام است؟



- (۱)  $\frac{5}{2}$   
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴)  $\frac{3}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin^2 x + 3 \cos x}{2 \cos x + 1}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{2}$   
 (۲)  $\frac{3}{2}$   
 (۳)  $-\frac{5}{2}$   
 (۴)  $\frac{5}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر A و B دو پیشامد مستقل بوده و  $P(A) = \alpha$ ،  $P(B) = 1 - \alpha^2$  و  $P(A \cup B) = 1$  باشد؛ مجموع مقادیر پذیرفته شده برای  $\alpha$  کدام است؟

- (۱) صفر  
 (۲) ۱  
 (۳) -۱  
 (۴) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ارتفاع و میانه نظیر وتر در یک مثلث قائم الزاویه را رسم کرده‌ایم، طول تصویر میانه بر روی یکی از اضلاع قائم برابر  $\sqrt{3}$  است. اگر طول ضلع قائم دیگر این مثلث  $\sqrt{17}$  باشد، کمترین فاصله رئوس غیرقائم تا پای ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$   
 (۲)  $\frac{1}{7}$   
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴)  $\frac{3}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

اگر  $|x| < 2$  باشد،  $x^2 < 3x^2$  چند مقدار متمایز به خود می‌گیرد؟

(۲) ۱۲

(۱) ۱۱

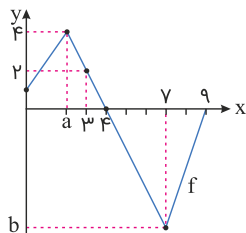
(۴) ۱۴

(۳) ۱۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{12 - 2^{x+1} - 2^{4-x}}$  مفروض است. اگر دامنه تعریف تابع  $f$  به صورت بازه  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b - a$  کدام است؟

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

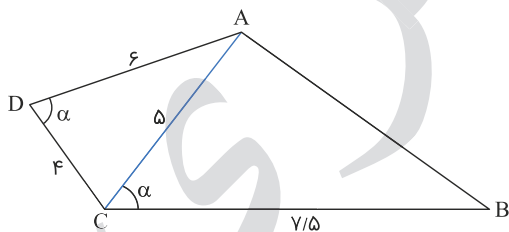
(۴)  $\frac{5}{2}$

(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی یازدهم

در شکل زیر، طول  $AB$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵/۵

(۳) ۶

(۴) ۶/۲۵

تفاضل عدد  $a$  از جذرش، برابر با ربع آن عدد است. اگر  $\sin^2 x = a$  و زاویه‌ای در ربع اول باشد، مقدار  $\cos x$  کدام است؟

- (۱)  $0/2$  (۲)  $0/4$   
(۳)  $0/6$  (۴)  $0/8$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از  $t$  ساعت از رابطه  $f(t) = 200(a^{\frac{t}{6}})$  محاسبه می‌شود. اگر پس از ۶ ساعت تعداد باکتری‌ها ۵۴۰۰ باشد، بعد از ۱۲ ساعت تعداد باکتری‌ها چقدر خواهد بود؟

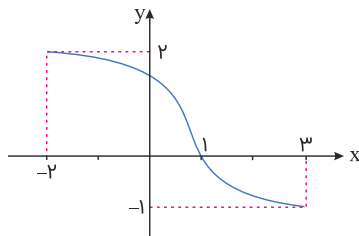
- (۱) ۱۳۱۵۰ (۲) ۱۱۳۵۰  
(۳) ۱۵۴۷۰۰ (۴) ۱۴۵۸۰۰

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

نمودار تابع  $f$  با دامنه  $[-2, 3]$  به صورت زیر است. دامنه تابع با ضابطه  $g(x) = \sqrt{\frac{(x-2)f(x)}{x-1}}$  کدام است؟



- (۱)  $[-2, 2]$   
(۲)  $[-2, 1]$   
(۳)  $[-2, 2] - \{1\}$   
(۴)  $(1, 3]$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

خط گذرنده از نقاط  $A(4, k)$  و  $B(-12, 10)$  با جهت منفی محور  $x$ ‌ها، زاویه  $\alpha$  می‌سازد. اگر  $\cos \alpha = \frac{8}{17}$  باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) -۲۰  
(۳) ۴۰ (۴) -۴۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۹۲

مجموع جواب‌های معادله  $x^2 + 2x + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = 6$  کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) ۲  
(۳) -۳  
(۴) -۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۹۳

احتمال موفقیت فردی در آزمون اول، ۳ برابر احتمال موفقیت او در آزمون دوم است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت او در آزمون دوم، ۲ برابر می‌شود. اگر احتمال موفقیت او در حداقل یکی از این دو آزمون  $\frac{5}{8}$  باشد، احتمال موفقیت او در آزمون دوم کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
(۲)  $\frac{5}{12}$   
(۳)  $\frac{1}{5}$   
(۴)  $\frac{1}{4}$  یا  $\frac{5}{12}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۹۴

رابطه بین بزرگی زلزله (M) در مقیاس ریشتر و انرژی آزادشده در آن (E) در واحد ارگ از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5M$  به دست می‌آید. با افزایش دو ریشتری قدرت زلزله، انرژی آزادشده چندبرابر می‌شود؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۱۰۰  
(۴) ۱۰۰۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

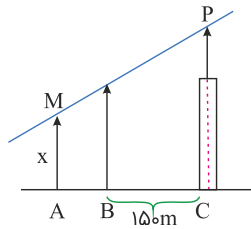
۹۵

مجموعه جواب نامعادله  $(\frac{1}{3}x + 4)(\sqrt{x} + 1) > x + x\sqrt{x}$  شامل چند عدد صحیح مضرب ۳ است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) بی‌شمار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در شکل زیر، دکل به طول  $۳x$  متر در بالای برجی به ارتفاع  $۱۰x$  متر نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع  $x$  متر، از ارتفاع دکل و تیرک  $۴x$  متری در یک راستا است. فاصله ناظر از پای برج چند متر است؟



- (۱) ۵۰
- (۲) ۱۰۰
- (۳) ۲۰۰
- (۴) ۲۵۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x = ۴ - ۲x^۲$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  ریشه‌های معادله  $۴x^۲ + kx + ۱ = ۰$  به صورت  $\frac{1}{\beta} + \alpha + ۱$  و  $\frac{1}{\alpha} + \beta + ۱$  هستند؟

- (۱) -۷
- (۲) -۹
- (۳) ۹
- (۴) ۷

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در مستطیل ABCD، معادله دو ضلع AB و BC به ترتیب به صورت  $y = x$  و  $y = ax + b$  و رأس  $D(۲, ۶)$  است. اگر مساحت مستطیل ۱۲ باشد، مقدار  $b$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴
- (۲) ۶
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نقاط  $A(۱, ۶)$  و  $B(-۱, ۷)$  و نقطه  $C$  با طول مثبت روی محور  $x$ ها، سه رأس مثلث ABC هستند. اگر طول میانه BM برابر با ۵ باشد، طول ضلع AC کدام است؟

- (۱)  $۲\sqrt{۱۰}$
- (۲)  $\sqrt{۳۷}$
- (۳)  $۳\sqrt{۵}$
- (۴)  $۲\sqrt{۱۳}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

دو کلاس داریم. میانگین نمرات و واریانس آن‌ها در کلاس اول به ترتیب ۱۶ و ۲/۵۶ و در کلاس دوم ۱۷ و ۲/۸۹ است. اگر دبیری بخواهد یکی از این دو کلاس را برای تدریس انتخاب کند، بهتر است کدام کلاس را انتخاب کند؟

- (۱) کلاس اول  
 (۲) کلاس دوم  
 (۳) فرقی نمی‌کند.  
 (۴) نمی‌توان اظهارنظر کرد.

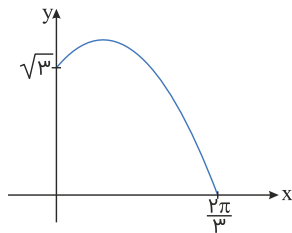
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ده داده آماری با انحراف معیار  $2\sqrt{3}$  و بیست داده آماری دیگر با انحراف معیار ۳ را با هم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین گروه اول دو برابر میانگین گروه دوم باشد، واریانس ۳۰ داده حاصل کدام است؟ (میانگین گروه دوم را  $p$  فرض کنید).

$$\begin{aligned} (1) \quad 10 - 2p - \frac{4p^2}{9} \\ (2) \quad 30 + \frac{4p^2}{3} \\ (3) \quad 10 + \frac{2p^2}{9} \\ (4) \quad 20 - 2p - \frac{2p^2}{9} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نمودار زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos(x - \frac{\pi}{6}) + b \sin x$  است. مقدار  $f(\frac{11\pi}{6})$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۲)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۳)  $-1$   
 (۴)  $1$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

مثلثی به طول اضلاع  $x, y, x, y, x, y$  با مثلثی به طول اضلاع ۱۳, ۱۲, ۵ متشابه است و دو مثلث همنهشت نیستند. بیشترین محیط مثلث اول کدام است؟

- (۱)  $7/5$   
 (۲)  $10$   
 (۳)  $12/5$   
 (۴)  $15$

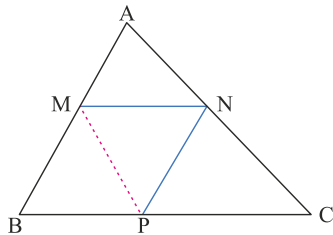
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

۱۰۴ به ازای چند مقدار  $k$ ، مجموعه جواب معادله  $\frac{k+2}{3x} = \frac{5-x}{4x-x^2}$  تهی است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۰۵ در شکل زیر،  $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{8}$  و چهار ضلعی  $MNPB$  متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث  $AMN$ ، چند درصد مساحت مثلث  $MNP$  است؟



- (۱)  $37/5$   
(۲) ۵۰  
(۳) ۶۰  
(۴) ۷۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۰۶ اگر تابع  $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{a-3x} + 5$  یک تابع ثابت و  $g(x)$  همانی باشد، حاصل  $(f+g)(a)$  در صورت تعریف کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۰۷ اگر  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & ; x \geq 1 \\ x + b & ; 0 \leq x < 1 \\ \cos x & ; x < 0 \end{cases}$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) ۱  
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴) ۲

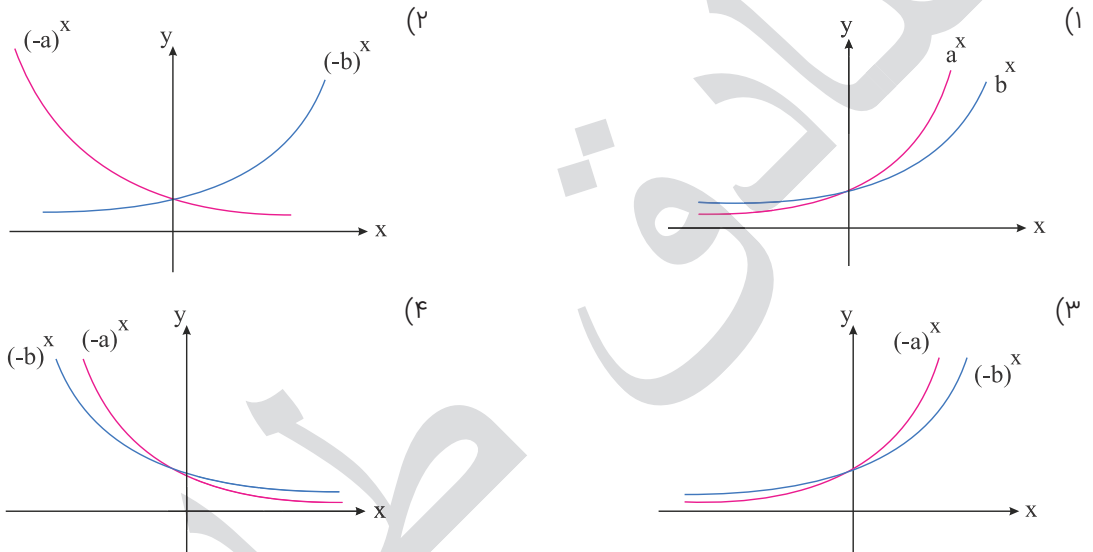
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع  $f(x) = \begin{cases} |x - 1| & ; x < 1 \\ x - [x] & ; 1 \leq x < 3 \\ -x + 4 & ; 3 \leq x \end{cases}$  در چند نقطه ناپیوسته است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

تابع  $f(x) = \log_2(ax + b)$  فقط برای مقادیر  $x \in (-\infty, -\frac{3}{5})$  تعریف شده است. در کدام گزینه، نمودارهای توابع نمایی مشخص شده، به درستی رسم شده‌اند؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر  $x = a$  ریشه معادله  $\sqrt{\frac{3}{4} + x} + 4x = 0$  باشد.  $4a + 1$  کدام است؟

- (۱)  $-0/25$   
(۲)  $0/25$   
(۳)  $-0/5$   
(۴)  $0/5$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

حاصل  $\frac{\cos^2(\frac{\pi}{5} + x) + \cos^2(\frac{3\pi}{10} - x)}{\cot(\frac{\pi}{5} + x) \times \cot(\frac{7\pi}{10} + x)}$  ، کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) -۱  
(۴)  $\frac{1}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$  در تمام نقاط بازه  $(1, 4)$  حد دارد. زوج مرتب  $(a, b)$  کدام است؟

- (۱)  $(-4, 3)$   
(۲)  $(4, 3)$   
(۳)  $(5, 6)$   
(۴)  $(-5, 6)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

انرژی آزاد شده در یک زلزله از رابطه  $\log E = 11/8 + 1/5 M$  به دست می‌آید. انرژی آزاد شده در یک زلزله ۷ ریشتری چند برابر انرژی آزاد شده در یک زلزله ۵ ریشتری است؟

- (۱) ۲۰۰۰  
(۲) ۲۰۰۰۰  
(۳) ۱۰۰۰  
(۴) ۱۰۰۰۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a}{x - 1} & ; x < 1 \\ \frac{x^2 - b}{x + a + b} & ; x \geq 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته می‌باشد.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲)  $\frac{1}{3}$   
(۳)  $\frac{2}{3}$   
(۴)  $-\frac{2}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۱۵ دو دانش‌آموز، هم‌زمان شروع به حل معادله  $2x^2 + ax + b = 0$  می‌کنند. اولی جواب‌ها را ۳ و ۶ و دومی جواب‌ها را ۲ و ۵ به دست آورده است. اگر بدانیم اولی عدد ثابت معادله و دومی ضریب  $x$  معادله را اشتباه دیده‌اند، تفاضل ریشه‌ها در صورت صحیح معادله کدام است؟

- (۱) ۷  
(۲)  $\sqrt{41}$   
(۳)  $\sqrt{61}$   
(۴) ۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۱۶ یک مترو فاصله ۲۰ کیلومتری بین دو شهر را طی می‌کند. در شرایط اضطراری اگر ۱۲ کیلومتر بر ساعت سریع‌تر حرکت کند، ۲۲/۵ دقیقه زودتر می‌رسد. سرعت مترو در حالت عادی چقدر است؟

- (۱) ۱۵  
(۲) ۱۸  
(۳) ۲۰  
(۴) ۲۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۱۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = 2x^2 - ax + 3$  در بازه  $[-3, 2]$  وارون‌پذیر است؟

- (۱)  $\mathbb{R}$   
(۲)  $\mathbb{R} - (-2, 4)$   
(۳)  $\mathbb{R} - (-12, 8)$   
(۴)  $\mathbb{R} - (-2, 1)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۱۸ به ازای کدام مقدار  $a$ ، بین  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - a = 0$ ، رابطه  $x_1^2 + 4x_2 = 18$  برقرار است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) -۱  
(۴) -۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۱۹ اگر  $\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{3\pi}{8}$  و  $\sin 2x = 1 - 2b$  باشد؛ چند مقدار صحیح برای  $b$  وجود دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی‌شمار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۲۰ دامنه وارون تابع  $f(x) = \sqrt{x+1} + c$  برابر  $(2, +\infty)$  است. در این صورت نمودار  $f^{-1}$  با کدام طول محور  $x$ ها را قطع می‌کند؟

(۲)  $2/5$

(۱) ۲

(۴) ۴

(۳) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۲۱ اگر تابع  $f(x) = 2x^2 + m(1-x) + x + 5$  محور  $x$ ها را در دو نقطه متمایز سمت چپ مبدأ قطع کند، محدوده  $m$  کدام است؟

(۲)  $-3 < m < 1$

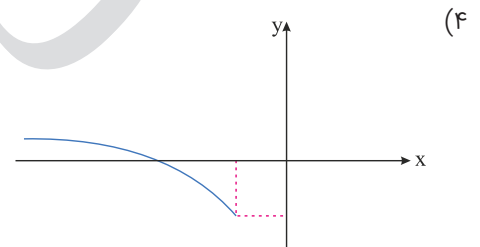
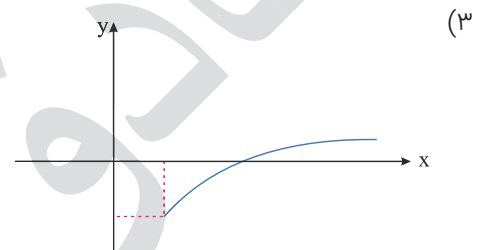
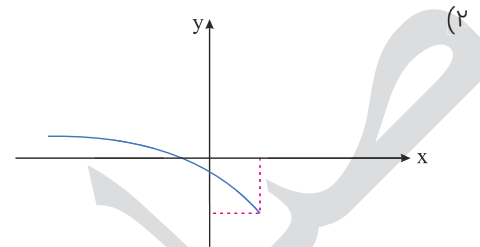
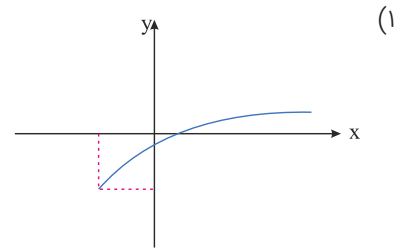
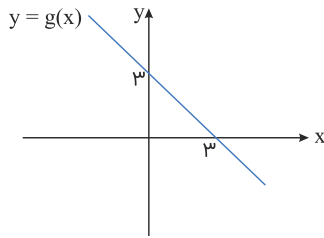
(۱)  $m > 13$

(۴)  $-7 < m < -5$

(۳)  $-5 < m < -3$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نمودار تابع  $y = g(x)$  به صورت زیر است. کدام گزینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{1 - g(x)} - 2$  را نشان می‌دهد؟



تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

در یک خانواده چهار فرزندی، احتمال اینکه همه فرزندان خانواده در روز چهارشنبه متولد شوند، چندبرابر آن است که همگی در یک روز هفته متولد شوند؟

۱ (۲)

$\frac{1}{7}$  (۱)

۷ (۴)

۴ (۳)

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۲۴ قرینة منحنی  $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{3}}(3x - 2)$  را نسبت به خط  $y = x$ ،  $g(x)$  می نامیم. طول از مبدأ منحنی  $g(x)$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) -۱  
(۴) هیچ کدام

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۲۵ خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر از مرکز دایره ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد. روی دایره چند نقطه وجود دارد که از  $d$  به فاصله ۴ سانتی متر باشد؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

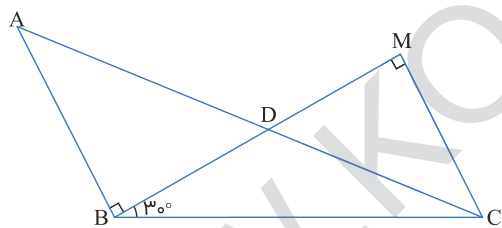
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۲۶ معادله  $x - m\sqrt{x} + m - 2 = 0$  دو ریشه دارد که مجموع آن ها برابر ۷ است. مقدار  $m$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) -۱  
(۳) -۱ و ۳  
(۴)  $\emptyset$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۲۷ در شکل زیر  $AD \times BC$  کدام است؟ ( $CD = AB = 1$ )



- (۱) ۱  
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳) ۲  
(۴)  $\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۲۸ ده داده آماری با واریانس ۱۲، مفروض اند. چند داده مساوی با میانگین به این داده ها اضافه کنیم تا ضریب تغییرات نصف شود؟

- (۱) ۱۰  
(۲) ۱۵  
(۳) ۲۰  
(۴) ۳۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۲۹ اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & ; x > 3 \\ 4x & ; x < 3 \end{cases}$  و  $g(x) = kx + 6$  و تابع  $f.g$  در  $x = 3$  حد داشته باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲) ۲  
(۳) -۳  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۰ دامنه تغییرات ۶ داده آماری برابر با ۵ و میانگین آن‌ها برابر با ۱۵ است. نیمه داده‌های بعد از میانه سه عدد متوالی می‌باشد. داده با فراوانی ۳ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲  
(۲) ۱۳  
(۳) ۱۴  
(۴) ۱۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۱ اگر  $\frac{4x^2 + 5x + 1}{|x - 2|(x^2 + 2x + 1)} \leq 0$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{x}{|4x|} + [x + 1]$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{5}{4}$   
(۲)  $-\frac{3}{4}$   
(۳)  $-\frac{1}{4}$   
(۴)  $\frac{1}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۲ تابع  $f(x) = \left[\frac{4}{x}\right] + [2 \cos \pi x]$  از نظر پیوستگی در  $x = \frac{2}{3}$  چگونه است؟

- (۱) فقط پیوستگی راست دارد.  
(۲) فقط پیوستگی چپ دارد.  
(۳) از دو طرف ناپیوسته است.  
(۴) پیوسته است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۳ نمودار تابع  $f(x) = \cos x + |\cos x|$  در بازه  $[0, 2\pi]$  از چند پاره خط تشکیل شده است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۴ اگر  $5 = [5x^2 - 1]$  باشد، نمودار تابع  $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x} - x$  محور  $x$  ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر  
(۲) یک  
(۳) دو  
(۴) بی‌شمار

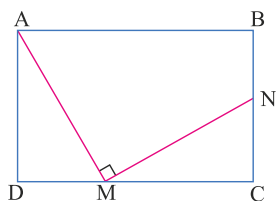
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۵ اگر  $\tan 20^\circ = a$ ، آنگاه حاصل عبارت  $A = \frac{\sin 70^\circ + 2 \sin 20^\circ}{\sin 110^\circ - 3 \sin 160^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1-2a}{1-3a}$   
(۲)  $\frac{1+2a}{1+3a}$   
(۳)  $\frac{-1+2a}{1-3a}$   
(۴)  $\frac{1+2a}{1-3a}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۶ در مستطیل زیر،  $M$  و  $N$  به ترتیب وسط  $CD$  و  $BC$  هستند و  $AM \perp MN$ ، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



- (۱)  $\frac{3}{4}$   
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳)  $\sqrt{2}$   
(۴)  $\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۳۷ میانگین طول کمان تعدادی نیم‌دایره برابر با  $\sqrt{15}\pi$  و میانگین مساحت این نیم‌دایره‌ها برابر با  $12\pi$  است. ضریب تغییرات قطر این نیم‌دایره‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{\sqrt{15}}$   
(۲)  $\frac{6}{\sqrt{15}}$   
(۳)  $\frac{6}{\sqrt{15}\pi}$   
(۴)  $\frac{3}{\sqrt{15}\pi}$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۳۸ در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، ارتفاع  $AH = 6$  و  $CH = 12$  واحد است. مساحت مثلث  $ABC$  چندبرابر مساحت مثلث  $ABH$  است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۳۹ وارون تابع  $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$ ، تابع  $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + bx + c}{2x + d}$  است. مقدار  $b + c + d$  کدام است؟

- (۱) -۱۱  
(۲) -۱۴  
(۳) -۱۵  
(۴) -۱۹

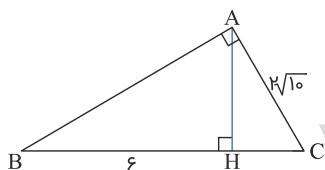
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۰ معادله  $\sqrt{x} = \frac{1}{3x - 2}$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۱ در شکل زیر،  $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $AC = 2\sqrt{10}$  و  $BH = 6$ . مقدار  $AB$  کدام است؟



- (۱) ۱۰  
(۲)  $5\sqrt{10}$   
(۳) ۸  
(۴)  $2\sqrt{15}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

۱۴۲ دامنه تغییرات شش داده آماری برابر با ۵ و میانگین آن‌ها برابر با ۱۵ است. نیمه داده‌های بعد از میانه سه عدد متوالی می‌باشد. داده با فراوانی ۳ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۲  
(۲) ۱۳  
(۳) ۱۴  
(۴) ۱۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۳ دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{-x^2 + ax + b}$  به صورت  $[-1, 2]$  و دامنه تابع  $g(x) = \frac{5x + 1}{2x^2 - cx + d}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{a, b\}$  می‌باشد. حاصل  $d - ac$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) -۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۴ به ازای کدام مقدار  $a$  معادله  $(\sqrt{x^2 - 2x - x + 3})(\sqrt{x^3 + 2x^2 + ax + 1} + \sqrt{x^2 - x}) = 0$  حداقل دارای یک جواب است؟

- (۱) هیچ مقدار  
(۲) ۴  
(۳) -۴  
(۴) هر مقدار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۵ اگر  $A(3, -2)$ ،  $B(-1, 1)$  و  $C(4, 3)$  سه رأس از متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  باشند؛ مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{23}$   
(۲)  $\frac{23}{2}$   
(۳) ۲۳  
(۴)  $4\sqrt{23}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۶ یک سهمی محور  $x$  ها را در دو نقطه به طولهای ۳- و ۲ قطع می‌کند و عرض از مبدأ آن برابر با کمترین مقدار تابع  $g(x) = x^2 + 4x + 2$  است. اگر خط  $y = k$  ( $0 < k \in \mathbb{Z}$ ) این سهمی را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کند، طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

(۲)  $\sqrt{13}$

(۱)  $\sqrt{3}$

(۴)  $2\sqrt{3}$

(۳)  $2\sqrt{13}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۴۷ رابطه شدت زلزله ( $M$ ) برحسب ریشتر و مقدار انرژی آزادشده ( $E$ ) برحسب ارگ، به صورت  $\log E = 11/8 + 1/5M$  می‌باشد. اگر زلزله سال ۸۲ در شهر بم، حدوداً  $0/8$  ریشتر از زلزله سال ۶۹ در شهر رودبار خفیفتر بوده باشد، انرژی آزادشده در زلزله رودبار حدوداً چندبرابر انرژی آزادشده در زلزله بم بوده است؟ ( $\sqrt[5]{10} = 1/6$ )

(۲) ۱۰

(۱) ۸

(۴) ۱۶

(۳) ۱۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۸ اگر ریشه‌های معادله  $2x^3 + (k-2)x^2 = (k^2+1)x$  تشکیل یک دنباله حسابی دهند،  $k$  کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) -۱

(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۹ دامنه تابع  $f(x) = \frac{|x|}{[x^2]}$  به صورت  $\mathbb{R} - (a, b)$  است.  $b - a$  کدام است؟

(۲)  $1/5$

(۱) ۱

(۴)  $2/5$

(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{ax + b} - 3} & ; x > 1 \\ c & ; x = 1 \\ [x] + [-x] & ; x < 1 \end{cases}$$

اگر تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد،  $-a + b + c$  کدام است؟

۱۵۰

۸ (۲)

۱) صفر

(۴) برای  $a$  و  $b$  مقادیر منحصر به فردی وجود ندارد.

۳) ۴۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$f(x) = a[3\sqrt{2} \sin x] + [\sqrt{2} \cos 3x]$$

اگر تابع  $f(x)$  در  $x = \frac{\pi}{4}$  حد داشته باشد، مقدار  $f(\frac{\pi}{3})$  کدام است؟

۱۵۱

۲ (۲)

۱) ۱

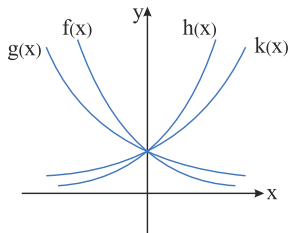
-۵ (۴)

۳) -۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نمودار توابع  $f(x) = a^x$ ,  $g(x) = b^x$ ,  $h(x) = c^x$  و  $k(x) = d^x$  در زیر رسم شده اند. کدام گزینه درست است؟

۱۵۲



۱)  $d < c < b < a$

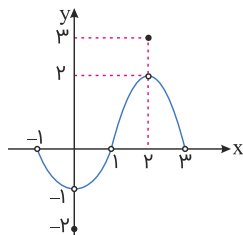
۲)  $b < a < d < c$

۳)  $a < b < d < c$

۴)  $a < b < c < d$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، حاصل  $\frac{|\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{1}{f(x)}]|}{|\lim_{x \rightarrow 2} f(x)|}$  کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴)  $-\frac{1}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

حداکثر چند نقطه روی محیط مثلث متساوی الاضلاع وجود دارد که از نقطه‌ای که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است، به فاصله ثابت ۵ باشد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

موتورسواری یک مسیر ۶۰ کیلومتری را به صورت رفت و برگشت می‌رود. اگر در مسیر برگشت، سرعتش  $10 \text{ km/h}$  کمتر از سرعت رفت باشد و نیم ساعت هم دیرتر مسیر را طی کند، سرعت برگشت، چندبرابر سرعت رفت است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$
- (۲)  $\frac{3}{4}$
- (۳)  $\frac{4}{5}$
- (۴)  $\frac{5}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

اگر  $f(x^2 - \frac{1}{x^2}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  باشد، آنگاه  $f(x)$  کدام است؟ ( $x \neq 0$ )

- (۱)  $-x$
- (۲)  $\sqrt{x^2 - 4}$
- (۳)  $\sqrt{x^2 + 4}$
- (۴)  $|x|$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۵۷ "ارتفاع‌های هر مثلثی نقطه‌ای در داخل یا خارج مثلث هم‌س‌اند." با روش ..... ثابت می‌شود که گزاره ذکرشده ..... است.

در جاهای خالی به ترتیب چه کلماتی می‌توانند قرار بگیرند؟

- (۱) استدلال استنتاجی - درست  
 (۲) برهان خلف - درست  
 (۳) برهان خلف - نادرست  
 (۴) مثال نقض - نادرست

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

۱۵۸ اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} - 4 & ; x > 0 \\ b + [x - \frac{7}{2}] & ; x = 0 \\ [x] + 4 & ; x < 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) صفر  
 (۲) ۷  
 (۳) -۷  
 (۴) ۱۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

۱۵۹ در معادله درجه دوم  $4x^2 - 24x + k = 0$ ، اختلاف جذر ریشه‌ها  $\sqrt{3}$  است. مجموع مکعب ریشه‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{321}{2}$   
 (۲)  $\frac{331}{2}$   
 (۳)  $\frac{341}{2}$   
 (۴)  $\frac{351}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۶۰ تابع  $f(x) = \begin{cases} a + \frac{bx + c}{|x^2 - 5x + 6|} & ; x \neq 2 \\ a - 10 & ; x = 2 \end{cases}$  در نقطه  $x = 2$  پیوستگی چپ دارد. مقدار  $b + c$  کدام است؟

- (۱) -۱۰  
 (۲) ۱۰  
 (۳) -۸  
 (۴) ۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی یازدهم

حاصل عبارت مثلثاتی  $\frac{\cos(-\frac{19\pi}{6}) \tan(-\frac{11\pi}{4})}{\sin(\frac{46\pi}{6})}$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳)  $-\sqrt{3}$   
(۴)  $\sqrt{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهربابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

اگر تابع  $f(x) = [\frac{x}{3}](2x^2 + bx + c)$  در بازه  $(5, 10)$  پیوسته باشد، مقدار  $b + c$  کدام است؟

- (۱) ۴۸  
(۲) ۵۸  
(۳) ۶۸  
(۴) ۷۸

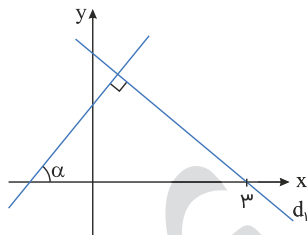
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهربابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

حاصل عبارت  $(\sqrt{32})^{2-\log_4 3}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{32}{\sqrt[4]{3}}$   
(۲)  $\frac{32}{2\sqrt[4]{3}}$   
(۳)  $\frac{32}{3\sqrt[4]{3}}$   
(۴)  $\frac{32}{\sqrt[5]{3^4}}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهربابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در شکل زیر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  است. خط  $d_1$  محور  $y$ ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟



- (۱)  $\frac{16}{3}$   
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴)  $\frac{16}{5}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهربابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

۱۶۵ معادله  $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+8}\sqrt{x-5} = 7$  چند ریشه حقیقی دارد؟

(۲) صفر

(۱) ۱

(۴) ۳

(۳) ۲

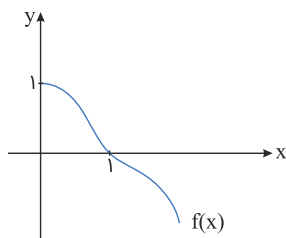
تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

WWW.KONKURTNT.COM

نمودار تابع  $f$  مشخص می‌کند که  $R_f = (-\infty, 1]$  است و می‌دانیم  $R_f = D_{f^{-1}}$  می‌باشد. برای پیدا کردن دامنه  $f(x+1)$  نمودار  $f(x)$  را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



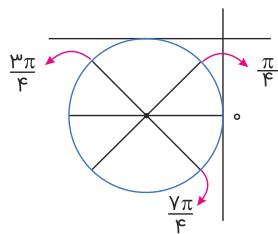
دامنه:  $x \geq 0$

دامنه تابع  $y = \frac{f^{-1}(x)}{f(x+1)}$  برابر اشتراک دامنه  $f^{-1}$  و  $f(x+1)$  است. به علاوه مخرج نباید صفر باشد.

$$(-\infty, 1] \cap [0, +\infty) - \{1\} = [0, 1)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

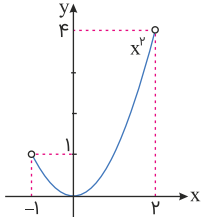
باتوجه به دایره مثلثاتی در بازه‌های  $[0, \frac{3\pi}{4}]$  و  $[\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$ ، مجموع سینوس و کسینوس مثبت است. در این دو بازه در بازه‌های  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  و  $[\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$ ، تانژانت از کتانژانت بزرگ‌تر است. پس:



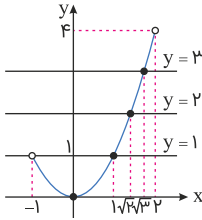
$$[a, b] = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], [c, d] = [\frac{7\pi}{4}, 2\pi] \Rightarrow \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

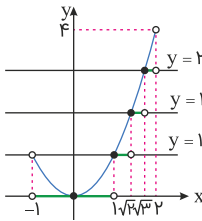
گام اول: رسم عبارت داخل جزء صحیح، یعنی رسم  $x^2$  است:



گام دوم: رسم خط‌های افقی با عرض‌های صحیح و توپر کردن محل برخورد آن‌ها با  $x^2$ :



گام سوم: تصویر کردن قسمتی از نمودار  $x^2$  روی خط پایینی که بین دو خط افقی متوالی قرار دارد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نمودار تابع  $y = [x^2]$  در بازه  $(-1, 2)$ ، شامل ۴ پاره‌خط بوده که طول بزرگ‌ترین پاره‌خط برابر ۲ است، پس دوتایی مرتب  $(\ell, \Pi)$  به صورت  $(2, 4)$  خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

با تغییر متغیر  $t = x^2 + 3x + 3$  خواهیم داشت:

$$f(x) = (x^2 + 3x + 3)^2 + (x^2 + 3x + 3) - 2 = t^2 + t - 2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t-1)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = 1 \\ t=-2 \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = -2 \Rightarrow x^2 + 3x + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \end{cases}$$

همان طور که دیدیم فقط جواب  $t = 1$  قابل قبول است. اما برای حل  $x^2 + 3x + 3 = 1$  خواهیم داشت:

$$x^2 + 3x + 3 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1, -2$$

بنابراین این تابع تنها دو صفر دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[-x] + f(x)}{2x} = \frac{[(-1)^-] + 2}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] + a = [1^-] + a = 0 + a$$

برای اینکه تابع  $g(x)$  در  $x = 1$  پیوسته باشد، باید مقادیر بالا برابر باشند؛ پس  $a = 0$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

طول رأس سهمی  $x = -\frac{b}{2a}$  است. پس:

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

پس معادله سهمی به صورت  $y = ax^2 - 4ax + 1$  است. با قرار دادن  $x = 2$  در معادله سهمی، عرض آن را حساب می‌کنیم:

$$y = 4a - 8a + 1 = 1 - 4a$$

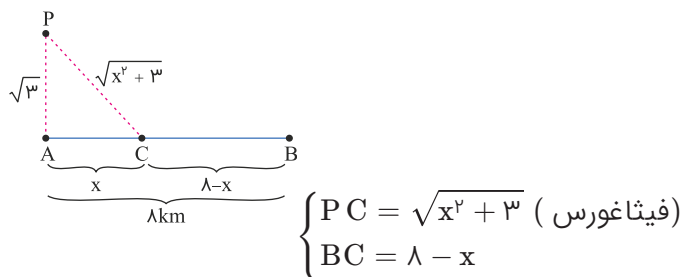
بنابراین باتوجه به نمودار،  $1 - 4a = -1$  و در نتیجه  $a = \frac{1}{2}$  و  $b = -2$ ، یعنی معادله سهمی به صورت  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$  است. طول نقطه برخورد سهمی با محور طول‌ها مورد سؤال است. پس در معادله سهمی قرار می‌دهیم  $y = 0$ .

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

طبق شکل،  $c$  ریشه بزرگتر معادله فوق است و بزرگتر از ۲ است؛ پس  $c = 2 + \sqrt{2}$ .

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

فاصله محل توقف قایق (C) تا نقطه A را x در نظر می‌گیریم. باتوجه به شکل داریم:



حالا اگر زمان طی کردن مسیر PC را  $t_1$  و زمان طی کردن مسیر CB را  $t_2$  در نظر بگیریم، داریم:

$$t_1 + t_2 = 90 \text{ دقیقه} = \frac{3}{2} \text{ ساعت}$$

باتوجه به رابطه  $x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$  داریم:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 3}}{3} + \frac{\lambda - x}{2} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 6} 2\sqrt{x^2 + 3} + 3(\lambda - x) = 9$$

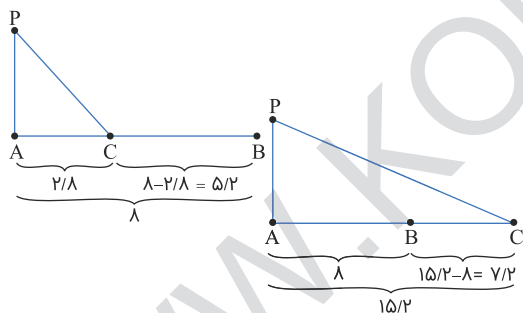
$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 3} = 3x - 15$$

طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(x^2 + 3) = 9(x - 5)^2 \Rightarrow 4x^2 + 12 = 9x^2 - 90x + 225$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 90x + 213 = 0 \Rightarrow x = \frac{90 \pm \sqrt{3840}}{10} = \frac{90 \pm 62}{10} = 2/8, 15/2$$

دقت کنید که دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:



جواب  $BC = 5/2$  در گزینه (۳) آمده است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به شکل،  $a$  و  $b$  صفرهای تابع درجه دوم  $y = x^2 - 3ax + c$  هستند، پس:

$$S = \text{جمع ریشه‌ها} = 3a \Rightarrow a + b = 3a \Rightarrow b = 2a$$

از طرفی:

$$P = \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = c \Rightarrow a \times b = c \Rightarrow a \times 2a = c \Rightarrow c = 2a^2$$

واضح است که  $c$  حتماً بر عدد ۲ بخش پذیر بوده و لذا عددی زوج است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

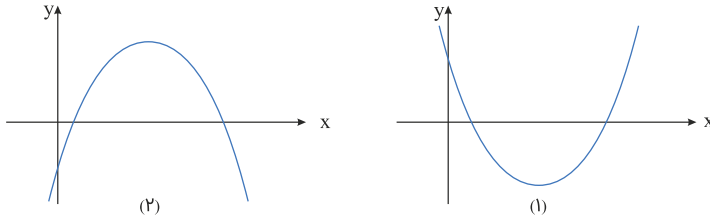
با توجه به این که دامنه تابع به صورت  $\mathbb{R} - \{\pm a\}$  می باشد، پس  $\pm a$  ریشه های مخرج تابع هستند، به این معنا که معادله درجه دوم  $mx^2 + (m-2)x - (m+m^2) = 0$  باید دارای دو ریشه قرینه هم باشد. برای این منظور باید جمع ریشه ها در این معادله صفر شود:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-m+2}{m} = 0 \Rightarrow m = 2$$

پس این معادله به صورت  $2x^2 - 18 = 0$  درمی آید و دارای دو ریشه  $\pm 3$  است. پس دامنه تابع برابر با  $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$  و  $a = 3$  می باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

سهمی که محور  $x$  ها را در دو نقطه با طول نامنفی قطع کند، یکی از دو حالت زیر را دارد:



ابتدا حالت اول را بررسی می‌کنیم:

(۱) دهانه سهمی رو به بالا است یعنی ضریب  $x^2$  باید مثبت باشد، پس:

$$k - 2 > 0 \Rightarrow k > 2$$

(۲) محل برخورد سهمی با محور  $y$  ها باید از مبدأ مختصات به بالا باشد، یعنی به ازای  $x = 0$ ، مقدار  $y$  باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$y = (k - 2)x^2 - kx - k + 3 \xrightarrow{x=0} y = -k + 3 \geq 0 \Rightarrow k \leq 3$$

(۳) سهمی در دو نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند، پس مقدار  $\Delta$  باید مثبت باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-k)^2 - 4(k - 2)(-k + 3) > 0 \Rightarrow 5k^2 - 20k + 24 > 0 \xrightarrow{\Delta < 0} k \in \mathbb{R}$$

(۴) رأس سهمی در قسمت مثبت محور  $x$  ها قرار دارد، پس  $-\frac{b}{2a}$  باید مثبت باشد:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow -\frac{-k}{2(k - 2)} > 0 \Rightarrow \frac{k}{2(k - 2)} > 0 \Rightarrow k > 2 \text{ یا } k < 0$$

از اشتراک ۴ بازه فوق داریم:  $2 < k \leq 3$ .

حال به سراغ حالت دوم می‌رویم:

(۱) دهانه سهمی رو به پایین است؛ یعنی ضریب  $x^2$  باید منفی باشد. پس داریم:

$$k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

(۲) محل برخورد نمودار با محور  $y$  ها باید از مبدأ مختصات به پایین باشد. یعنی به ازای  $x = 0$ ، مقدار  $y$  باید کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$y = (k - 2)x^2 - kx - k + 3 \xrightarrow{x=0} y = -k + 3 \leq 0 \Rightarrow k \geq 3$$

(۳) سهمی در دو نقطه، محور  $x$  ها را قطع می‌کند، پس مقدار  $\Delta$  باید مثبت باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-k)^2 - 4(k - 2)(-k + 3) > 0 \Rightarrow 5k^2 - 20k + 24 > 0 \xrightarrow{\Delta < 0} k \in \mathbb{R}$$

(۴) رأس سهمی در قسمت مثبت محور  $x$  ها قرار دارد، پس  $\frac{-b}{2a}$  باید مثبت باشد:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow -\frac{-k}{2(k - 2)} > 0 \Rightarrow \frac{k}{2(k - 2)} > 0 \Rightarrow k > 2 \text{ یا } k < 0$$

از اشتراک چهار بازه فوق داریم:  $k \in \emptyset$

بنابراین تنها مقداری که  $k$  می‌تواند بپذیرد:  $2 < k \leq 3$  است.

راه‌حل دوم:

$$y = (k - 2)x^2 - kx - k + 3$$

برای اینکه معادله به فرم کلی  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $x$ ها را در  $2$  نقطه با طول نامنفی (یعنی هردو مثبت و یا یکی مثبت و دیگری صفر) قطع نماید، کافی است:

$$S = \text{مجموع ریشه‌ها} > 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{k}{k-2} > 0 \Rightarrow k < 0 \text{ یا } k > 2 \quad (1)$$

$$P = \text{ضرب ریشه‌ها} \geq 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-k+3}{k-2} \geq 0 \Rightarrow 2 < k \leq 3 \quad (2)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad (3)$$

$$\Delta = (-k)^2 - 4(k-2)(-k+3) = k^2 + 4(k-2)(k-3) = k^2 + 4(k^2 - 5k + 6) = 5k^2 - 20k + 24 > 0$$

عبارت  $5k^2 - 20k + 24$  چون  $\Delta < 0$  و ضریب  $k^2$  مثبت است، پس همواره مثبت است. پس به ازای هر  $k$  ای ( $k \in \mathbb{R}$ )، عبارت  $5k^2 - 20k + 24$  مثبت است.

چون بین  $3$  شرط فوق ( $\Delta > 0, P \geq 0, S > 0$ ) "و" وجود دارد، باید بین جواب‌های حاصل، اشتراک بگیریم.

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow 2 < k \leq 3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

گزینه ۲

۱۱

ابتدا ضابطه تابع درجه دوم  $f$  را با داشتن مختصات رأس آن (یعنی  $B(2, 5)$ ) می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = a(x - \text{طول رأس})^2 + \text{عرض رأس} \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 5$$

چون مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائمه است، پس باید شیب ضلع  $AB$  و  $AC$  را محاسبه کرده و ضرب آن‌ها را برابر  $-1$  قرار دهیم. برای این منظور ابتدا مختصات رئوس  $A, B, C$  را مشخص می‌نماییم. داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 5 \xrightarrow{x=0} A(0, 4a + 5), B(2, 5), C(2, 0)$$

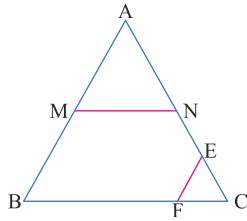
$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{4a + 5 - 5}{0 - 2} = -2a \\ m_{AC} = \frac{4a + 5 - 0}{0 - 2} = \frac{4a + 5}{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow -2a \times \frac{4a + 5}{-2} = -1 \Rightarrow 4a^2 + 5a = -1$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 5a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow f(x) = -(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow f(5) = -4 \\ a = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 5 \Rightarrow f(5) = \frac{-9}{4} + 5 = \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{در گزینه‌ها نیست}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به توازی خطوط EF و AB، طبق قضیه تالس داریم:



$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow CE = \frac{1}{4}AC(1)$$

از طرفی چون نقطه E وسط NC قرار دارد، خواهیم داشت:

$$CE = \frac{1}{2}NC \xrightarrow{(1)} NC = 2CE = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AN = NC = \frac{1}{2}AC$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \xrightarrow{\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}} \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

به طور کلی می‌دانیم در مورد هر تابع وارون‌پذیری مانند h:

$$h(a) = b \Leftrightarrow h^{-1}(b) = a$$

ابتدا  $g^{-1}(11)$  را پیدا می‌کنیم. برای این منظور کافی است معادله  $g(x) = 11$  را حل کنیم:

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \xrightarrow{x \leq 0} x = -3$$

پس داریم:

$$f(2a - 5) = -3 \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(-3)}_4 = 2a - 5 \Rightarrow 4 = 2a - 5 \Rightarrow a = 4/5$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع  $y = [x + 1]$  در اعداد صحیح ناپیوسته است. پس باید  $f(x)$  را به گونه‌ای انتخاب کنیم که در اعداد صحیح برابر صفر باشد. در میان گزینه‌ها، تنها گزینه "۱" این ویژگی را دارد.

x	۰	±۱	±۲	±۳	....
sinπx	۰	۰	۰	۰	....

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا دامنه هر دو تابع را حساب می‌کنیم. داریم:  
(۱) دامنه تابع  $g$ :

$$x(2-x) - 1 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{-(x-1)^2}_{(*)} \geq 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_g = \{1\}$$

(\*) همواره منفی یا صفر است، پس دامنه  $g$ ، فقط یک عضو دارد.  
(۲) دامنه تابع  $f$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + a \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-a}{2} \\ -3x + b \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (-\infty, \frac{b}{3}] \cap [\frac{-a}{2}, +\infty)$$

برای آنکه اشتراک دو بازه بالا، فقط یک عضو، یعنی  $x = 1$  را داشته باشد، باید  $\frac{-a}{2}$  و  $\frac{b}{3}$  هر دو برابر و مساوی عدد ۱ باشند. داریم:

$$\frac{b}{3} = \frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow b = 3 \\ \frac{-a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

با جایگذاری  $a = -2$  و  $b = 3$ ، ضابطه تابع  $f(x)$  را دوباره می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{2x - 2} + \sqrt{-3x + 3}$$

دامنه هر دو تابع فقط شامل یک عضو (یعنی  $x = 1$ ) بوده و مقدار هر دوی آن‌ها در  $x = 1$  برابر با صفر است، پس هر دو تابع، یک تابع تک‌نقطه‌ای هستند. داریم:

$$f = g = \{(1, 0)\}$$

در آخر خواسته سؤال را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\frac{a=-2}{b=3} \rightarrow a + b = (-2) + 3 = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

هریک از معادلات را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$1) \log_3 x + \log_9 y^2 = 2 \Rightarrow \log_3 x + \log_{3^2} y^2 = 2 \Rightarrow \log_3 x + \frac{2}{2} \log_3 y = 2 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ \Rightarrow \log_3 xy = 2 \Rightarrow xy = 9$$

$$2) \log_2(x+y) = 3 \Rightarrow x+y = 2^3 = 8$$

پس می‌توان فرض کرد  $x$  و  $y$  ریشه‌های یک معادله درجه دو هستند که در آن:  $\begin{cases} S = x + y = 8 \\ P = xy = 9 \end{cases}$  یعنی این معادله به صورت  $t^2 - 8t + 9 = 0$  می‌باشد و منظور از  $|x - y|$  هم تفاضل ریشه‌ها در این معادله درجه دو است:

$$| \text{تفاضل ریشه‌ها} | = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

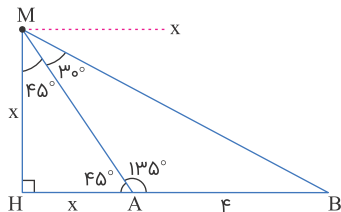
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

$$\sqrt{(2\cos^2 x - \cot x) \sqrt{\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x}}} = \sqrt{(2\cos^2 x - \cot x) \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}} \\ = \sqrt{(2\cos^2 x - \cot x) \sqrt{\tan^2 x}} = \sqrt{(2\cos^2 x - \cot x) \underbrace{|\tan x|}_{\text{منفی}}} \\ = \sqrt{(2\cos^2 x - \cot x)(-\tan x)} = \sqrt{-2\sin x \cos x + 1} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \\ = \underbrace{|\sin x - \cos x|}_{\text{مثبت}} = \sin x - \cos x$$

توجه: در ربع دوم تانژانت منفی، سینوس مثبت و کسینوس منفی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

از نقطه  $M$  بر امتداد  $AB$  عمود می‌کنیم. طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:  $M\hat{A}H = AM\hat{x} = 45^\circ$  و در نتیجه  $M\hat{A}B = 135^\circ$  و  $M\hat{A}H = 45^\circ$ . بنابراین  $AH = MH = x$  کافی است طول  $MB$  را حساب کنیم تا با قضیه فیثاغورس مقدار  $x$  به دست آید. با استفاده از رابطه محاسبه مساحت مثلث  $MAB$  داریم:



$$\Delta MAB : S = \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot \sin M\hat{A}B = \frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin M\hat{A}H$$

$$\Rightarrow MB \cdot \sin M\hat{A}B = AB \cdot \sin M\hat{A}H \Rightarrow MB \cdot \sin 30^\circ = 4 \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow MB \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MB = 4\sqrt{2}$$

$$\Delta MHB : MH^2 + HB^2 = MB^2 \Rightarrow x^2 + (4 + x)^2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 16 + 8x = 32$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2(\sqrt{3} - 1)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

میانگین داده‌های آماری برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۶ + a + ۷ + ۱۸ + ۱۰ + b}{۶} = ۱۰$$

پس داریم:

$$\frac{۴۱ + a + b}{۶} = ۱۰ \Rightarrow a + b = ۱۹$$

برای به دست آوردن میانه باید داده‌ها را مرتب کنیم:

۶, ۷, ۱۰, ۱۸, a, b

اما جای a و b را نمی‌دانیم. با توجه به اینکه  $a + b = ۱۹$ ، در می‌یابیم که a و b هردو با هم نمی‌توانند از ۷ کوچک‌تر باشند یا از ۱۰ بزرگ‌تر باشند (در این صورت دو داده ۷ و ۱۰ وسط قرار می‌گیرند و میانه برابر با  $\frac{۱۰+۷}{۲} = ۸/۵$  خواهد شد)، پس حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

(a < b)

۱)  $a < ۷$ : اگر  $a < ۷$  باشد، آنگاه چون  $b = ۱۹ - a$ ، پس  $b > ۱۲$  و در این صورت باز هم دو داده ۷ و ۱۰ وسط قرار می‌گیرند که مطلوب نیست.

۲)  $۷ < a < ۱۰$ : اگر  $۷ < a < ۱۰$  باشد، دو ترتیب ۱۸, ۱۰, a, b, ۷, ۶ یا ۱۸, b, a, ۷, ۶ را برای داده‌های آماری می‌توان در نظر گرفت. حالت ترتیب ۱۸, ۱۰, a, b, ۷, ۶ به سادگی رد می‌شود زیرا میانه برابر  $\frac{۱۹}{۲} = ۹/۵$  می‌شود که مطلوب نیست. اما حالت ۱۸, b, a, ۱۰, ۷, ۶ تنها حالت مطلوب مسئله است که در این صورت  $\frac{a+۱۰}{۲} = ۹$  میانه خواهد بود. پس داریم:

$$\frac{a+۱۰}{۲} = ۹ \Rightarrow a+۱۰ = ۱۸ \Rightarrow a = ۸ \xrightarrow{b=۱۹-a} b = ۱۱ \Rightarrow a \cdot b = ۸۸$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم انسانی دهم

تابع گویا، تابعی کسری است که در صورت و مخرج کسر آن، توابع چندجمله‌ای قرار می‌گیرند (البته مخرج کسر نباید صفر باشد). و می‌دانیم در یک تابع چندجمله‌ای، درجه جملات همگی عضو اعداد حسابی ( $\mathbb{W}$ ) هستند.

در گزینه "۱"، صورت و مخرج، هر دو چندجمله‌ای از درجه ۱ هستند.

در گزینه "۲"، بعد از نوشتن  $\sqrt[۳]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[۳]{\sqrt{x}}$ ، باز هم صورت و مخرج هر دو، چندجمله‌ای از درجه ۱ می‌شوند.

در گزینه "۳"، در صورت، یک چندجمله‌ای از درجه ۱ داریم. اما در مخرج کسر بعد از نوشتن  $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[۴]{x}$ ، از آن جا که  $\frac{۱}{۴} \notin \mathbb{W}$  پس

همین گزینه جواب تست است. ضمناً دقت کنید که گزینه "۴" را می‌توان به صورت  $y = ۳ = \frac{۳}{۱}$  نوشت که در آن، هم صورت و هم مخرج، چندجمله‌ای از درجه صفر محسوب می‌شوند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\begin{cases} f(-1) = \frac{-17 + 14}{4(-1)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{2^{-b+1}} = \frac{3}{4} \\ f(2) = \frac{34 + 14}{8} = 6 \Rightarrow \frac{a}{2^{2b+1}} = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} \frac{2^{2b+1}}{2^{-b+1}} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{4}{6}} \Rightarrow 2^{2b+1+b-1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \Rightarrow 2^{3b} = 2^{-3}$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow \frac{a}{2^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2^{-x+1}}$$

از طرفی:

$$(1, 3) \in f(x) = \frac{3}{2^{-x+1}} \Rightarrow (3, 1) \in f^{-1}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

احتمال اینکه هیچ‌یک از این دو نوع میوه به فروش نرود، متمم آن است که حداقل یکی از آن‌ها به فروش رود:

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

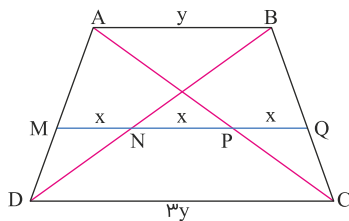
$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در ذوزنقه زیر فرض می‌کنیم  $CD = ۳AB$  و  $MQ$  موازی با دو قاعده رسم شده باشد، به طوری که  $MN = NP = PQ$ . حال از قضیه تالس استفاده می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ACD : MP \parallel CD \Rightarrow \frac{MP}{CD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{2x}{3y} = \frac{AM}{AD} \\ \triangle ABD : MN \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{DM}{AD} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{DM}{AD} \end{array} \right\} \xrightarrow{(\div)} \frac{AM}{DM} = \frac{2}{3}$$

\* حالت دیگری نیز وجود دارد که N و P (نقاط تقاطع MQ با دو قطر) بالای نقطه تقاطع دو قطر قرار گرفته باشند و به همین ترتیب نتیجه می‌شود  $\frac{AM}{DM} = \frac{1}{6}$  که در گزینه‌ها موجود نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

معادله را به صورت زیباتری درمی‌آوریم:

$$(x + \sqrt{x})^2 - 5x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{x})^2 - 5(x + \sqrt{x}) + 6 = 0$$

با تغییر متغیر  $x + \sqrt{x} = t$  داریم:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2, 3 \Rightarrow x + \sqrt{x} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

الف)  $x + \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - x$  طرفین را به توان دو می‌رسانیم.  $x = 4 - 4x + x^2$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, 4$$

با چک کردن جواب‌های به دست آمده در معادله اولیه  $x + \sqrt{x} = 2$  متوجه می‌شویم که فقط جواب  $x = 1$  قابل قبول است.

ب)  $x + \sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 - x$  طرفین را به توان دو می‌رسانیم.  $x = 9 - 6x + x^2$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

از آنجا که جواب‌های به دست آمده غیر صحیح‌اند، پس قطعاً جواب مسئله نیستند و نیازی به چک کردن آن‌ها در معادله اولیه نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

چون  $x \notin \mathbb{Z}$  است، نتیجه می‌گیریم که  $x$  عددی صحیح نمی‌باشد (یعنی  $x \notin \mathbb{Z}$ ). حال برای تعیین برد تابع  $f$ ، ابتدا از عدد ۳ فاکتورگیری کرده و به راحتی شکل  $u - [u]$  را در ضابطه  $f$  می‌سازیم. عبارت  $u - [u]$  همواره در بازه  $(0, 1)$  تغییر می‌کند (تابع جزء اعشاری). زمانی  $u - [u]$  برابر صفر می‌شود که  $u = x^2$  عددی صحیح شود. دقت کنید می‌توانیم عدد غیر صحیحی را به توان ۲ برسانیم و  $u = x^2$  مقدار صحیحی به خود بگیرد (به عنوان مثال  $x = \sqrt{2}$ ، عبارت  $u = x^2$  را صحیح می‌کند). پس عبارت  $x^2 - [x^2]$  کل بازه  $(0, 1)$  را می‌تواند به خود اختصاص دهد، پس داریم:

$$f(x) = 3x^2 - 3[x^2] = 3(x^2 - [x^2])$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq f(x) < 3 \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

پس برد تابع  $f$  شامل سه عدد صحیح ۰، ۱، ۲ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای رسم نمودار  $f([x])$ ، دامنه تابع  $f(x)$  را به صورت زیر بازه‌بندی می‌کنیم:

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f([x]) = f(-2) = -1$$

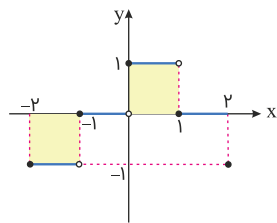
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f([x]) = f(-1) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f([x]) = f(0) = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f([x]) = f(1) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f([x]) = f(2) = -1$$

پس نمودار این تابع به این صورت خواهد بود:



واضح است که ناحیه ایجادشده با محور  $x$  ها شامل دو مربع به ضلع واحد است و لذا:  $S = 1 + 1 = 2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

ابتدا پایه‌های هر دو تابع را یکسان می‌کنیم:

$$f(x) = 4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2x+2}$$

$$g(x) = \frac{1}{8}(4^x) = \frac{2^{2x}}{2^3} = 2^{2x-3}$$

خطر بسیار بزرگ !!! ممکن است فکر کنید برای تبدیل  $2x + 1$  به  $2x - 3$  کافی است یک انتقال افقی ۴ واحدی داشته باشید. اما از آنجاکه ملاک انتقال افقی، تغییرات بر روی  $x$  است، ابتدا باید توابع  $f$  و  $g$  را به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{cases} f(x) = 2^{2x+2} = 2^{2(x+1)} \\ g(x) = 2^{2x-3} = 2^{2(x-\frac{3}{2})} \end{cases}$$

پس در واقع باید  $x + 1$  به  $x - \frac{3}{2}$  تبدیل شود که این اتفاق با یک انتقال افقی  $2/5$  واحدی امکان‌پذیر است. باز هم دقت کنید! تغییرات بر روی محور  $x$ ها برعکس اعمال می‌شود، پس انتقال باید  $2/5$  واحد در راستای جهت مثبت محور  $x$ ها، یعنی به سمت راست صورت گیرد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

اگر بخواهیم این معادله را به شیوه عادی حل کنیم و یکی از رادیکال‌ها را به طرف دیگر برده و به توان ۲ برسانیم؛ باز هم از شر رادیکال خلاص نمی‌شویم و بارها و بارها باید این عملیات را تکرار کنیم تا شاید جواب بدهد، بنابراین کافی است به عبارت زیر رادیکال کمی دقت کنیم و به‌ویژه  $2\sqrt{x-1}$  که کلید معماست. عبارت  $x + 2\sqrt{x-1}$  همان  $(\sqrt{x-1})^2 + 1^2 + 2\sqrt{x-1}$  و عبارت  $x - 2\sqrt{x-1}$  همان  $(\sqrt{x-1})^2 + 1^2 - 2\sqrt{x-1}$  است، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 1 + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 1 - 2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = 2 \end{aligned}$$

عبارت  $\sqrt{x-1}+1$  همواره مثبت است و از قدر مطلق خارجش می‌کنیم. اما در مورد  $\sqrt{x-1}-1$ ؛ اگر مثبت یا صفر باشد (یعنی  $\sqrt{x-1} \geq 1 \Rightarrow x \geq 2$ ) داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 &= 2 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 \\ \Rightarrow \sqrt{x-1} &= 1 \Rightarrow x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{x \geq 2} x = 2 \text{ قق} \end{aligned}$$

و اگر  $\sqrt{x-1}-1$  منفی باشد (یعنی  $1 \leq x < 2 \xrightarrow{x > 1} \sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow x < 2$ ) داریم:

$$\sqrt{x-1}+1 + 1 - \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \xrightarrow{1 \leq x < 2} 1 \leq x < 2$$

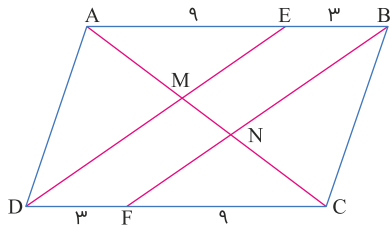
بنابراین این معادله به ازای تمامی مقادیر  $1 \leq x \leq 2$  صحیح است و بی‌شمار ریشه حقیقی دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

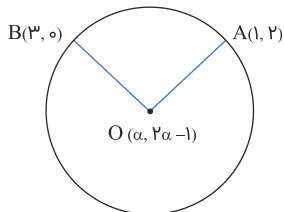
مثلث‌های  $AED$  و  $BCF$  به حالت دو ضلع و زاویه بین همنهشت‌اند. باتوجه به تساوی زوایای متناظر واضح است که  $DE \parallel BF$ ، پس طبق قضیه تالس داریم:



$$\triangle ANB : ME \parallel BN \Rightarrow \frac{NM}{AM} = \frac{BE}{AE} = \frac{3}{9} \Rightarrow \frac{NM}{AM} = \frac{1}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

فرض کنیم  $O(\alpha, 2\alpha - 1)$  مرکز دایره باشد. فاصله  $O$  از هر دو نقطه  $A(1, 2)$  و  $B(3, 0)$  یکسان بوده و برابر با شعاع دایره است. بنابراین داریم:



$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1 - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha + 4\alpha^2 + 9 - 12\alpha = \alpha^2 + 9 - 6\alpha + 4\alpha^2 + 1 - 4\alpha$$

$$\Rightarrow -14\alpha = -10\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow O(0, -1)$$

$$R = OA = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{10}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

منظور سؤال این است که دو خط داده شده و خط  $y = -x$  در یک نقطه متقاطعاند. بنابراین ابتدا نقطه برخورد  $y = -x$  و  $y = -x + 4 = 0$  را به دست آورده و سپس در خط سوم صدق می‌دهیم تا  $a$  معین گردد:

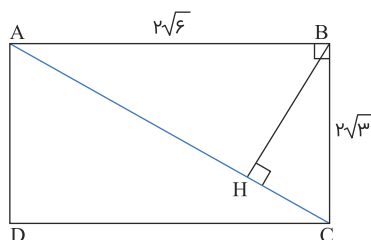
$$\begin{cases} y - x + 4 = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} -2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -2$$

$\Rightarrow$  نقطه برخورد:  $(2, -2)$

$$(2, -2) \in ax - y - \lambda = 0 \Rightarrow a(2) - (-2) - \lambda = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم

مستطیل ABCD را در نظر می‌گیریم. فاصله هر رأس مانند B از قطر مقابل، همان ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\triangle ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 24 + 12 = 36 \Rightarrow AC = 6$$

$$AB \cdot BC = AC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow BH = 2\sqrt{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

دامنه تابع  $f(x) = \frac{-1}{[x] + [-x]}$  برابر  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  است. چرا که  $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$  و مخرج نمی‌تواند صفر باشد. اگر دامنه  $f(x) = \frac{-1}{-1} = 1$  آن‌گاه  $x \notin \mathbb{Z}$  است. از طرفی می‌دانیم:  $g(x) = \tan \times \cot = 1$  است. پس فقط باید دامنه دو تابع برابر باشد. دامنه  $g(x)$  هم باید برابر  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  شود:

$$g(x) = \tan ax \times \cot ax = \frac{\sin ax}{\cos ax} \times \frac{\cos ax}{\sin ax} \Rightarrow \sin ax \times \cos ax \neq 0$$

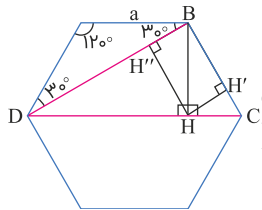
$$ax \neq \frac{k\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2a}$$

اگر بخواهیم دامنه  $f$  و  $g$  برابر باشد، باید:

$$\frac{k\pi}{2a} = k \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به شکل می‌بایست نسبت  $\frac{HH'}{HH''}$  را محاسبه کنیم:



باتوجه به اندازه زوایای داخلی شش ضلعی منتظم، می‌توان دریافت که مثلث  $BCD$  قائم‌الزاویه بوده و ارتفاع  $BH$ ، ارتفاع وارد بر وتر آن می‌باشد. پس مثلث‌های  $BCH$  و  $BDH$  به حالت دو زاویه متشابه‌اند:  $(\hat{BCH} = \hat{HBD}$  و  $\hat{BHC} = \hat{BHD} = 90^\circ$ )

باتوجه به اینکه نسبت ارتفاع‌های متناظر دو مثلث متشابه با نسبت اضلاع آن‌ها برابر است، داریم:

$$\triangle BCH \sim \triangle BDH \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{BC}{BD} \xrightarrow{BC=a, BD=a\sqrt{3}} \frac{HH'}{HH''} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

یادآوری: طول قطر کوچک شش ضلعی منتظمی به ضلع  $a$  برابر با  $a\sqrt{3}$  است.

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

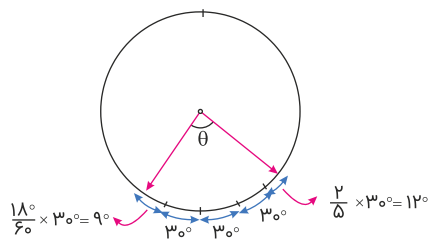
حاصل جمع ریشه‌های معادله  $x^2 - (b+2)x - b = 0$ ، دو برابر مجموع ریشه‌های معادله  $x^2 - ax + (a-4) = 0$  است و حاصل ضرب ریشه‌های آن نیز ۴ برابر خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} b+2=2a \\ -b=4(a-4) \end{cases} \Rightarrow a=3, b=4 \Rightarrow b-a=1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرازی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

روش اول:

ساعت  $12$  :  $18$  را رسم می‌کنیم:



طی  $12$  ساعت، عقربه ساعت‌شمار یک دور یعنی  $360$  درجه می‌چرخد؛ پس هر ساعت،  $30$  درجه دوران می‌کند.

با گذشت  $18$  دقیقه، عقربه ساعت‌شمار  $30^\circ \times \frac{18}{60}$  به جلو می‌رود، یعنی  $9^\circ$ ؛ پس زاویه بین عقربه‌ها  $\theta$  برابر است با:

$$\theta = 9^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 12^\circ = 111^\circ$$

$111^\circ$  را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$111^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{37\pi}{60}$$

روش دوم:

نکته: برای محاسبه زاویه بین عقربه‌های ساعت از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{زاویه} = \text{ساعت} \times 30 - \text{دقیقه} \times \frac{5}{5}$$

$$\text{زاویه} = 12 \times 30 - 18 \times \frac{5}{5} = 111^\circ$$

$111^\circ$  را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$111^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{37\pi}{60}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرازی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای پیدا کردن نقاط برخورد  $f(x)$  را برابر  $g(x)$  می‌گذاریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 - x + 3 = -x^2 + m \Rightarrow 3x^2 - x + 3 - m = 0$$

تفاضل ریشه‌ها همان اختلاف طول‌های نقاط برخورد دو منحنی است. داریم:

$$\begin{aligned} \text{تفاضل ریشه‌ها} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 12(3 - m)}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{1 - 12(3 - m)} = 1 \\ \Rightarrow 1 - 12(3 - m) &= 1 \Rightarrow 12(3 - m) = 0 \Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$f + 1 = \{(-1, 1), (1, 3), (3, 0), (4, 4)\}$$

$$\left(\frac{g-1}{f+1}\right)(-1) = \frac{2}{1} = 2, \quad \left(\frac{g-1}{f+1}\right)(1) = \frac{-2}{3}$$

$$\left(\frac{g-1}{f+1}\right)(3) = \frac{2}{0} \quad \times, \quad \left(\frac{g-1}{f+1}\right)(4) = \frac{7}{4}$$

$$\text{حاصل ضرب مقادیر برد تابع} : 2 \times \frac{-2}{3} \times \frac{7}{4} = -\frac{7}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\sin 51^\circ \cos 66^\circ + \sin \frac{11\pi}{3} \cos \frac{17\pi}{6} = \sin(36^\circ + 90^\circ + 60^\circ) \cos(72^\circ - 60^\circ)$$

$$+ \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) = (\cos 60^\circ)(\cos 60^\circ) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ 5 - x > 0 \Rightarrow x < 5 \\ 5 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 5, x \neq 4$$

$$\log_{5-x}(x-1) + \log_{5-x}(x+2) = \log_{5-x}((x-1)(x+2)) = \log_{5-x} 4 \\ \Rightarrow (x-1)(x+2) = 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = 2$$

که جواب  $x = -3$  قابل قبول نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در نقاط ابتدا و انتهای بازه، قطعاً حد نداریم. در  $x = -3$ ، تابع، فاقد همسایگی چپ است و حد چپ نداریم. در  $x = 3$  هم فاقد همسایگی راست بوده و حد راست نداریم؛ اما در کلیه نقاط دیگر، حد چپ و راست هر دو از ضابطه بالایی  $f$  به دست می‌آیند و باهم برابرند و حد موجود است.

دقت کنید موقع محاسبه حد در یک نقطه، در همسایگی محذوف آن نقطه قرار داریم. به همین دلیل است که حتی در صورت محاسبه حد در نقاط صحیح این بازه مانند  $x = 1$ ،  $x = 2$  و ... هم باز در ضابطه بالایی  $f$  قرار می‌گیریم. ضمناً توجه کنید  $x = 0$  از دامنه تابع حذف شده و جزء نقاط مورد بررسی نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تعداد داده‌ها باید ۱۰ تا باشد که داده‌های پنجم و ششم وسط افتاده باشند. باتوجه به اینکه تعداد داده‌ها زوج است و داده‌ها متمایزند، پس میانه نمی‌تواند یکی از داده‌ها باشد. بنابراین منظور از مجموع داده‌های قبل و بعد از میانه، همان مجموع کل داده‌هاست. لذا داریم:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}} = \frac{400}{10} = 40$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\log_{x^2+3x}(x) + \log_x(x+3) = 1$$

برای یکسان کردن پایه لگاریتم‌ها، لگاریتم اول را طبق قاعده  $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$  می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\log_x(x^2+3x)} + \log_x(x+3) = 1$$

برای ساده کردن  $\log_x(x^2+3x)$  داریم:

$$\log_x(x^2+3x) = \log_x x(x+3) = \log_x x + \log_x(x+3) = 1 + \log_x(x+3)$$

پس معادله به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{1 + \log_x(x+3)} + \log_x(x+3) = 1 \xrightarrow{\log_x(x+3)=A} \frac{1}{1+A} + A = 1$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } 1+A} 1 + A(1+A) = 1 + A \Rightarrow 1 + A + A^2 = 1 + A \Rightarrow A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$$

با فرض  $A \neq -1$

$$\Rightarrow \log_x(x+3) = 0 \Rightarrow x+3 = 1 \Rightarrow x = -2$$

باید برگردیم و جواب به دست آمده را در معادله اولیه چک کنیم. واضح است که  $x = -2$  در دامنه تعریف توابع لگاریتمی موجود در معادله، قرار ندارد و غیرقابل قبول است؛ پس معادله جواب ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\bar{x} = \frac{a-1+a+1+a+3+a+5}{4} = \frac{4a+8}{4} = a+2$$

برای محاسبه واریانس اعداد  $a-1$  و  $a+1$ ،  $a+3$ ،  $a+5$  مقدار  $a$  واحد از همه کم می‌کنیم تا به داده‌های  $5$ ،  $3$ ،  $1$  و  $-1$  برسیم. این عدد تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت  $2$  می‌دهند؛ پس:

$$\sigma^2 = \frac{4^2 - 1}{12} \times 2^2 = 5$$

چون میانگین و واریانس برابرند، داریم:

$$a+2 = 5 \Rightarrow a = 3$$

در پایان باید واریانس  $12$ ،  $9$ ،  $6$  و  $3$  را محاسبه کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{4^2 - 1}{12} \times 3^2 = 11/25$$

نکته: واریانس  $n$  داده آماری که تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت  $d$  می‌دهند برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \times d^2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

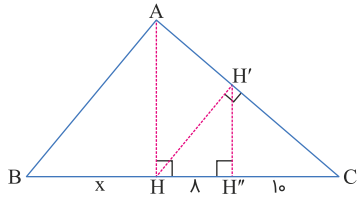
اگر فاصله  $A$  تا  $B$  را  $x$  در نظر بگیریم، واضح است که نفر اول مسافت  $x$  را با سرعت  $120$  کیلومتر بر ساعت و نفر دوم مسافت  $50 - x$  را با سرعت  $80$  کیلومتر بر ساعت طی کرده است. حال از آنجا که نفر دوم،  $1$  ساعت دیرتر از نفر اول به مقصد رسیده، پس داریم:

$$t_2 - t_1 = 1 \Rightarrow \frac{x_2}{v_2} - \frac{x_1}{v_1} = 1 \Rightarrow \frac{x - 50}{80} - \frac{x}{120} = 1 \Rightarrow \frac{3x - 150 - 2x}{240} = 1$$

$$\Rightarrow x - 150 = 240 \Rightarrow x = 390$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

از قضیهٔ تالس دو مرتبه استفاده می‌کنیم:



$$\left. \begin{array}{l} HH' \parallel AB \Rightarrow \frac{CH'}{AH'} = \frac{CH}{BH} \\ H'H'' \parallel AH \Rightarrow \frac{CH'}{AH'} = \frac{CH''}{HH''} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{CH''}{HH''} \Rightarrow \frac{18}{x} = \frac{10}{\lambda}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lambda \times 18}{10} = 14/4$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

صادق طاهری

اگر یک قضیه بخواهد به صورت دوشرطی ( $p \Leftrightarrow q$ ) مطرح شود، باید هم  $p \Rightarrow q$  و هم  $q \Rightarrow p$  برقرار باشد؛ یعنی هم خود قضیه و هم عکس قضیه، برقرار باشند.

ابتدا برقراری خود قضیه را در هر ۶ حالت بررسی می‌کنیم:

واضح است که از تساوی  $x^3 = y^3$ ، تساوی  $x = y$  نتیجه می‌شود و از آنجا می‌توان همه حکم‌ها به جز  $\sqrt{x} = \sqrt{y}$  را نتیجه گرفت.

ببینید:

$$x = y \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^3 z = y^3 z \\ \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y} \\ \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \\ \cos x = \cos y \end{cases}$$

اما (مثال نقض  $x = y = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ )

پس فعلاً مورد پ حذف شد. در مورد ۵ گزاره باقی‌مانده، برقراری عکس قضیه را بررسی می‌کنیم:

(الف) (مثال نقض  $x = 1, y = -1 \Rightarrow x^2 = y^2$ )

(ب) (مثال نقض  $x = 1, y = 2, z = 0 \Rightarrow x^3 z = y^3 z$ )

(ت) صحیح است  $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y} \Rightarrow x = y$

(ث) (مثال نقض  $x = 1, y = -1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ )

(ج) (مثال نقض  $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos x = \cos y$ )

پس فقط در مورد ت، هم خود قضیه و هم عکس قضیه برقرار است و قضیه دوشرطی می‌باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی

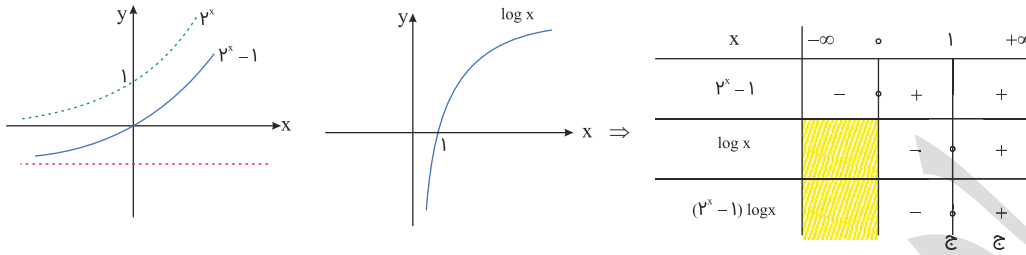
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی یازدهم

برای تعیین دامنه تابع  $f(x)$ ، ابتدا دامنه لگاریتم را مشخص کرده و سپس عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. برای تعیین علامت عبارت‌های ضرب، کافی است تک‌تک عبارت‌های زیر رادیکال را جداگانه تعیین علامت کرده و با رسم جدول تعیین علامت، علامت عبارت زیر رادیکال را به دست آوریم.

دقت کنیم برای تعیین علامت توابع  $y = \log x$  و  $y = 2^x - 1$  می‌توانیم از نمودار آن‌ها نیز کمک بگیریم. داریم:

$$y = \log x \xrightarrow{\text{دامنه لگاریتم}} x > 0$$



$$(2^x - 1) \cdot \log x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

پس دامنه تعریف تابع شامل تمامی اعداد طبیعی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

از آنجا که  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $۴x^2 + ۷x - ۳ = ۰$  هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{4}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-3}{4}$$

حالا برای پیدا کردن  $a$  در معادله  $۰ = -2x^2 + ax + b$ ، کافی است جمع ریشه‌ها را در این معادله به دست آوریم:

$$S = (2\alpha + 2)^2 + (2\beta + 2)^2 = (4\alpha^2 + 8\alpha + 4) + (4\beta^2 + 8\beta + 4)$$

$$= 4(\alpha^2 + \beta^2) + 8(\alpha + \beta) + 8$$

$$= 4((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + 8(\alpha + \beta) + 8$$

$$\frac{\alpha + \beta = \frac{-7}{4}}{\alpha\beta = \frac{-3}{4}} \rightarrow 4\left(\left(\frac{-7}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{-3}{4}\right)\right) + 8\left(\frac{-7}{4}\right) + 8$$

$$= 4\left(\frac{49}{16} + \frac{3}{2}\right) - 14 + 8 = \frac{49}{4} + 6 - 14 + 8 = \frac{49}{4}$$

از طرفی می‌دانیم که جمع ریشه‌ها در معادله  $۰ = -2x^2 + ax + b$  برابر است با  $\frac{a}{2}$ ، پس:

$$\frac{a}{2} = \frac{49}{4} \Rightarrow a = \frac{49}{2} = ۲۴/۵$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا نمودار تابع  $f^{-1}$  را رسم می‌کنیم. داریم:

برای تعیین دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{5}{f^{-1}(x)}}$ ، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم.  $y = x$

$$\frac{5}{f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) > 0 \xrightarrow{\text{باتوجه به نمودار } f^{-1}} x \in (0, \frac{1}{5})$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای پیدا کردن نقطه برخورد دو منحنی  $f$  و  $g$  کافی است، معادله  $f = g$  را حل کنیم. قبل از آن، کمی ضابطه تابع  $g$  را ساده‌تر می‌کنیم تا پایه آن مانند تابع  $f$ ، عدد ۲ شود:

$$g(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x} - 3 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^x - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 = \frac{1}{2^x} - 3$$

$$f = g \Rightarrow 2^{x+2} = \frac{1}{2^x} - 3 \Rightarrow 4 \times 2^x = \frac{1}{2^x} - 3$$

با تغییر متغیر  $2^x = t$  داریم:

$$4t = \frac{1}{t} - 3 \Rightarrow 4t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1, \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 2^x = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

با جایگذاری  $x = -2$  در یکی از توابع  $f$  یا  $g$ ، مختصات نقطه تلاقی به صورت  $(-2, 1)$  خواهد شد و فاصله آن تا مبدأ مختصات برابر است

$$\text{با: } \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

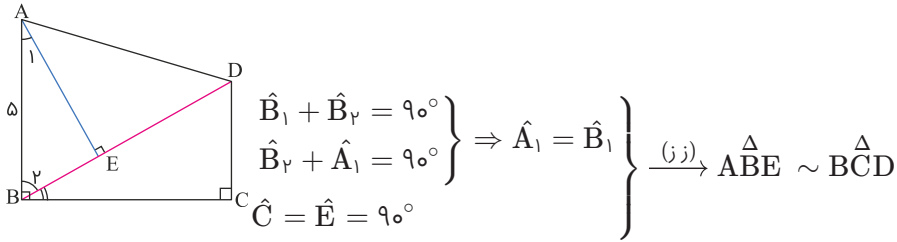
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

عبارت را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \cot^2(54^\circ - 3^\circ) \tan(36^\circ - 6^\circ) + \lambda \sin^2(36^\circ + 135^\circ) \cos(54^\circ + 3^\circ) \\ &= \cot^2(3^\circ) \tan(-6^\circ) + \lambda \sin^2(135^\circ) (-\cos 3^\circ) \\ &= (\sqrt{3})^2 \times (-\sqrt{3}) + \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -5\sqrt{3} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مثلث‌های ABE و BCD متشابه‌اند، زیرا:



باتوجه به اینکه اضلاع مقابل به زوایای مساوی باهم متناسب‌اند، نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{CD}{BE} = \frac{BC}{AE} \Rightarrow AE \times CD = BC \times BE \xrightarrow{\frac{BC=7}{BE=4}} AE \times CD = 7 \times 4 = 28$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تابع  $y = 2^{x+2}$  همواره مثبت است، پس می‌توانیم آن را از قدر مطلق خارج کنیم:

$$2^{x+2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x} \Rightarrow 4 \times 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{2^x=A} 4A = \frac{1}{A}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1 \\ A = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = -\frac{1}{2} \times \end{cases}$$

معادله فقط یک جواب دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

میانگین و واریانس داده‌های ۱۱ و ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۱ را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{1 + 4 + 5 + 7 + 8 + 11}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{6} = \frac{25 + 4 + 1 + 1 + 4 + 25}{6} = 10$$

اگر تعدادی داده برابر به داده‌ها اضافه کنیم و میانگین تغییری نکند، یعنی تک‌تک آن داده‌ها، با میانگین برابر بوده‌اند. فرض کنیم  $n$  تا داده ۶ به داده‌هایمان اضافه کرده‌ایم:

$$1, 4, 5, 7, 8, 11, \underbrace{6, 6, \dots, 6}_{n}$$

میانگین همان ۶ است. واریانس در این حالت باید ۶ واحد از ۱۰ کمتر شود، یعنی باید ۴ باشد:

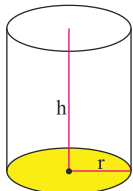
$$\sigma^2 = \frac{(1-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2 + n(6-6)^2}{n+6} \Rightarrow 4 = \frac{60}{6+n} \Rightarrow n = 9$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

می‌خواهیم حداکثر فلز به‌کاررفته در ساخت این قوطی دربار را محاسبه کنیم. به عبارتی می‌خواهیم ماکزیمم مساحت جانبی یک استوانه دربار را حساب کنیم.



$$S = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{کف}} = 2\pi r h + \pi r^2$$

$$\begin{aligned} 2r + h = 30 \\ h = 30 - 2r \end{aligned} \Rightarrow S = 2\pi r (30 - 2r) + \pi r^2$$

$$\Rightarrow S = 60\pi r - 4\pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow S = -3\pi r^2 + 60\pi r$$

از آنجاکه تابع  $S$  برحسب  $r$  یک تابع درجه‌دو است، ماکزیمم آن در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی باید:

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-60\pi}{2(-3\pi)} = 10$$

$$\Rightarrow S_{\text{max}} = -3\pi (10)^2 + 60\pi (10) = 300\pi$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

راه اول:

می‌دانیم:  $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ، پس  $x \in \mathbb{Z}$  در دامنه تعریف نمی‌باشد یعنی گزینه (۱) و (۲) نادرست‌اند و از طرفی باید  $1 - 2[x] \leq 0$ ، لذا  $[x] \geq \frac{1}{2}$  پس  $x \geq 1$  اما برای  $x$ های غیر صحیح یعنی:

$$D_f = [1, +\infty) - \mathbb{Z} = (1, +\infty) - \mathbb{N}$$

راه دوم:

باتوجه به اینکه به ازای هر عدد صحیح،  $[x] + [-x] = 0$  می‌شود، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) که شامل اعداد صحیح هستند، نادرست‌اند. از طرفی از بین اختلاف گزینه‌های (۳) و (۴) اگر عدد  $x = 2/5$  را انتخاب کنید، داریم:

$$\sqrt{\frac{1 - 2[2/5]}{[2/5] + [-2/5]}} = \sqrt{\frac{1 - 2 \times 0}{0 - 1}} = \sqrt{\frac{-3}{-1}} = \sqrt{3}$$

یعنی زیر رادیکال مثبت شد. به عبارتی  $x = 2/5$  قابل قبول است، پس گزینه (۳) که عدد  $2/5$  را ندارد، حذف می‌شود و گزینه (۴) درست است.

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

باتوجه به خاصیت تابع کسینوس، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin(3\alpha + 4\beta)}{\cos(-6\alpha - 7\beta)} = \frac{\sin(3\alpha + 4\beta)}{\cos(6\alpha + 7\beta)}$$

حالا سعی می‌کنیم با استفاده از رابطه  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$  کمان‌های جلوی سینوس و کسینوس را ساده‌تر کنیم:

$$۱) 3\alpha + 4\beta = 3\alpha + 3\beta + \beta = 3(\alpha + \beta) + \beta = 3\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta = \frac{\pi}{2} + \beta$$

$$۲) 6\alpha + 7\beta = 6\alpha + 6\beta + \beta = 6(\alpha + \beta) + \beta = 6\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta = \pi + \beta$$

پس داریم:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi + \beta)} = \frac{\cos \beta}{-\cos \beta} = -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

$$۴ \sin(x - ۵\pi) - \cos(x + \frac{۳\pi}{۲}) = ۲$$

$$۴ \sin(x + \pi - \underbrace{\frac{۶\pi}{۲}}_{\text{قابل حذف}}) - \cos(x + \frac{۳\pi}{۲}) = ۲ \Rightarrow ۴ \sin(x + \pi) - \cos(x + \frac{۳\pi}{۲}) = ۲$$

$$\Rightarrow -۴ \sin x - \sin x = ۲ \Rightarrow \sin x = \frac{-۲}{۵}$$

عبارتی که سؤال می‌خواهد را ساده می‌کنیم:

$$\tan(x - \frac{۳\pi}{۲}) = -\tan(\frac{۳\pi}{۲} - x) = -\cot x$$

حالا با داشتن  $\sin x = \frac{-۲}{۵}$  مقدار  $\cot x$  را حساب می‌کنیم:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{(\frac{-۲}{۵})^2}$$

$$\Rightarrow \cot^2 x = \frac{۲۵}{۴} - 1 = \frac{۲۱}{۴} \xrightarrow{\text{cot در ربع سوم مثبت است}} \cot x = \frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$$

پس:

$$\tan(x - \frac{۳\pi}{۲}) = -\cot x = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۲}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\begin{aligned} \log_6 \sqrt{۲۴۳} &= \log_6 \sqrt{۳^۵} = \log_6 ۳^{\frac{۵}{۲}} = \frac{۵}{۲} \log_6 ۳ = \frac{۵}{۲} \log_6 \left(\frac{۶}{۲}\right) = \frac{۵}{۲} (\log_6 ۶ - \log_6 ۲) = \frac{۵}{۲} (1 - \log_6 ۲) \\ &= \frac{۵}{۲} (1 - ۰/۴) = \frac{۵}{۲} (۰/۶) = ۱/۵ \end{aligned}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

ابتدا باید داده‌های موردنظر را مرتب کنیم تا میانه آن‌ها مشخص شود. واضح است که تعداد بیماران ویزیت شده در هر روز یک عدد حسابی می‌باشد. پس داریم:

$x - 3 \geq 0$  و در نتیجه:  $x \geq 3$ . با این شرط  $x + 3 \leq 2x$  است. پس ترتیب نزولی به صعودی داده‌ها به صورت  $x + 3, 2x, 4x, x - 1$  و  $x - 3$  خواهد بود. پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{(x - 3) + (x - 1) + (x + 3) + 2x + 4x}{5} = \frac{9x - 1}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{میانه=میانگین}} \frac{9x - 1}{5} = x + 3$$

$$\Rightarrow 9x - 1 = 5x + 15 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

پس داده‌ها به صورت ۱۶, ۸, ۷, ۳, ۱ می‌باشند و چارک سوم برابر است با:

$$Q_3 = \frac{8 + 16}{2} = 12$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ضابطه وارون تابع خطی  $f(x) = ax + b$  را می‌نویسیم:

$$y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y - b}{a} \Rightarrow \text{عوض کردن جای } x \text{ و } y \Rightarrow y = \frac{x - b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

دو تساوی داده شده را با  $f$  و  $f^{-1}$  به دست آمده می‌نویسیم: (از  $f(0) \neq 0$  نتیجه می‌گیریم  $b \neq 0$ )

$$f^{-1}(0) = f(0) \Rightarrow \frac{-b}{a} = b \xrightarrow{\times \frac{1}{b}} \frac{-1}{a} = 1 \Rightarrow a = -1$$

تا این جا داریم:  $f^{-1}(x) = f(x) = -x + b$

$$f^{-1}(2) = 7 \Rightarrow -2 + b = 7 \Rightarrow b = 9$$

$$\Rightarrow f(x) = -x + 9 \Rightarrow f(4) = -4 + 9 = 5$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

قبل از اینکه به مبحث تساوی دو تابع  $f$  و  $g$  بپردازیم، به مطالب زیر در مورد هریک از این دو تابع توجه کنید:  
در مورد تابع  $f$  دقت کنید که  $x = 0$  در هر دو ضابطه تابع قابل جایگذاری است:

$$\begin{cases} \text{ضابطه بالا: } f(0) = -1 \\ \text{ضابطه پایین: } f(0) = m - 3 \end{cases}$$

برای آنکه شرط تابع بودن  $f$  برقرار شود، باید:

$$m - 3 = -1 \Rightarrow m = 2$$

در مورد تابع  $g$ ، باتوجه به ضابطه بالا، واضح است که فقط  $x = 1$  در دامنه این ضابطه قرار ندارد، پس  $k = 1$  و مطابق ضابطه پایین:

$$n = g(1)$$

از آنجاکه دو تابع  $f$  و  $g$  برابرند، پس:  $g(1) = f(1)$  و مطابق با ضابطه پایین تابع  $f$ :

$$f(1) = m + 2 - 3 = m - 1 = 2 - 1 = 1$$

پس:

$$n = g(1) = f(1) = 1 \Rightarrow n = 1$$

با پارامترهای به دست آمده، ضابطه دو تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{x-1}{1+|x|} & ; x \leq 0 \\ 2 + 2x - 3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; x \leq 0 \\ 2x - 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

برای آنکه دو تابع  $f$  و  $g$  مساوی شوند، باید:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x - 1} = 2x - 1 \Rightarrow ax^2 + bx + c = (2x - 1)(x - 1)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

پس:

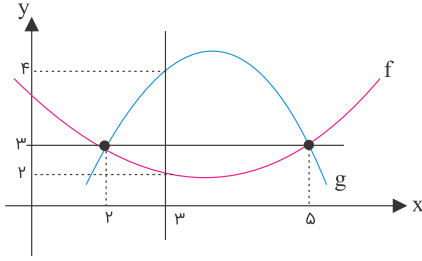
$$a - b + c - m + n - k = 2 - (-3) + 1 - (2) + 1 - (1) = 4$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



تفاضل دو سهمی باز هم یک سهمی خواهد بود:

فرض کنید  $h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$\begin{cases} h(2) = f(2) - g(2) = 3 - 3 = 0 \\ h(5) = f(5) - g(5) = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow h(x) = a(x - 2)(x - 5) \quad (1)$$

ازطرفی:

$$h(3) = f(3) - g(3) = 2 - 4 = -2 \xrightarrow{(1)} a(1)(-2) = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow h(x) = (x - 2)(x - 5) \Rightarrow h(-1) = 18 \Rightarrow (f - g)(-1) = 18$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

فرض کنید طول هر قدم شروین  $x$  سانتی‌متر باشد، در این صورت طول هر قدم علی  $x + 10$  سانتی‌متر است. اگر علی با  $n$  قدم مسیر را طی کند، شروین با  $n + 100$  قدم طی می‌کند.

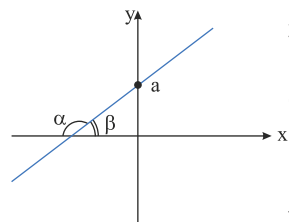
$$\begin{aligned} \text{شروین: } 720 &= \frac{x}{100} \times (n + 100) \\ \text{علی: } 720 &= \frac{x + 10}{100} \times n \\ \Rightarrow x(n + 100) &= (x + 10)n \Rightarrow xn + 100x = xn + 10n \Rightarrow n = 10x \end{aligned}$$

در رابطه دوم جایگذاری می‌کنیم  $n = 10x$ :

$$\begin{aligned} 720 &= \frac{x + 10}{100} \times n \Rightarrow 720 = \frac{x + 10}{100} \times 10x \Rightarrow 7200 = x^2 + 10x \\ \Rightarrow x^2 + 10x - 7200 &= 0 \Rightarrow (x + 90)(x - 80) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -90 \times \\ x = 80 \end{cases} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم انسانی دهم

باتوجه به نمودار، نقطه  $a$  محل تلاقی نمودار  $f^{-1}$  با محور  $y$ ها است که برای پیدا کردن آن کافی است  $f^{-1}(0)$  را به دست آوریم و البته به جای آن، بهتر است معادله  $f(x) = 0$  را حل کنیم:



$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرف دیگر زاویه  $\alpha$ ، زاویه بین نمودار تابع  $f^{-1}$  با جهت منفی محور  $x$ ها است. می‌دانیم که تانژانت زاویه بین این خط با جهت مثبت محور  $x$ ها همان شیب خط می‌باشد. پس:

$$\tan \beta = \text{شیب خط } f^{-1} = \frac{1}{\text{شیب خط } f} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta = -\frac{1}{3}$$

پس:

$$a \tan \alpha = 1 \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

سعی می‌کنیم طرفین تساوی را هم‌پایه کنیم:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^x = (x)^{\sqrt{x+3}} \Rightarrow x^{\frac{x}{2}} = (x)^{\sqrt{x+3}}$$

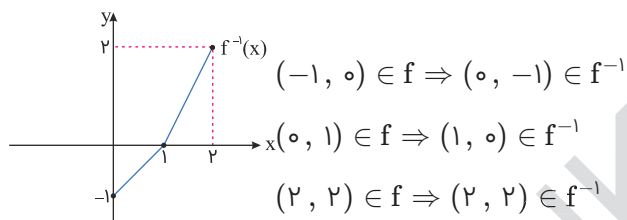
یک جواب قطعی و واضح این معادله،  $x = 1$  است که به هر توان برسد یک می‌شود. برای پیدا کردن سایر جواب‌ها، حالا که پایه‌های دو طرف یکسان است، کافی است توان‌های دو طرف را برابر قرار دهیم:

$$\frac{x}{2} = \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می‌رسانیم}} \frac{x^2}{4} = x+3 \Rightarrow x^2 = 4x+12 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6, -2$$

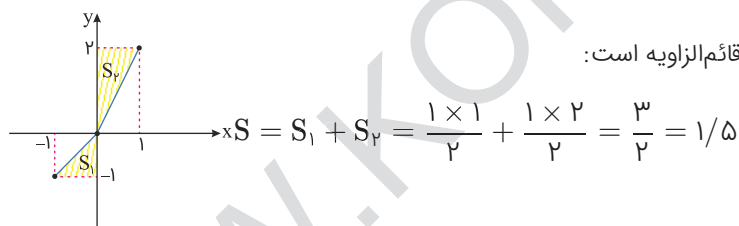
دقت کنید! باید برگردیم و جواب‌ها را در معادله اولیه یعنی  $\frac{x}{2} = \sqrt{x+3}$  چک کنیم، واضح است که  $x = -2$  غیرقابل قبول است. پس مجموع جواب‌های این معادله  $1 + 6 = 7$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا باید با قرینه کردن نمودار  $f(x)$  نسبت به خط  $y = x$ ، نمودار  $f^{-1}(x)$  را به دست آوریم. برای این منظور، راحت‌تر است که نقاط متناظر با نقاط مشخص شده در نمودار  $f$  را در نمودار  $f^{-1}$  پیدا کرده و به هم وصل کنیم:



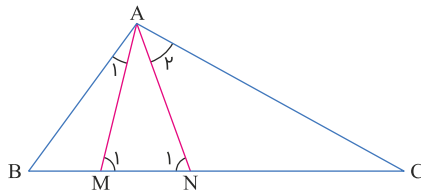
در قدم بعدی، با یک واحد انتقال افقی نمودار  $f^{-1}(x)$  به سمت چپ، نمودار  $f^{-1}(x+1)$  را رسم می‌کنیم:



واضح است که ناحیه ایجادشده با محور  $y$ ها، شامل دو مثلث قائم‌الزاویه است:

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

زوایای  $M_1$  و  $N_1$  باهم برابرند، زیرا:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM : \hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} \\ \triangle ACN : \hat{N}_1 = \hat{A}_2 + \hat{C} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\hat{A}_1 = \hat{C}}{\hat{A}_2 = \hat{B}} \rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1 \Rightarrow AM = AN \end{array}$$

حال از تشابه دو مثلث  $ABM$  و  $ACN$  ( $\hat{A}_1 = \hat{C}$ ,  $\hat{A}_2 = \hat{B}$ ) طول  $AM$  را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{NC} = \frac{BM}{AN} \Rightarrow AM \times AN = BM \times NC \\ AM = AN \end{array} \right\} \Rightarrow AM^2 = BM \times NC \Rightarrow AM = \sqrt{3 \times 4} \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

تلاقی یک تابع خطی با وارونش حتماً روی خط  $y = x$  است. می‌دانیم که کلیه نقاط روی این خط دارای طول و عرض برابرند. پس امکان ندارد که تلاقی یک تابع خطی با وارونش، نقطه‌ای باشد که عرض آن دو برابر طولش است، مگر آنکه طول و عرض این نقطه، هر دو صفر باشند یعنی خط موردنظر از مبدأ مختصات بگذرد. برای این منظور باید  $b$  لزوماً برابر صفر شود. اما دقت کنید از کنار  $a$  بی‌تفاوت نگذرید.  $a$  حتماً باید مخالف صفر باشد چون در غیر این صورت تابع خطی  $y = ax + b$  به صورت تابع ثابت  $y = b$  درمی‌آید و اصلاً یک‌به‌یک نیست که بخواهد وارون‌پذیر شود. پس  $a$  هر مقداری به جز صفر می‌تواند باشد، یعنی برای  $a$  سه مقدار  $1$ ،  $2$  و  $-1$  و برای  $b$  فقط یک مقدار وجود دارد.

توجه: دقت کنید در حالتی که  $y = x$  شود، تابع و وارونش روی یکدیگر قرار می‌گیرند و بی‌شمار جواب دارد؛ پس حالتی که عرض نقطه، دو برابر طولش است، یک حالت خاص از بی‌شمار جواب است و فقط در مبدأ اتفاق می‌افتد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

طرفین معادله را در ک.م.م مخرج‌ها یعنی  $(x+3)(x-3)$  ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(x-3)(x-3) + x(x+3) = 18 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x^2 + 3x) = 18 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$$

در این لحظه است که احتمال دارد  $P = \frac{c}{a} = \frac{-9}{2}$  را به عنوان جواب تست انتخاب کنید!

اما دقت کنید که جواب‌های معادله اخیر،  $x = 3$  و  $x = -\frac{3}{2}$  هستند که چون  $x = 3$  مخرج دوتا از کسرها را در صورت معادله صفر می‌کند، غیرقابل قبول است و معادله فقط یک ریشه  $x = -\frac{3}{2}$  دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

کافی است معادله  $f(x) = g(x)$  را حل کنیم. برای یکسان کردن پایه‌های توابع  $f$  و  $g$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= (9 + 4\sqrt{5})^{\frac{1}{5}(x-1)} = ((\sqrt{5} + 2)^2)^{\frac{1}{5}(x-1)} = (\sqrt{5} + 2)^{\frac{2}{5}(x-1)} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{\frac{2}{5}(x-1)} = ((\sqrt{5}-2)^{-1})^{\frac{2}{5}(x-1)} = (\sqrt{5}-2)^{-\frac{2}{5}(x-1)} \end{aligned}$$

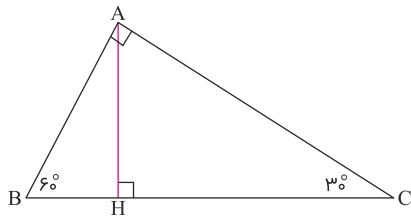
پس داریم:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{\frac{3}{5}x^2 - 3x + 4} = (\sqrt{5}-2)^{-\frac{2}{5}(x-1)} \\ \Rightarrow 3x^2 - 3x + 4 &= -3x + 2 \Rightarrow 3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

واضح است که معادله حاصل، جواب ندارد و لذا دو تابع  $f$  و  $g$ ، غیرمتقاطع‌اند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \quad (1)$$

پس برای محاسبه  $\frac{BC}{CH}$  کافی است  $\frac{AB^2}{AC^2}$  را محاسبه کنیم. می‌دانیم طول اضلاع روبه‌رو به زوایای  $30^\circ$  و  $60^\circ$ ، در یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب  $\frac{1}{2}$  وتر و  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وتر است، بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} \\ \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \end{array} \right. \quad (2)$$

حال باتوجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\frac{BC^2}{4}}{\frac{3}{4}BC^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی یازدهم

طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$\bar{x} = \frac{x+y+z}{3} = 4 \Rightarrow x+y+z = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{3} - \bar{x}^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{3} - 16 = 2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{3} = 18 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 54$$

با استفاده از دو رابطه فوق و اتحاد مربع سه جمله‌ای، میانگین  $xy$ ،  $yz$  و  $xz$  را به دست می‌آوریم:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx) \Rightarrow 144 = 54 + 2(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx = 45 \Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{3} = 15$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

وقتی نمودار یک تابع درجه دوم با محور  $x$ ها فقط در یک نقطه مشترک است، یعنی این تابع دارای ریشه مضاعف می‌باشد. حال از آنجاکه این نقطه مشترک در سمت راست محور  $y$ ها واقع شده، بدین معنا است که این ریشه مضاعف، مثبت می‌باشد. پس در نهایت معادله  $mx^2 - \lambda x + 2m - 4 = 0$  باید دارای ریشه مضاعف مثبت باشد. یعنی:

$$I) \Delta = 0 \Rightarrow (-\lambda)^2 - 4(m)(2m-4) = 0 \Rightarrow 64 - 8m^2 + 16m = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } -8} m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow m = -2, 4 \quad (1)$$

$$II) \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (1) \cap (2) : m = 4$$

پس فقط یک مقدار برای  $m$  به دست می‌آید و مجموع مقادیر ممکن ۴ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

بررسی پیوستگی توابع براکتی در بازه بسته:

۱- توجه به نقاط جهش تابع در بازه باز (همان نقاطی که داخل براکت صحیح می‌شود)

۲- پیوستگی راست در ابتدای بازه

۳- پیوستگی چپ در انتهای بازه

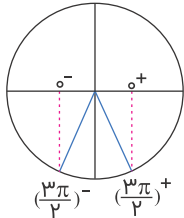
$$[-1, 3] \Rightarrow \begin{cases} ۱) \text{ طول‌های جهش } (-1, 3) : \overset{0}{0}, \overset{0}{1}, \overset{0}{2} \\ ۲) x = -1 \Rightarrow \begin{cases} (-1)^+ : (-1) \times \underbrace{[-(-1)^+]}_0 = 0 \\ f(-1) = -1 \end{cases} \\ ۳) x = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3^- : 3 \times \underbrace{[-(3)^-]}_{-3} = -9 \\ f(3) = -9 \end{cases} \end{cases}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

باتوجه به اینکه عبارات داخل جزء صحیح به ازای  $x \rightarrow \frac{1}{4}$ ، عدد صحیح می‌شود، باید حد چپ و راست را بررسی کنیم. مقدار کتانژانت به ازای  $(\frac{\pi}{4})^+$  کمی کمتر از یک و به ازای  $(\frac{\pi}{4})^-$  کمی بیشتر از یک است. زیرا که مقدار سینوس برای زوایای بزرگتر از  $\frac{\pi}{4}$  از مقدار کسینوس آن بیشتر می‌باشد. همچنین مقدار کسینوس به ازای  $(\frac{3\pi}{4})^+$  کمی بیشتر از صفر و به ازای  $(\frac{3\pi}{4})^-$  کمی کمتر از صفر است. (به دایره مثلثاتی زیر توجه کنید)



بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} (\sin \pi x [\cot \pi x] + [\cos 6\pi x] \cos \pi x) &= \sin(\frac{\pi}{4})^+ [\cot(\frac{\pi}{4})^+] + [\cos(\frac{6\pi}{4})^+] \cos(\frac{\pi}{4})^+ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times [1^-] + [0^+] \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} (\sin \pi x [\cot \pi x] + [\cos 6\pi x] \cos \pi x) &= \sin(\frac{\pi}{4})^- [\cot(\frac{\pi}{4})^-] + [\cos(\frac{6\pi}{4})^-] \cos(\frac{\pi}{4})^- \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times [1^+] + [0^-] \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 - 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

حد چپ و راست برابر و هر دو مساوی صفر هستند. پس حاصل حد برابر با صفر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

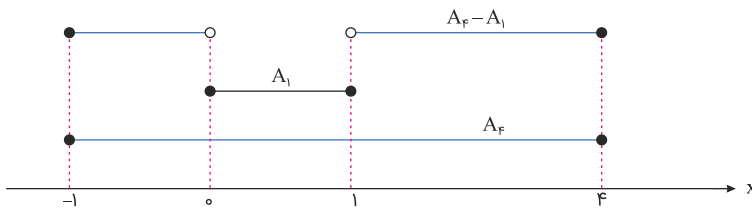
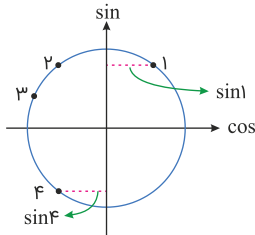
تستر علوم تجربی یازدهم

باید جای ۱ و ۴ رادیان را در دایره مثلثاتی بدانیم. داریم:

$$A_1 = [[\sin 1], 1] \xrightarrow{0 < \sin 1 < 1} A_1 = [0, 1]$$

$$A_F = [[\sin F], F] \xrightarrow{-1 < \sin F < 0} A_F = [-1, F]$$

$$A_F - A_1 = [-1, F] - [0, 1] = [-1, 0) \cup (1, F]$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

گرچه می‌توان این معادله را با بردن یکی از رادیکال‌ها به طرف دیگر تساوی و سپس به توان دو رساندن طرفین معادله حل کرد، اما راه‌حل جذاب‌تری هم وجود دارد که بر مبنای توجه به دامنه تابع از همان ابتدا و توجه به یکنوایی تابع است. دقت کنید:

$$\begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ x + 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -10 \end{cases} \rightarrow x \geq 3$$

حال از آنجاکه تابع  $y = \sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 10}$  از جمع دو تابع صعودی نامنفی تشکیل شده است، همواره صعودی خواهد بود و کمترین مقدار بُرد آن به ازای کمترین مقدار دامنه‌اش حاصل می‌شود:

$$y_{\min} = f(3) = \sqrt{0} + \sqrt{13}$$

این مقدار به دست آمده از عدد ۱۳ بزرگ‌تر است؛ بنابراین معادله  $y = 13$  جواب نخواهد داشت.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

$$y = 0 \Rightarrow \log \frac{a}{|x| - a} = 0 \Rightarrow \frac{a}{|x| - a} = 1 \Rightarrow |x| - a = a \Rightarrow |x| = 2a \Rightarrow x = \pm 2a$$

$$\xrightarrow{a > 0} B = 2a$$

از طرفی:

$$\frac{a}{|x| - a} > 0 \xrightarrow{a > 0} |x| - a > 0 \Rightarrow |x| > a \Rightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \Rightarrow A = -a$$

$$AB = 2a - (-a) = 3a = 6 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

حد صورت مسئله ابهام  $\frac{0}{0}$  است که باید باتوجه به فرمول‌های مثلثاتی، عامل صفرشونده را با یک شکل یکسان در صورت و مخرج کسر بسازیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin^2 x + 3 \cos x}{2 \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x}{2 \cos x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-(2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2)}{2 \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-(2 \cos x + 1)(\cos x - 2)}{2 \cos x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} -(\cos x - 2) = -\left(-\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{5}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به اینکه  $A$  و  $B$  مستقل هستند؛ داریم:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

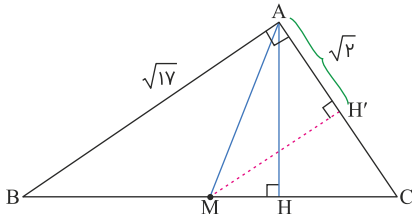
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow 1 = \alpha + 1 - \alpha^2 - \alpha(1 - \alpha^2) \Rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2(\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha \text{ مقادیر } = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

به شکل زیر دقت کنید. منظور از تصویر میانه بر روی ضلع قائم  $AC$ ، پاره خط  $AH'$  است.



حال از آنجا که میانه وارد بر وتر، نصف وتر است؛ یعنی  $AM = MC$ ، پس مثلث  $AMC$  متساوی الساقین است و از آنجا که در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم است، پس:

$$H'C = AH' = \sqrt{2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

حالا طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (\sqrt{17})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

منظور از فاصله رؤس غیرقائم تا پای ارتفاع وارد بر وتر، طول پاره خط‌های  $BH$  و  $CH$  است. می‌دانیم طبق روابط طولی:

$$AC^2 = BC \times CH \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = 5 \times CH \Rightarrow CH = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}, \quad BH = 5 - 1\frac{3}{5} = 3\frac{2}{5}$$

از آنجا که کمترین فاصله مدنظر است، جواب  $1\frac{3}{5}$  قابل قبول است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

ابتدا با حل نامعادله  $x^2 < 2|x|$ ، حدود  $x$  را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$x^2 - 2|x| < 0 \xrightarrow{x^2 = |x|^2} |x|^2 - 2|x| < 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x|}_{\text{نامنفی}} (|x| - 2) < 0 \Rightarrow |x| - 2 < 0 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

باتوجه به نامعادله  $x^2 < 2|x|$  مقدار  $x = 0$  غیرقابل قبول است، پس مجموعه جواب برابر است با:

$$-2 < x < 0 \text{ یا } 0 < x < 2$$

حال با معلوم بودن حدود  $x$ ، برای تعیین حاصل  $[-3x^2]$  کافی است محدوده عبارت داخل جزء صحیح را بسازیم. داریم:

$$-2 < x < 0 \text{ یا } 0 < x < 2 \Rightarrow 0 < x^2 < 4 \xrightarrow{x^{-3}} -12 < -3x^2 < 0 \Rightarrow [-3x^2] = \underbrace{\{-12, -11, \dots, -1\}}_{\text{مقدار } 12}$$

پس  $[-3x^2]$ ، دوازده مقدار صحیح به خود می‌گیرد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا برای پیدا کردن  $a$ ، معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(a, 4)$  و  $(7, b)$  را می‌نویسیم. می‌توانیم از دو نقطه  $(3, 2)$  و  $(4, 0)$  واقع بر خط استفاده کنیم:

$$\text{شیب} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{4 - 3} = -2$$

$$\text{معادله خط} : y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

با جایگذاری  $y = 4$  در معادله خط:  $a = 2$

با جایگذاری  $x = 7$  در معادله خط:  $b = -6$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4a} f(x) \xrightarrow{a=2} \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(8)$$

حال باید معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(7, -6)$  و  $(9, 0)$  را بنویسیم:

$$\text{شیب} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-6)}{9 - 7} = 3$$

$$\text{معادله خط} : y - 0 = 3(x - 9) \Rightarrow y = 3x - 27$$

با جایگذاری  $x = 8$  داریم:

$$f(8) = 3(8) - 27 = -3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای تعیین دامنه تعریف تابع  $f$ ، تنها کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم. داریم:

$$12 - 2^{x+1} - 2^{4-x} \geq 0 \xrightarrow{\div 2} 6 - 2^x - 2^{3-x} \geq 0 \Rightarrow 6 - 2^x - \frac{2^3}{2^x} \geq 0$$

$$\xrightarrow{2^x=t>0} t + \frac{8}{t} - 6 \leq 0 \xrightarrow{\times t>0} t^2 - 6t + 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 \leq t \leq 4 \xrightarrow{t=2^x} 2 \leq 2^x \leq 4 \Rightarrow 2^1 \leq 2^x \leq 2^2 \xrightarrow{\log_2} 1 \leq x \leq 2$$

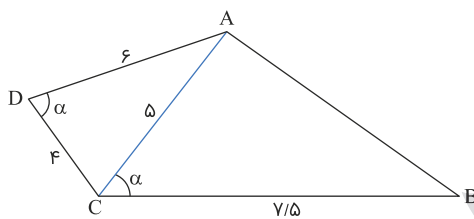
$$\Rightarrow x \in \left[ \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{1}, \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{2} \right] \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2 - 1 = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مثلث‌های  $ABC$  و  $ACD$  به حالت دو ضلع و زاویه بین متشابه‌اند، زیرا:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{ADC} = \widehat{ACB} = \alpha \\ \frac{AD}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABC \sim \triangle ACD$$

حال با توجه به نسبت تشابه داریم:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{5}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی یازدهم

تفاضل  $a$  از جذرش، یعنی  $\sqrt{a} - a$  برابر با ربع عدد  $a$  است، یعنی برابر با  $\frac{a}{4}$ ، پس معادله گنگ (رادیکالی) به دست آمده را ساخته و رادیکال را در یک طرف تساوی قرار می‌دهیم. داریم:

$$\sqrt{a} - a = \frac{a}{4} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{5}{4}a \xrightarrow{\text{توان } 2} a = \frac{25}{16}a^2$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{25}{16}a - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{16}{25} \end{cases}$$

باتوجه به اینکه  $x$  در ربع اول است، پس  $0 < \sin x < 1$  و  $a = 0$  قابل قبول نمی‌باشد، پس داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - a = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{در ربع اول } x} \cos x = \frac{3}{5} = 0/6$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$f(6) = 200(a^{\frac{6}{b}}) = 5400 \Rightarrow a^{\frac{6}{b}} = 27$$

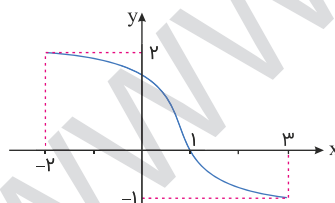
$$f(12) = 200(a^{\frac{12}{b}}) = 200(a^{\frac{6}{b}})^2 = 200(27^2) = 145800$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

زیر رادیکال باید نامنفی باشد. یعنی به دنبال  $x$ هایی هستیم که  $\frac{(x-2)f(x)}{x-1} \geq 0$ . باتوجه به شکل نمودار واضح است که به ازای  $x \in [-2, 1]$  و  $f(x) \geq 0$  و به ازای  $x \in [1, 3]$  و  $f(x) \leq 0$ . حال باید عبارت  $\frac{(x-2)f(x)}{x-1}$  را تعیین علامت کنیم:



$x$	-2	1	2	3
$\frac{x-2}{x-1}$	+	-	o	+
$f(x)$	+	o	-	-
$g(x)$	+	+	o	-

تعریف نشده

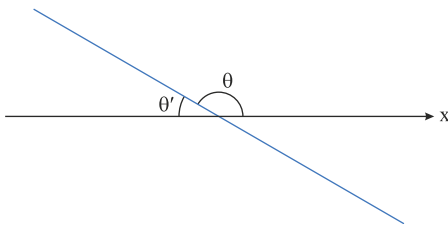
تابع در بازه  $[-2, 2]$  بزرگتر یا مساوی صفر است. اما دقت کنید  $x = 1$  که ریشه مخرج است قابل قبول نیست. بنابراین:

$$D_g = [-2, 2] - \{1\}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

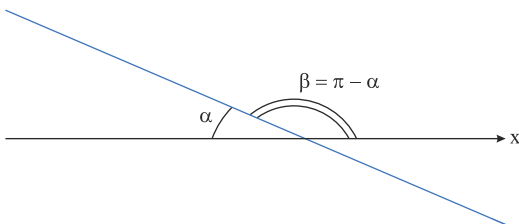


چون زاویه خط گذرنده از نقاط  $A(۴, k)$  و  $B(-۱۲, ۱۰)$  با جهت منفی محور  $x$  ها، زاویه  $\alpha$  است، پس برای تعیین مقدار  $k$ ، کافی است شیب خط  $AB$  را از دو طریق مختلف محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم. داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۱۰ - k}{-۱۲ - ۴} = \frac{k - ۱۰}{۱۶}$$

پس:

$$m_{AB} = \tan \beta = \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

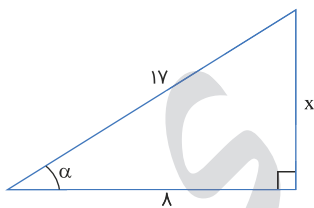


حال با معلوم بودن  $\cos \alpha = \frac{۸}{۱۷}$ ، مقدار  $\tan \alpha$  را به دست می آوریم. داریم:

$$\tan \alpha = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow m_{AB} = -\tan \alpha = -\frac{۱۵}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{k - ۱۰}{۱۶} = \frac{-۱۵}{۸} \Rightarrow k - ۱۰ = -۳۰ \Rightarrow k = -۲۰$$

تذکر: اعداد ۸، ۱۵، ۱۷ را به عنوان اعداد فیثاغورسی در ذهن نگه دارید.



طبق رابطه فیثاغورس  $x = ۱۵$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

با فرض  $x + \frac{1}{x} = t$ ، داریم:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{t^2 - 2} + 2 \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_t - 6 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t + 4)(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$$

پس:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{\times x} x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x + \frac{1}{x} = -4 \xrightarrow{\times x} x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = -4$$

در نتیجه مجموع ریشه‌ها  $-4 + 1 = -3$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

پیشامد موفقیت در آزمون اول را  $A$  و پیشامد موفقیت در آزمون دوم را  $B$  می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases} P(B) = x \\ P(A) = 3x \end{cases}$$

از طرفی:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 2x = \frac{P(A \cap B)}{3x} \Rightarrow P(A \cap B) = 6x^2$$

حال داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{8} = 3x + x - 6x^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} = 4x - 6x^2 \Rightarrow 5 = 32x - 48x^2$$

$$\Rightarrow 48x^2 - 32x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 32x + 240 = 0 \Rightarrow x = 12, 20$$

پس جواب‌های واقعی این معادله،  $x = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$  و  $x = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$  است، یعنی:

$$P(B) = \frac{1}{4} \text{ یا } \frac{5}{12}$$

اما دقت کنید اگر  $P(B) = \frac{5}{12}$  باشد، در این صورت  $P(A) = 3P(B) = \frac{15}{12}$  که غیرقابل قبول است (احتمال بیشتر از یک نیست). پس فقط  $P(B) = \frac{1}{4}$  درست است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به اطلاعات داده شده:

$$\log E_1 = 11/\lambda + 1/\omega M$$

$$\log E_2 = 11/\lambda + 1/\omega(M + 2)$$

اگر طرفین دو رابطه اخیر را از هم کم کنیم، داریم:

$$\log E_2 - \log E_1 = 2 \Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^2 = 100$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\left(\frac{1}{3}x + 4\right)(\sqrt{x} + 1) > x + x\sqrt{x}$$

فاکتور از  $x$  در سمت راست نامعاده  $\rightarrow \left(\frac{1}{3}x + 4\right)(\sqrt{x} + 1) > x(1 + \sqrt{x})$

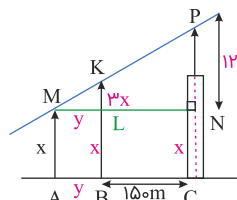
همه عبارت‌ها را به یک طرف نامعاده منتقل می‌کنیم  $\rightarrow \left(\frac{1}{3}x + 4\right)(\sqrt{x} + 1) - x(1 + \sqrt{x}) > 0$

فاکتور از  $1 + \sqrt{x}$   $\rightarrow (1 + \sqrt{x}) \underbrace{\left(\frac{1}{3}x + 4 - x\right)}_{-\frac{2}{3}x + 4} > 0$  عبارت  $1 + \sqrt{x}$  همواره مثبت است.  $\rightarrow -\frac{2}{3}x + 4 > 0 \Rightarrow 4 > \frac{2}{3}x \Rightarrow 6 > x$

اما نکته بسیار مهم! محدودیت دامنه تابع رادیکال را فراموش نکنید!  $x$  به دلیل قرار گرفتن در زیر رادیکال باید همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد و لذا مجموعه جواب نهایی برابر است با:  $0 \leq x < 6$ .  
واضح است که این بازه شامل دو عدد صحیح مضرب ۳ است:  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

از  $M$  به موازات  $AC$  خطی بر  $PC$  عمود می‌کنیم تا  $PC$  را در  $N$  قطع کند. با استفاده از قضیه تالس داریم:



$$\Delta MPN : KL \parallel PN \Rightarrow \frac{KL}{PN} = \frac{ML}{MN} \xrightarrow{\substack{ML=AB \\ MN=AC}} \frac{3x}{12x} = \frac{y}{y + 150}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{y + 150} \Rightarrow 4y = y + 150 \Rightarrow 3y = 150 \Rightarrow y = 50$$

$$AC = AB + BC = 50 + 150 = 200$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

برای تعیین  $k$ ، باید مجموع ریشه‌های معادله  $fx^2 + kx + 1 = 0$  یعنی مجموع  $\frac{1}{\alpha} + \beta + 1$  و  $\frac{1}{\beta} + \alpha + 1$  را محاسبه کرده و برابر  $-\frac{k}{f}$  قرار دهیم. داریم:

$$x = 4 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-1}{2} \\ P = -4 \end{cases}$$

$$S_{\text{جدید}} = \left(\frac{1}{\alpha} + \beta + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + \alpha + 1\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 2 = S + \frac{S}{P} + 2$$

$$\frac{S = \frac{-1}{2}}{P = -4} \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{-4} + 2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}} = \frac{7}{4} \xrightarrow{\text{معادله جدید}} 4x^2 + kx + 1 = 0$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}} = -\frac{k}{4} \xrightarrow{S_{\text{جدید}} = \frac{7}{4}} -\frac{k}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow k = -7$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

دو ضلع  $AB$  و  $BC$  بر هم عمودند، پس شیب  $BC$ ، قرینه معکوس شیب  $AB$  است.

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow BC : y = -x + b$$

فاصله رأس  $D$  را از دو ضلع  $AB$  و  $BC$  حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} AB : y - x = 0 \\ D = (2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله } D \text{ تا } AB = \frac{|6 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC : y + x - b = 0 \\ D = (2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله } D \text{ تا } BC = \frac{|6 + 2 - b|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|8 - b|}{\sqrt{2}}$$

مساحت مستطیل ۱۲ است، پس:

$$\text{طول} \times \text{عرض} = 12 \Rightarrow 2\sqrt{2} \times \frac{|8 - b|}{\sqrt{2}} = 12 \Rightarrow 2|8 - b| = 12$$

$$\Rightarrow |8 - b| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 8 - b = 6 \Rightarrow b = 2 \\ 8 - b = -6 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مختصات C را به صورت  $(k, o)$  در نظر می‌گیریم. مختصات نقطه M (وسط A و C) را حساب می‌کنیم:

$$M = \left( \frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left( \frac{1+k}{2}, \frac{6+o}{2} \right) = \left( \frac{k+1}{2}, 3 \right)$$

فاصله M تا B را برابر ۵ قرار می‌دهیم:

$$BM = 5 \Rightarrow \sqrt{\left( \frac{k+1}{2} + 1 \right)^2 + (3-7)^2} = 5$$

$$\Rightarrow \left( \frac{k+3}{2} \right)^2 + 16 = 25 \Rightarrow \left| \frac{k+3}{2} \right| = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+3 = 6 \Rightarrow k = 3 \\ k+3 = -6 \Rightarrow k = -9 \times \end{cases} \Rightarrow C = (3, 0)$$

طول ضلع AC را به دست می‌آوریم:

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (0-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

کلاسی بهتر است، که ضریب تغییرات کمتری دارد.

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sqrt{2/56}}{16} = \frac{1/6}{16} = 0/1$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{\sqrt{2/189}}{17} = \frac{1/7}{17} = 0/1$$

ضریب تغییرات نمرات دانش‌آموزان هر دو کلاس یکسان است؛ پس فرقی نمی‌کند که دبیر، کدام کلاس را انتخاب کند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ده داده اول را  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  و بیست داده دوم را  $y_1, y_2, \dots, y_{20}$  می‌نامیم. باتوجه به رابطه محاسبه انحراف معیار داریم:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - (2p)^2} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - 4p^2} \Rightarrow 12 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - 4p^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 10(12 + 4p^2) = 120 + 40p^2$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2}{20} - p^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2}{20} - p^2} \Rightarrow 9 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2}{20} - p^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2 = 20(9 + p^2) = 180 + 20p^2$$

برای محاسبه واریانس سی داده فوق، باید جمع مجزورات همه داده‌ها را به دست آوریم و از رابطه محاسبه واریانس استفاده کنیم. بدیهی است که مقدار میانگین برای سی داده،  $\frac{40p}{30} = \frac{4p}{3}$  می‌باشد:

$$\sigma_3^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{20}^2}{30} - \left(\frac{4p}{3}\right)^2 \Rightarrow \sigma_3^2 = \frac{(120 + 40p^2) + (180 + 20p^2)}{30} - \left(\frac{4p}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_3^2 = \frac{300 + 60p^2}{30} - \frac{16p^2}{9} = 10 + 2p^2 - \frac{16p^2}{9} = 10 + \frac{2p^2}{9}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبازی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow a \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b(0) = \sqrt{3} \Rightarrow a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + b \sin \frac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow 0 + b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{5\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

باتوجه به اینکه نسبت تشابه نمی‌تواند برابر با ۱ باشد، یکی از دو حالت زیر برای نوشتن نسبت تشابه رخ می‌دهد:

$$۱) \frac{x}{5} = \frac{y}{12} = \frac{5}{13} \Rightarrow x = \frac{25}{13}, y = \frac{60}{13} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = x + y + 5 = \frac{150}{13}$$

$$۲) \frac{x}{5} = \frac{5}{12} = \frac{y}{13} \Rightarrow x = \frac{25}{12}, y = \frac{65}{12} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = x + y + 5 = \frac{150}{12} = 12\frac{5}{12}$$

پس بیشترین محیط مثلث برابر با  $12\frac{5}{12}$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

ابتدا در معادله داده شده، عبارت‌های دو طرف تساوی را طرفین وسطین می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود. داریم:

$$3x(5-x) = (k+2)(4x-x^2) \Rightarrow 15x - 3x^2 = 4(k+2)x - (k+2)x^2$$

$$\Rightarrow (k-1)x^2 - (4k-7)x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{4k-7}{k-1}$$

جواب  $x = 0$  غیرقابل قبول است (مخرج کسر را صفر می‌کند). برای برقراری شرط مسئله جواب دیگر نیز باید غیرقابل قبول باشد. این جواب در حالت‌های زیر غیرقابل قبول است:

۱)  $k = 1$  که در این صورت مخرج کسر صفر می‌شود.

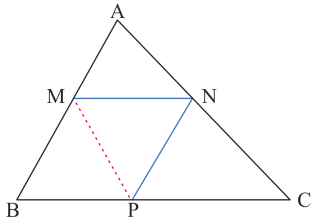
۲) مخرج یکی از کسرهای معادله را صفر کند یعنی برابر با صفر یا ۴ باشد:

$$\begin{cases} \frac{4k-7}{k-1} = 4 \Rightarrow 4k-7 = 4k-4 \Rightarrow \text{امکان ناپذیر} \\ \frac{4k-7}{k-1} = 0 \Rightarrow 4k-7 = 0 \Rightarrow k = \frac{7}{4} \end{cases}$$

بنابراین به ازای دو مقدار  $k = 1$  و  $k = \frac{7}{4}$ ، مجموع جواب معادله تهی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

طبق رابطه محاسبه مساحت مثلث داریم:



$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot MN \cdot \sin \widehat{AMN}}{\frac{1}{2} NP \cdot MN \cdot \sin \widehat{MNP}} = \frac{AM \cdot \sin \widehat{AMN}}{NP \cdot \sin \widehat{MNP}}$$

باتوجه به اینکه  $NP \parallel AB$ ، می‌توان دریافت:  $\widehat{AMN} = \widehat{MNP}$  پس  $\sin \widehat{AMN} = \sin \widehat{MNP}$  بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{AM}{NP} \xrightarrow{NP=MB} \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{AM}{MB}$$

از طرفی طبق قضیه تالس داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{\frac{AN}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{3}{2}} \frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{AM}{MB} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{60}{100} S_{\triangle MNP}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

تابع  $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{a-3x} + 5$  در صورتی ثابت است که دامنه آن محدود به یک نقطه باشد:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$a-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{a}{3}$$

اگر  $\frac{a}{3} = 1$  یعنی  $a = 3$  باشد، دامنه  $f$  فقط شامل  $x = 1$  خواهد بود و  $f = \{(1, 5)\}$  می‌شود.  
پس تابع  $f + g$  فقط به ازای  $x = 1$  تعریف شده است:

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 5 + (1) = 6$$

توجه کنید چون  $g$  تابع همانی است، داریم:  $g(x) = x$ .

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

هر سه ضابطه در دامنه پیوسته‌اند. پس فقط نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم: ( $x = 0, x = 1$ )

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^r + 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + b$$

$$\Rightarrow a + 1 = 1 + b \Rightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x + b = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x$$

$$\Rightarrow 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = b = 1$$

پس داریم:  $a + b = 2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ضابطه‌های اول و آخر همواره در محدوده تعریفشان پیوسته‌اند. در ضابطه وسط به دلیل اینکه  $x = 2$  داخل جزء صحیح را صحیح می‌کند، نقطه ناپیوسته محسوب می‌شود. اما بررسی نقاط مرزی:

$$x = 1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - 1| = 0 \\ f(1) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x]) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

در نتیجه در  $x = 1$  پیوسته است.

$$x = 3: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - [x]) = 3 - 2 = 1 \\ f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 4) = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

بنابراین در  $x = 3$  پیوسته است.

پس این تابع در هر دو نقطه مرزی پیوسته بوده و فقط در  $x = 2$  ناپیوسته است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

برای تعیین دامنه تابع  $f(x) = \log_2(ax + b)$  داریم:

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{-b}{a} & (a > 0) \\ x < \frac{-b}{a} & (a < 0) \end{cases}$$

باتوجه به اینکه مطابق فرض، دامنه تابع  $\frac{-3}{5} < x$  است، پس حالت دوم ( $a < 0$ ) اتفاق افتاده است و داریم:

$$\frac{-b}{a} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5}{3}b$$

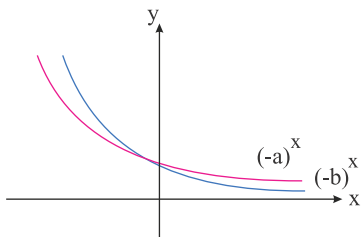
از طرفی چون  $a < 0$  پس قطعاً  $b < 0$  خواهد بود.

حالا به گزینه‌ها دقت کنید! از آنجاکه  $a$  و  $b < 0$ ، پس  $a^x$  و  $b^x$  نمی‌توانند تابع نمایی باشند (می‌دانیم که پایه نمایی باید عددی مثبت و مخالف ۱ باشد)، پس گزینه (۱) رد می‌شود.

از طرف دیگر، از آنجاکه  $a = \frac{5}{3}b$ ، پس  $|a| > |b|$  است و چون  $b < 0$  و  $a$  هستند، پس:  $a < b < 0$ .

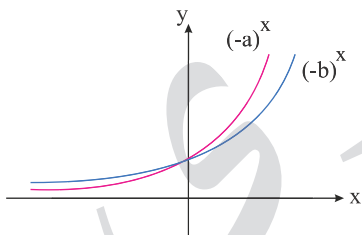
حالا دو حالت پیش می‌آید:

$$۱) -1 < a < b < 0 \Rightarrow 0 < -b < -a < 1$$



در این حالت،  $(-a)^x$  و  $(-b)^x$  نزولی هستند و  $(-a)^x$  چون پایه بزرگتری دارد، در  $x < 0$  بالاتر از  $(-b)^x$  قرار می‌گیرد.

$$۲) a < b < -1 \Rightarrow 1 < -b < -a$$



در این حالت،  $(-a)^x$  و  $(-b)^x$  صعودی هستند و  $(-a)^x$  چون پایه بزرگتری دارد، در  $x < 0$  بالاتر از  $(-b)^x$  قرار می‌گیرد. نمودار حالت دوم در گزینه (۳) دیده می‌شود.

$$\sqrt{\frac{3}{4} + x} + 4x = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{4} + x} = -4x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می رسانیم}} \frac{3}{4} + x = 16x^2 \Rightarrow 16x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-6}{32} = \frac{-3}{16} \\ x_2 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

باتوجه به اینکه حاصل رادیکال همواره نامنفی است، داریم:

$$\sqrt{\frac{3}{4} + x} = -4x \Rightarrow -4x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

درنتیجه  $x_2 = \frac{1}{4}$  غیرقابل قبول است و  $\frac{-3}{16}$  ریشهٔ معادله است، پس:

$$a = \frac{-3}{16} \Rightarrow 4a + 1 = \frac{-3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

در صورت، به جای  $x - \frac{3\pi}{10}$ ، می‌نویسیم  $(\frac{\pi}{5} + x) - \frac{\pi}{2}$ :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5} + x\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{10} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{5} + x\right)\right)$$

:

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{5} + x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5} + x\right) = 1$$

در مخرج به جای  $x + \frac{7\pi}{10}$ ، می‌نویسیم  $(\frac{\pi}{5} + x) + \frac{\pi}{2}$ :

$$\cot\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \times \cot\left(\frac{7\pi}{10} + x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \times \cot\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{5} + x\right)\right)$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \times -\tan\left(\frac{\pi}{5} + x\right) = -1$$

$$\text{حاصل کسر} = \frac{1}{-1} = -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نقاطی از بازه  $(4, 1)$  که داخل براکت را صحیح می‌کنند حد ندارند که عبارت‌اند از:  $x = 2$  و  $x = 3$ ، مگر اینکه تابع ضریب صفرکننده داشته باشد، یعنی باید عبارت  $x^2 + ax + b$  در  $x = 2$  و  $x = 3$  صفر شود. به عبارتی  $x = 2$  و  $x = 3$  ریشه‌های عبارت  $x^2 + ax + b$  هستند. پس:

$$x^2 + ax + b = \overbrace{(x-2)(x-3)}^{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (-5, 6)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

انرژی آزادشده در زلزله‌ای به بزرگی  $M$  در واحد ریشتر برابر  $E$  در واحد ارگ از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

اگر  $E_1$  انرژی آزادشده در یک زلزله  $M_1$  ریشتری و  $E_2$  انرژی آزادشده در یک زلزله  $M_2$  ریشتری باشند، خواسته مسئله پیدا کردن نسبت  $\frac{E_2}{E_1}$  است، پس داریم:

$$\begin{cases} \log E_2 = 11/8 + 1/5 M_2 \\ \log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1 \end{cases}$$

چون معادلات به دست آمده به صورت لگاریتمی هستند، پس برای پیدا کردن  $\frac{E_2}{E_1}$  از تفاضل دو معادله بالا استفاده می‌کنیم که بتوانیم با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم به نسبت خواسته شده برسیم:

$$\log E_2 - \log E_1 = 1/5 M_2 - 1/5 M_1 \Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1/5 (M_2 - M_1)$$

بنابراین نسبت انرژی آزادشده در دو زلزله به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5(M_2 - M_1)}$$

در این سؤال  $M_1 = 5$  و  $M_2 = 7$  است:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5(7-5)} = 10^2 = 100$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع در  $x = 1$  پیوسته است؛ پس مقادیر حد راست و چپ موجود و برابرند.

$$\text{حد چپ} : \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - a}{x - 1}$$

مخرج صفر است؛ پس صورت هم باید صفر باشد، یعنی  $a = 1$  است.

$$\text{حد چپ} : \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

$$\text{حد راست} : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - b}{x + a + b} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - b}{1 + 1 + b} = \frac{1 - b}{2 + b}$$

مقادیر به دست آمده باید برابر باشند:

$$\frac{1 - b}{2 + b} = 2 \Rightarrow 1 - b = 4 + 2b \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$$

حاصل  $a + b$  را می‌خواهیم:

$$a + b = 1 - 1 = 0$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر نفر اول عدد ثابت  $b$  را اشتباه دیده باشد، پس ضریب  $x$  ( $a$ ) و ضریب  $x^2$  را درست دیده و عددی که برای مجموع ریشه‌ها به دست می‌آورد، قابل اطمینان است:

$$S = \frac{-a}{2} = 3 + 6 = 9 \Rightarrow a = -18$$

نفر دوم ضریب  $a$  را اشتباه دیده، پس ضریب  $x^2$  و عدد ثابت معادله را درست دیده است و عددی که برای حاصل ضرب ریشه‌ها به دست می‌آورد، قابل قبول است:

$$P = \frac{b}{2} = 2 \times 5 = 10 \Rightarrow b = 20$$

پس صورت صحیح معادله به این شکل بوده:

$$2x^2 - 18x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 10 = 0 \Rightarrow \text{تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{41}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر زمان رفت و برگشت مترو را  $x$  در نظر بگیریم، سرعت فعلی مترو در مسافت  $۴۰$  کیلومتری برابر  $\frac{۴۰}{x}$  کیلومتر بر ساعت خواهد بود. اگر زمان  $\frac{۳}{۴}$  دقیقه یا  $\frac{۳}{۴}$  ساعت کوتاه‌تر شود، سرعت آن برابر  $\frac{۴۰}{x - \frac{۳}{۴}}$  می‌شود، پس داریم:

$$\frac{۴۰}{x} + ۱۲ = \frac{۴۰}{x - \frac{۳}{۴}} \Rightarrow \frac{۴۰ + ۱۲x}{x} = \frac{۴۰}{x - \frac{۳}{۴}}$$

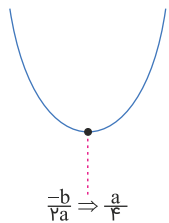
$$\Rightarrow ۴۰x - ۳۰ + ۱۲x^2 - ۹x = ۴۰x \Rightarrow ۱۲x^2 - ۹x - ۳۰ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x^2 - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(۴x + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -\frac{۵}{۴} \times \end{cases}$$

سرعت فعلی مترو  $\frac{۴۰}{x}$  یا  $۲۰$   $\frac{۴۰}{۲}$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

با توجه به نمودار این تابع درجه ۲ که در زیر کشیده شده است، این تابع در بازه‌هایی یک به یک است که رأس سهمی، یعنی  $\frac{a}{۴}$  در داخل بازه نباشد. پس اگر این تابع بخواهد در بازه  $[-۳, ۲]$  یک به یک شود، باید  $\frac{a}{۴}$  داخل این بازه قرار نگیرد. یعنی اتفاق زیر رخ ندهد:



$$-۳ < \frac{a}{۴} < ۲ \Rightarrow -۱۲ < a < ۸$$

پس محدوده قابل قبول،  $(-۱۲, ۸) - \mathbb{R}$  می‌باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به اینکه  $\frac{b}{a} = 4 = x_1 + x_2$  داریم:

$$x^2 = 4x + a \Rightarrow x_1^2 = 4x_1 + a$$

$$x_1^2 + 4x_2 = 18 \Rightarrow 4x_1 + a + 4x_2 = 18 \Rightarrow 4(x_1 + x_2) + a = 18$$

$$4(4) + a = 18 \Rightarrow a = 2$$

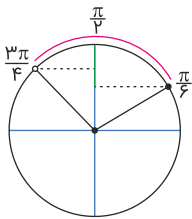
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا از روی محدوده  $x$ ، محدوده  $2x$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x < \frac{3\pi}{4}$$

برای راحتی فرض می‌کنیم:  $2x = \alpha$

باتوجه به دایره مثلثاتی زیر، مشخص است که وقتی  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ، مقدار  $\sin \alpha$  از  $\frac{1}{2}$  شروع شده و با افزایش کمان به سمت  $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار آن بزرگ‌تر شده و نهایتاً در  $x = \frac{\pi}{4}$  به بیشترین مقدار خود یعنی ۱ می‌رسد، پس از آن وقتی از  $x = \frac{\pi}{4}$  به سمت  $x = \frac{3\pi}{8}$  حرکت می‌کند، مقدار آن کمتر شده و بخشی از مسیر طی شده روی محور  $\sin$ ها را برمی‌گردد تا به  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  برسد، بنابراین:



$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - 2b \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq -2b \leq 0 \xrightarrow[\text{جهت عوض می شود}]{\text{تقسیم طرفین نامساوی بر } (-2)} \frac{1}{4} \geq b \geq 0$$

این بازه شامل فقط یک عدد صحیح  $b = 0$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

دامنه وارون تابع  $f$  همان برد  $f$  است:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + c \Rightarrow R_f = [c, +\infty)$$

سوال گفته برد  $f$  برابر  $[2, +\infty)$  است، یعنی  $c = 2$  می‌شود:  $f(x) = \sqrt{x+1} + 2$

برای پیدا کردن نقطه برخورد نمودار  $f^{-1}$  با محور  $x$  باید معادله  $f^{-1}(x) = 0$  را حل کنیم. پس کافیهست  $f(0)$  را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 2 \xrightarrow{x=0} f(0) = 1 + 2 = 3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای آنکه تابع  $f$  محور  $x$ ها را در دو نقطه متمایز سمت چپ مبدأ قطع کند، باید معادله  $f(x) = 0$  دارای ۲ ریشه متمایز منفی باشد. داریم:

$$f(x) = 2x^2 + m - mx + x + 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 + (1-m)x + m + 5 = 0$$

برای آنکه معادله درجه دوم دارای ۲ ریشه متمایز منفی باشد، باید هر ۳ شرط زیر را داشته باشد، داریم:

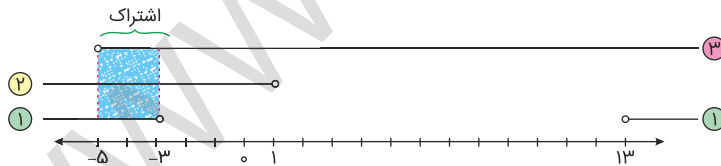
$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (1-m)^2 - 4(2)(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 - 10m - 39 > 0 \Rightarrow (m-13)(m+3) > 0 \\ \Rightarrow m > 13 \text{ یا } m < -3$$

$$2) S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{2} < 0 \Rightarrow m < 1$$

$$3) P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+5}{2} > 0 \Rightarrow m > -5$$

بین سه شرط بالا اشتراک می‌گیریم:

$$(1) \cap (2) \cap (3) = (-5, -3)$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع  $g$  یک تابع خطی است. باتوجه به نمودار تابع  $g$ ، ضابطه آن را به دست می‌آوریم:

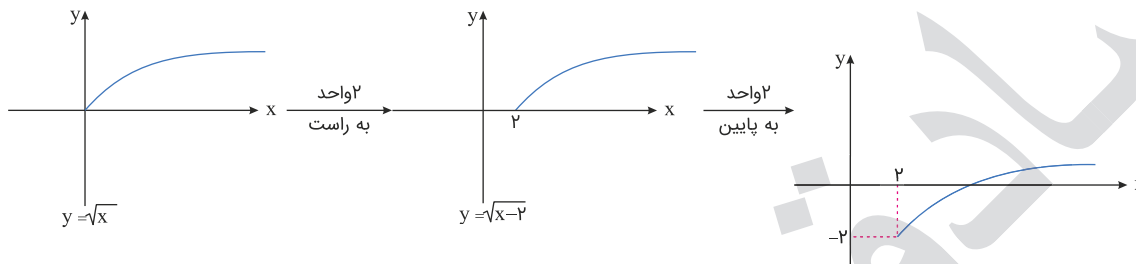
$$m = \frac{3 - 0}{0 - 3} = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow g(x) = -x + 3$$

با جایگذاری ضابطه  $g$  در  $f$ ؛ ضابطه  $f$  را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt{1 - g(x)} - 2 \xrightarrow{g(x) = -x + 3} f(x) = \sqrt{1 - (-x + 3)} - 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$$

برای رسم نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$ ، کافی است نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  را ابتدا ۲ واحد به راست ببریم و  $y = \sqrt{x - 2}$  و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم تا به ضابطه  $f(x) = \sqrt{x - 2} - 2$  برسیم.



تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

می‌دانیم تولد فرزندان، مستقل از هم است.

پس احتمال اینکه هر چهار نفر در روز چهارشنبه متولد شوند، برابر است با:

$$P(\text{چهارمی, چهارشنبه}) \times P(\text{سومی, چهارشنبه}) \times P(\text{دومی, چهارشنبه}) \times P(\text{اولی, چهارشنبه}) \\ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

اما احتمال اینکه هر چهار نفر در یک روز هفته متولد شوند برابر است با:

$$P(\text{چهارمی, همان روز}) \times P(\text{سومی, همان روز}) \times P(\text{دومی, همان روز}) \times P(\text{اولی, هر روزی}) \\ = 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{4}$$

پس جواب تست برابر است با:  $\frac{1}{4}$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

وقتی نمودار  $f(x)$  را نسبت به خط  $y = x$  (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه می‌کنیم، در واقع نمودار وارون تابع  $f$  به دست می‌آید، بنابراین تابع  $g(x)$ ، وارون تابع  $f(x)$  است و می‌دانیم که وارون یک تابع لگاریتمی، یک تابع نمایی است. اما! نیازی به پیدا کردن ضابطه  $g$  نیست، برای به دست آوردن طول از مبدأ  $g$  (وارون  $f$ )، کافی است عرض از مبدأ خود تابع  $f$  یعنی  $f(0)$  را به دست آوریم:

$$f(0) = 2 \log_{\frac{1}{3}}(-2)$$

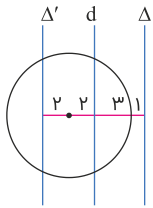
تعریف نشده است، پس گزینه چهار درست است.  
نکته: مواظب باشید که مبدا تابع  $f$  را به صورت زیر بنویسید:

$$f(x) = 2 \log_{\frac{1}{3}}(3x - 2) = \log_{\frac{1}{3}}(3x - 2)^2 \Rightarrow f(0) = \log_{\frac{1}{3}}^2 = -1$$

با این کار، دامنه تابع  $f$  را تحت تأثیر قرار می‌دهید و از مبحث تساوی توابع می‌دانیم که شرط برابری دو تابع، برابری دامنه‌های آن‌ها است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به شکل، مجموعه نقاطی که از خط  $d$  به فاصله ۴ سانتی‌متر هستند، دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  موازی با  $d$  می‌باشند که فقط یکی از این خط‌ها می‌تواند دایره را قطع کند و دو نقطه ایجاد شده، جواب این مسئله می‌باشد.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

معادله را با روش تغییر متغیر تبدیل به یک معادله درجه دوم می‌کنیم. چون مجموع ۲ ریشه برابر ۷ است، پس معادله بعد از تغییر متغیر، باید دارای ۲ ریشه مثبت یا یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد. داریم:

$$x - m\sqrt{x} + m - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - mt + m - 2 = 0$$

حال چون مجموع دو ریشه این معادله برابر ۷ است، پس باید مجموع مربع ریشه‌های معادله بعد از تغییر متغیر آن را برابر ۷ قرار دهیم. داریم:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 7 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 = 7 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = 7 \Rightarrow S^2 - 2P = 7$$

$$\frac{S=m}{P=m-2} \rightarrow m^2 - 2(m-2) = 7 \Rightarrow m^2 - 2m + 4 = 7 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

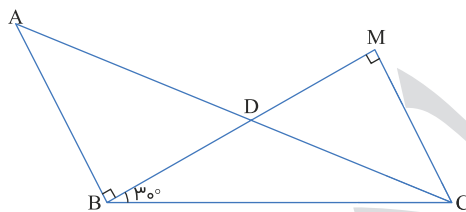
$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 : t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه مختلف علامت دارد} \\ m = 3 : t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow \text{معادله دو ریشه مثبت دارد} \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

خطوط  $AB$  و  $MC$  هر دو بر  $BM$  عمودند، پس با یکدیگر موازی اند، بنابراین مثلث‌های  $ABD$  و  $DMC$  به حالت دو زاویه مساوی، متشابه خواهند بود و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:



$$\frac{AB}{MC} = \frac{AD}{CD} \xrightarrow{AB=CD=1} \frac{1}{MC} = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD \times MC = 1$$

می‌دانیم در هر مثلث قائم الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$ ، نصف وتر است. لذا داریم:

$$\triangle MBC : \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow MC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AD \times MC = AD \times \frac{1}{2}BC$$

$$\xrightarrow{AD \times \frac{1}{2}BC = 1} AD \times BC = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دهم

تستر علوم تجربی یازدهم

با اضافه کردن چند داده مساوی با میانگین، میانگین داده‌های جدید تغییری نمی‌کند؛ یعنی:  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ . بنابراین داریم:

$$CV_2 = \frac{1}{2} CV_1 \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_1}{\bar{x}} \xrightarrow{\sigma_1^2=12 \Rightarrow \sigma_1=2\sqrt{3}} \sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 = \sqrt{3}$$

یعنی واریانس داده‌های جدید باید برابر با ۳  $\sigma_2^2 = 3$  شود. باتوجه به فرض داریم:

$$\sigma_1^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{x})^2}{10} = 12$$

$$\Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{x})^2 = 120$$

$$\sigma_2^2 = 3 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{x})^2 + k(\bar{x} - \bar{x})^2}{10 + k}$$

$$\Rightarrow \frac{120}{10 + k} = 3 \Rightarrow 10 + k = 40 \Rightarrow k = 30$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

حد راست و چپ تابع  $f$  در  $x = 3$  نابرابر است (به ترتیب ۱۵ و ۱۲ می‌باشد). پس تابع  $f$  در این نقطه، حد ندارد. برای آنکه تابع  $f.g$  حد داشته باشد، باید حد  $g$  در این نقطه صفر باشد که  $g(x)$  نقش عامل صفرشونده را بازی کند. با این کار وقتی صفر در دو عدد متفاوت ضرب می‌شود، صفر خواهد شد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (kx + 6) = 0 \Rightarrow 3k + 6 = 0 \Rightarrow k = -2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

چون یک داده با فراوانی ۳ داریم؛ یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$۱) x, x, x, y, y + 1, y + 2 \quad ۲) y, x, x, x, x + 1, x + 2$$

باتوجه به فرض مسئله در هر دو حالت داریم:

$$۱) (y + 2) - x = ۵, \bar{x} = \frac{x + x + x + y + y + 1 + y + 2}{6} = ۱۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۳ \\ ۳x + ۳y + ۳ = ۹۰ \Rightarrow x = ۱۳ \end{cases}$$

$$۲) (x + 2) - y = ۵, \bar{x} = \frac{y + x + x + x + x + 1 + x + 2}{6} = ۱۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = ۳ \\ y + ۵x + ۳ = ۹۰ \Rightarrow x = ۱۵ \end{cases}$$

پس داده با فراوانی ۳ باید ۱۳ یا ۱۵ باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا نامعادله داده شده را حل می‌کنیم:

$$\frac{4x^2 + 5x + 1}{|x - 2|(x^2 + 2x + 1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 5x + 1}{|x - 2|(x + 1)^2} \leq 0$$

عبارت‌های  $|x - 2|$  و  $(x + 1)^2$  عبارتهایی همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند و به شرط توجه به ریشه‌های آن‌ها  $x = -1, 2$  که عضو دامنه تابع نیستند، می‌توان آن‌ها را در تعیین علامت نادیده گرفت. پس داریم:

$$4x^2 + 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow (x + 1)\left(x + \frac{1}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{x \neq -1, 2} -1 < x \leq -\frac{1}{4}$$

حال به سراغ عبارت  $[x + 1] + \frac{x}{|4x|}$  می‌رویم. اول تکلیف جزء صحیح و سپس تکلیف قدر مطلق را معلوم می‌کنیم:

$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین را با یک جمع می‌کنیم}} 0 < x + 1 \leq \frac{3}{4} \Rightarrow [x + 1] = 0$$

$$-1 < x \leq -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین را در چهار ضرب می‌کنیم}} -4 < 4x \leq -1 \Rightarrow |4x| = -4x$$

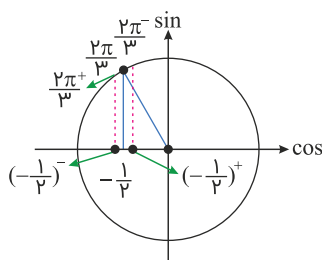
پس داریم:

$$[x + 1] + \frac{x}{|4x|} = 0 + \frac{x}{-4x} = -\frac{1}{4}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

روش اول:

حد راست و چپ و مقدار تابع  $f(x) = \left[\frac{4}{x}\right] + [2 \cos \pi x]$  را در  $x = \frac{2}{3}$  حساب می‌کنیم. داریم:



$$\text{حد راست: } \left[\frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)^+}\right] + \left[2 \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right)^+\right] = [6^-] + \left[2 \underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)^-}_{(-1)^-}\right] = 5 + (-2) = 3$$

$$\text{حد چپ: } \left[\frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)^-}\right] + \left[2 \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right)^-\right] = [6^+] + \left[2 \underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)^+}_{(-1)^+}\right] = 6 + (-1) = 5$$

$$\text{مقدار: } \left[\frac{4}{\frac{2}{3}}\right] + \left[2 \cos \frac{2\pi}{3}\right] = [6] + \left[2 \underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)}_{-1}\right] = 6 + (-1) = 5$$

چون فقط حد چپ با مقدار تابع برابر شده است، پس  $f$  در  $x = \frac{2}{3}$  فقط پیوستگی چپ دارد.

روش دوم: چون هر دو عبارت داخل جزء صحیح‌ها، در نقطه  $x = \frac{2}{3}$  نزولی هستند، پس هر دو تابع جزء صحیح در این نقطه، از چپ پیوسته می‌باشند. بنابراین مجموع آن‌ها نیز در این نقطه دارای پیوستگی چپ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

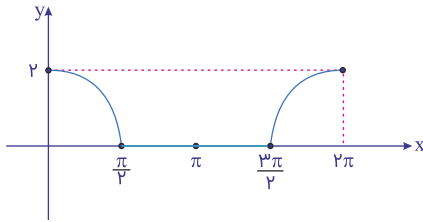
برای رسم نمودار، باید تکلیف  $\cos x$  داخل قدر مطلق را به لحاظ علامتی معلوم کنیم:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x \Rightarrow f(x) = \cos x + \cos x = 2 \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow f(x) = \cos x - \cos x = 0$$

$$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow 0 < \cos x \Rightarrow f(x) = \cos x + \cos x = 2 \cos x$$

پس نمودار تابع به این صورت خواهد بود:



واضح است که نمودار فقط شامل یک پاره خط است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا از معادله جزء صحیح داده شده، محدوده  $x$  را به دست می آوریم و از آنجا تکلیف قدر مطلق موجود در تابع  $f(x)$  را مشخص می کنیم:

$$|5x^2 - 1| = 5 \Rightarrow 5 \leq 5x^2 - 1 < 6 \Rightarrow 6 \leq 5x^2 < 7$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} \leq x^2 < \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{1}{1} \leq x^2 < \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم.}} \sqrt{1/1} \leq |x| < \sqrt{1/4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1/1} \leq x < \sqrt{1/4} \Rightarrow \text{x عددی بین ۱ و ۲ است.} \\ \text{یا} \\ -\sqrt{1/4} < x \leq -\sqrt{1/1} \Rightarrow \text{x عددی بین ۲ و -۱ است.} \end{cases}$$

برای تعیین تکلیف قدر مطلق در تابع  $x - x$   $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x}$  داریم:

$$|x^2 - x| = |x(x - 1)| = |x||x - 1|$$

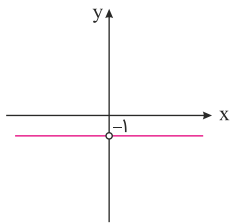
$$\xrightarrow{\text{x عددی بین ۱ و ۲ است.}} |x^2 - x| = |x||x - 1| = x(x - 1)$$

$$\xrightarrow{\text{x عددی بین ۲ و -۱ است.}} |x^2 - x| = |x||x - 1| = (-x)(-x + 1) = x(x - 1)$$

پس در هر دو حالت،  $|x^2 - x| = x(x - 1)$  و لذا داریم:

$$f(x) = \frac{x(x - 1)}{x} - x = -1 \quad (x \neq 0)$$

واضح است که نمودار این تابع ثابت، به صورت زیر است و هرگز محور  $x$ ها را قطع نمی کند.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

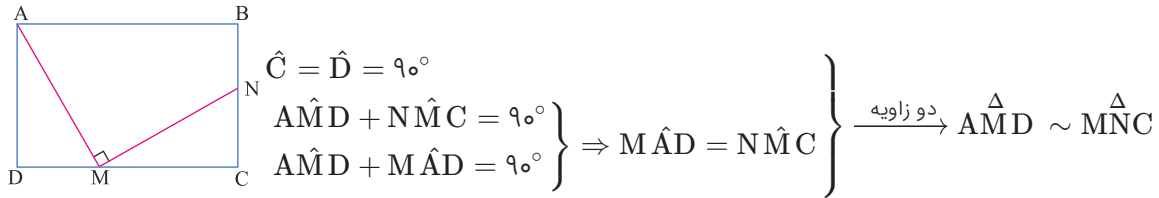
عبارت را به صورت زیر می نویسیم:

$$A = \frac{\sin(90^\circ - 20^\circ) + 2 \sin 20^\circ}{\sin(90^\circ + 20^\circ) - 3 \sin(180^\circ - 20^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 3 \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{1 + 2 \tan 20^\circ}{1 - 3 \tan 20^\circ} = \frac{1 + 2a}{1 - 3a}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مثلث‌های AMD و MNC متشابه‌اند، زیرا:



حال اگر طول مستطیل را  $x$  و عرض آن را  $y$  بنامیم، باتوجه به نسبت تشابه این دو مثلث داریم:

$$\frac{AD}{MC} = \frac{MD}{NC} \Rightarrow \frac{y}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x}{2}}{y} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

می‌دانیم محیط دایره برابر با  $۲\pi R$  و لذا طول کمان نیم‌دایره برابر با  $\pi R$  است. پس:

$$\begin{aligned} \text{میانگین طول کمان نیم‌دایره‌ها} &= \sqrt{۱۵}\pi \Rightarrow \frac{\pi R_1 + \pi R_2 + \dots + \pi R_n}{n} = \sqrt{۱۵}\pi \Rightarrow \frac{\pi(R_1 + R_2 + \dots + R_n)}{n} = \sqrt{۱۵}\pi \\ \Rightarrow \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n} &= \sqrt{۱۵} \Rightarrow \bar{R} = \sqrt{۱۵} \end{aligned}$$

پس میانگین شعاع این نیم‌دایره‌ها برابر  $\sqrt{۱۵}$  است. از طرف دیگر، می‌دانیم مساحت دایره برابر با  $\pi R^2$  و لذا مساحت نیم‌دایره برابر با  $\frac{\pi R^2}{۲}$  است. پس:

$$\begin{aligned} \text{میانگین مساحت نیم‌دایره‌ها} &= ۱۲\pi \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{۲}R_1^2 + \frac{\pi}{۲}R_2^2 + \dots + \frac{\pi}{۲}R_n^2}{n} = ۱۲\pi \\ \Rightarrow \frac{\pi(R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2)}{۲n} &= ۱۲\pi \Rightarrow \frac{R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2}{n} = ۲۴ \Rightarrow \overline{R^2} = ۲۴ \end{aligned}$$

پس میانگین مربعات شعاع‌های این نیم‌دایره‌ها هم برابر با ۲۴ است. حالا برای محاسبه ضریب تغییرات، ابتدا واریانس را از طریق فرمول دوم آن، حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\text{مربع میانگین داده‌ها}) - (\text{میانگین مربعات داده‌ها}) \\ &= ۲۴ - (\sqrt{۱۵})^2 = ۹ \end{aligned}$$

پس انحراف معیار آن‌ها برابر با  $\sigma = ۳$  است و لذا:  $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۵}}$ .

اما دقت کنید! سؤال، ضریب تغییرات قطر این نیم‌دایره‌ها را می‌خواهد، یعنی داده‌های جدیدی که هر یک دو برابر داده‌های آماری قبلی (شعاع نیم‌دایره‌ها) هستند.

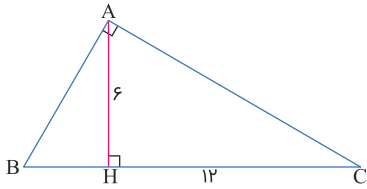
می‌دانیم با دو برابر شدن داده‌ها، هم انحراف معیار و هم میانگین (هم صورت و هم مخرج کسر CV) نیز دو برابر می‌شوند و لذا جواب همان عدد  $\frac{۳}{\sqrt{۱۵}}$  است.

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

طبق روابط طولی صادق در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow 6^2 = BH \times 12 \Rightarrow BH = 3$$

$$BC = BH + CH = 3 + 12 = 15$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABH}} = \frac{\frac{1}{2}AH \cdot BC}{\frac{1}{2}AH \cdot BH} = \frac{BC}{BH} = \frac{15}{3} = 5$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

ضابطه  $f$  را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{(x-3)(2x-1)}{x-3} \Rightarrow f(x) = 2x-1, \quad x \neq 3$$

ضابطه ساده‌شده  $f$  به ازای  $x = 3$  عدد ۵ را تولید می‌کند، پس برد  $f$  نباید شامل عدد ۵ باشد:  $R_f = \mathbb{R} - \{5\}$

ضابطه وارون  $f$  را حساب می‌کنیم:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \text{عوض کردن جای } x \text{ و } y \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

از آنجایی که دامنه  $f^{-1}$  همان برد  $f$  است، پس دامنه  $f^{-1}$  هم نباید شامل عدد ۵ باشد، پس  $x - 5$  را در صورت و مخرج آن ضرب می‌کنیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{2(x-5)} = \frac{x^2 - 4x - 5}{2x - 10}$$

$$\Rightarrow b + c + d = -4 + (-5) + (-10) = -19$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر فرض کنیم  $\sqrt{x} = t$  باشد، آنگاه:

$$t = \frac{1}{3t^2 - 2} \Rightarrow 3t^3 - 2t = 1 \Rightarrow 3t^3 - 2t - 1 = 0$$

مجموع ضرایب صفر است، پس یکی از ریشه‌ها  $t = 1$  می‌باشد، داریم:

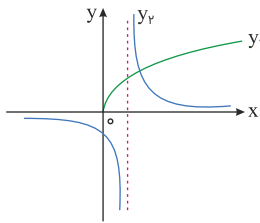
$$3t^3 - 3 - 2t + 2 = 0 \Rightarrow 3(t^3 - 1) - 2(t - 1) = 0 \Rightarrow 3(t - 1)(t^2 + t + 1) - 2(t - 1) = 0$$

$$(t - 1)(3t^2 + 3t + 3 - 2) = 0 \Rightarrow (t - 1)(3t^2 + 3t + 1) = 0$$

در عبارت  $3t^2 + 3t + 1 = 0$ ،  $\Delta < 0$  است، پس ریشه ندارد.  
تنها جواب معادله به ازای  $t = 1$  به دست می‌آید.

$$t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

روش دوم: اگر توابع  $y_1 = \sqrt{x}$  و  $y_2 = \frac{1}{3x - 2}$  را رسم کنیم، این دو تابع در یک نقطه برخورد می‌کنند.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا طول  $CH$  را محاسبه کرده و سپس طول  $AB$  را به دست می‌آوریم.  
طبق روابط طولی صادق در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC^2 = HC \cdot BC \Rightarrow (2\sqrt{10})^2 = HC \cdot (6 + HC) \Rightarrow HC^2 + 6HC - 40 = 0$$

$$\Rightarrow (HC + 10)(HC - 4) = 0 \Rightarrow HC = -10 \text{ یا } HC = 4$$

مقدار منفی  $HC$  قابل قبول نیست. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس طول  $AB$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\triangle ABC : BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = (6 + 4)^2 - (2\sqrt{10})^2 = 100 - 40 = 60 \Rightarrow AB = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دهم

چون یک داده با فراوانی ۳ داریم، یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$۱) x, x, x, y, y + ۱, y + ۲$$

$$۲) y, x, x, x, x + ۱, x + ۲$$

باتوجه به فرض مسئله، در هر دو حالت داریم:

$$۱) (y + ۲) - x = ۵, \bar{x} = \frac{x + x + x + y + y + ۱ + y + ۲}{۶} = ۱۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۳ \\ ۳x + ۳y + ۳ = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۳$$

$$۲) (x + ۲) - y = ۵, \bar{x} = \frac{y + x + x + x + x + ۱ + x + ۲}{۶} = ۱۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = ۳ \\ y + ۵x + ۳ = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۵$$

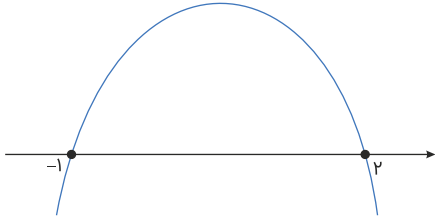
پس داده با فراوانی ۳ باید ۱۳ یا ۱۵ باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای تعیین دامنه تابع  $f$  داریم:  $-x^2 + ax + b \geq 0$   
 قرار است مجموعه جواب این نامعادله به صورت  $[-1, 2]$  باشد، پس:



واضح است که  $-1$  و  $2$  باید صفرهای تابع درجه دوم  $f(x) = -x^2 + ax + b$  باشند، پس:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + b = 0 \Rightarrow -a + b = 1$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow -4 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 4$$

پس از حل دستگاه داریم:  $b = 2$  و  $a = 1$ . حال از آنجا که دامنه تابع  $g$  به صورت  $\mathbb{R} - \{a, b\}$ ، یعنی  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$  است، پس  $1$  و  $2$  ریشه‌های مخرج تابع  $g$  هستند:

$$2x^2 - cx + d = 0 \xrightarrow{x=1} 2 - c + d = 0 \Rightarrow c - d = 2$$

$$\xrightarrow{x=2} 8 - 2c + d = 0 \Rightarrow 2c - d = 8$$

با حل دستگاه داریم:  $d = 4$  و  $c = 6$ ، پس:

$$d - ac = 4 - (1)(6) = -2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی یازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

وقتی حاصل ضرب دو پرانتز برابر با صفر است، باید تک تک آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم:

$$\sqrt{x^2 - 2x} - x + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = x - 3 \quad (*)$$

طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^2 - 2x = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

در این لحظه ممکن است وسوسه شوید و با پیدا کردن این ریشه، گزینه (۴) را انتخاب کنید! اما دقت کنید که با جایگذاری  $x = \frac{9}{4}$  در معادله اولیه (\*) به رابطه زیر خواهید رسید:

$$\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{9}{4} - 3 \Rightarrow \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \quad \times$$

پس این ریشه قابل قبول نیست و این معادله ریشه ندارد.

$$\sqrt[4]{x^3 + 2x^2 + ax + 1} + \sqrt{x^2 - x} = 0 \quad (**)$$

می‌دانیم که مجموع چند عبارت نامنفی، موقعی برابر صفر می‌شود که تک تک آن‌ها هم‌زمان صفر باشند. پس:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x} = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \\ \sqrt[4]{x^3 + 2x^2 + ax + 1} = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + ax + 1 = 0 \end{cases}$$

برای اینکه هر دو عبارت هم‌زمان صفر شوند، باید  $x = 0$  یا  $x = 1$  یا هر دو، ریشه‌های معادله درجه سوم اخیر هم باشند؛ یعنی باید در آن صدق کنند:

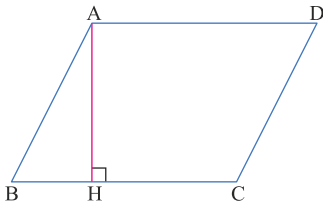
$$x = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (**)}} 1 = 0 \quad \times$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (**)}} 1 + 2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -4$$

پس به نظر می‌آید به ازای  $a = -4$ ،  $x = 1$  ریشه مشترک این دو رادیکال و لذا ریشه پرانتز دوم و در نتیجه ریشه کل معادله خواهد بود و جواب گزینه (۳) می‌شود، اما !!!

توجه کنید که  $x = 1$  اصلاً عضو دامنه این تابع نیست و زیر رادیکال موجود در پرانتز اول یعنی  $\sqrt{x^2 - 2x}$  را منفی می‌کند. پس این عبارت، مستقل از مقدار  $a$ ، هرگز ریشه ندارد.

مساحت متوازی‌الاضلاع با حاصل ضرب ارتفاع در قاعده برابر است. پس کافی است طول قاعده  $BC$  و ارتفاع  $AH$  (فاصله  $A$  از خط  $BC$ ) را به دست آورده و در هم ضرب کنیم:



$$BC : \begin{cases} B(-1, 1), C(4, 3) \Rightarrow BC = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{29} \\ m_{BC} = \frac{3 - 1}{4 - (-1)} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC : y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{5}(x + 1) \Rightarrow 2x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

فاصله  $A$  از  $BC$  طبق رابطه  $AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  برابر است با:

$$AH = \frac{|2(3) - 5(-2) + 7|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{23}{\sqrt{29}} \xrightarrow{BC = \sqrt{29}} S_{ABCD} = AH \times BC = \frac{23}{\sqrt{29}} \times \sqrt{29} = 23$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

معادله این سهمی به صورت  $y = a(x - 2)(x + 3)$  است. برای پیدا کردن  $a$ ، کافی است یک نقطه از این سهمی (مثل عرض از مبدأ) را داشته باشیم و مختصات آن را در معادله سهمی صدق دهیم. برای به دست آوردن عرض از مبدأ، ابتدا کمترین مقدار تابع  $g$  را پیدا می‌کنیم. می‌دانیم کمترین مقدار یک تابع درجه دوم با دهانه به سمت بالا، همان  $y$  رأس سهمی است:

$$g(x) = x^2 + 4x + 2$$

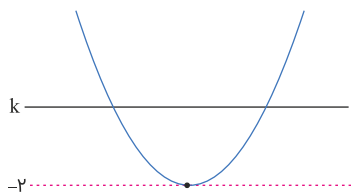
$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2 \Rightarrow g(-2) = 4 - 8 + 2 = -2$$

پس عرض از مبدأ سهمی اولیه برابر با  $-2$  است و نقطه  $(0, -2)$  باید در ضابطه آن صدق کند:

$$y = a(x - 2)(x + 3) \xrightarrow{(0, -2) \text{ را صدق می‌دهیم}} -2 = a(-2)(3)$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x - 2)(x + 3)$$

حال از آنجا که خط  $y = k$  نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، باید  $k > -2$  باشد و باتوجه به شرط  $k \in \mathbb{Z}$  و  $k > 0$  فقط می‌تواند  $k = -1$  باشد.



در گام آخر برای پیدا کردن تلاقی‌های سهمی و خط  $y = \underbrace{k}_{-1}$ ، آن‌ها را باهم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{3}(x - 2)(x + 3) = -1 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = -3 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

چون فاصله دو نقطه تلاقی (یعنی ریشه‌های معادله اخیر) پرسیده شده، کافی است قدر مطلق تفاضل ریشه‌های این معادله را به دست آوریم:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{1} = \sqrt{13}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

$$\begin{cases} \log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1 & \text{زلزله رودبار} \\ \log E_2 = 11/8 + 1/5 M_2 & \text{زلزله بم} \end{cases}$$

طرفین این دو تساوی را از هم کم می‌کنیم تا  $M_1 - M_2$  (یعنی اختلاف شدت زلزله‌ها) را ایجاد کنیم و به جایش  $0/8$  بگذاریم:

$$\log E_1 - \log E_2 = (11/8 + 1/5 M_1) - (11/8 + 1/5 M_2) \Rightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = 1/5 (M_1 - M_2)$$

$$\xrightarrow{M_1 - M_2 = 0/8} \log \frac{E_1}{E_2} = 1/5 \times 0/8 = 1/2$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/2} = 10 \times 10^{0/2} = 10 \times 10^{\frac{1}{5}} = 10 \sqrt[5]{10} = 10(1/6) = 16$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2x^3 + (k-2)x^2 - (k^2+1)x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + (k-2)x - (k^2+1)) = 0$$

این معادله یک ریشهٔ صفر دارد و ریشه‌های دیگر آن از معادلهٔ  $2x^2 + (k-2)x - (k^2+1) = 0$  به دست می‌آیند. دقت کنید که در این معادلهٔ درجهٔ دوم،  $a = 2$  و  $c = -(k^2+1)$  است، یعنی  $ac < 0$  است و معادله حتماً دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد، (مثلاً  $\alpha < 0$  و  $\beta > 0$ ). پس معادلهٔ درجهٔ سوم دارای سه ریشهٔ  $\alpha$ ،  $0$ ،  $\beta$  است و برای آنکه این سه عدد بتوانند تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، باید فاصلهٔ  $\alpha$  تا صفر و  $\beta$  تا صفر یکسان باشد، به عبارتی  $\alpha$  و  $\beta$  قرینهٔ هم باشند؛ پس در معادلهٔ  $2x^2 + (k-2)x - (k^2+1) = 0$  ریشه‌ها قرینهٔ هم بوده‌اند و باید:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای تعیین دامنه تابع  $f(x)$ ، کافی است از  $\mathbb{R}$ ، ریشه‌های مخرج کسر را کنار بگذاریم. داریم:

$$[x^2] = 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بنابراین دامنهٔ تابع به صورت  $(-1, 1) - \mathbb{R}$  است، پس داریم:

$$b - a = 1 - (-1) = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باید حد راست، حد چپ و مقدار را محاسبه و باهم برابر قرار دهیم. از حد چپ شروع می‌کنیم که فاقد پارامتر است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] + [-x] = [1^-] + [(-1)^+] = 0 - 1 = -1$$

پس بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$F(1) = c = -1$$

برای حد راست هم داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{ax + b} - 3} = -1$$

اولاً صورت به ازای  $x = 1$  صفر می‌شود، درحالی‌که جواب حد صفر نیست؛ پس باید مخرج هم به ازای  $x = 1$  صفر شود تا به ابهام  $\frac{0}{0}$  برسیم:

$$\sqrt{ax + b} - 3 \xrightarrow{x=1} \sqrt{a + b} - 3 = 0 \Rightarrow a + b = 9$$

حالا در ابهام  $\frac{0}{0}$  ایجادشده، به روش هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{ax + b} - 3} \xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}} = \frac{3}{a} \xrightarrow{a+b=9} \frac{3}{a} = \frac{18}{a}$$

حاصل این حد باید برابر  $-1$  شود، پس:

$$\frac{18}{a} = -1 \Rightarrow a = -18 \xrightarrow{a+b=9} b = 27 \Rightarrow -a + b + c = 18 + 27 - 1 = 44$$

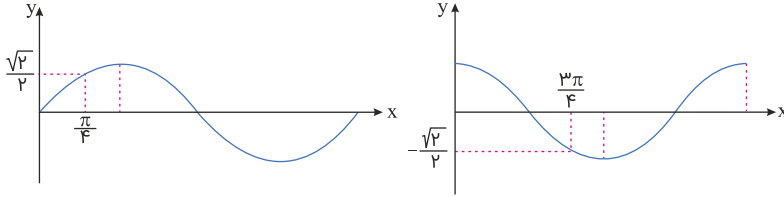
تذکر: اگر با روش هوییتال آشنایی ندارید، برای محاسبه ابهام اخیر، کافی است در صورت، اتحاد چاق و لاغر نوشته و صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنید.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به نمودار  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$ ، حد راست و چپ تابع  $f$  در  $x = \frac{\pi}{4}$  را حساب می‌کنیم:



حد راست :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} (a[3\sqrt{2} \sin x] + [\sqrt{2} \cos 3x])$

$$= a[3\sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^+] + [\sqrt{2} \times (\frac{-\sqrt{2}}{2})^-]$$

$$= a[3^+] + [(-1)^-] = 3a - 2$$

حد چپ :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (a[3\sqrt{2} \sin x] + [\sqrt{2} \cos 3x])$

$$= a[3\sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^-] + [\sqrt{2} \times (\frac{-\sqrt{2}}{2})^+]$$

$$= a[3^-] + [(-1)^+] = 2a - 1$$

برای آنکه  $f$  در  $x = \frac{\pi}{4}$  حد داشته باشد باید حد چپ و راست آن باهم برابر باشند:

$$3a - 2 = 2a - 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = [3\sqrt{2} \sin x] + [\sqrt{2} \cos 3x]$$

و داریم:

$$f(\frac{\pi}{4}) = [3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}] + [\sqrt{2} \times (-1)] = [3] + [-\sqrt{2}] = 3 + (-2) = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به نمودار، از آنجاکه توابع  $h$  و  $k$  توابع نمایی صعودی هستند:

$c, d > 1$  و چون در  $x$ های مثبت، نمودار  $h$  بالاتر از نمودار  $k$  قرار دارد، پس:  $c > d$

از طرف دیگر، از آنجاکه توابع  $f$  و  $g$  نمایی نزولی هستند:  $0 < a, b < 1$  و چون در  $x$ های مثبت، نمودار  $g$  بالاتر از نمودار  $f$  قرار گرفته است، پس:  $a < b$

بنابراین داریم:  $0 < a < b < 1 < d < c$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به نمودار:

$$\begin{aligned}x \rightarrow 0 &\Rightarrow f(x) \rightarrow (-1)^+ \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{f(x)} \right] &= \left[ \frac{1}{(-1)^+} \right] = [(-1)^-] = -2 \\ \Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{f(x)} \right] \right| &= |-2| = 2\end{aligned}$$

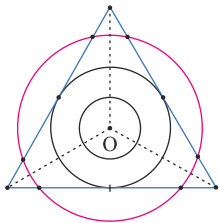
از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \Rightarrow \left[ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right] = [2] = 2$$

پس جواب آخر برابر است با:  $\frac{2}{2} = 1$ 

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نقطه‌ای که از هر سه رأس مثلث به یک فاصله باشد، محل تلاقی عمودمنصف‌های این مثلث است. باتوجه به شکل زیر اگر این نقطه را  $O$  بنامیم، نقاطی که از  $O$  به فاصله ثابت  $5$  باشند، روی دایره‌ای به مرکز  $O$  و بر شعاع  $5$  قرار دارند.



محل‌های تلاقی این دایره با اضلاع مثلث جواب تست است که باتوجه به طول ضلع مثلث، حداکثر تعداد نقاط تلاقی برابر با  $6$  است (شکل را ببینید).

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

اگر سرعت رفت را  $v$  در نظر بگیریم، سرعت برگشت  $v - ۱۰$  خواهد بود. حال باتوجه به رابطه  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$  از فیزیک داریم:

$$t_{\text{رفت}} - t_{\text{برگشت}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۶۰}{v - ۱۰} - \frac{۶۰}{v} = \frac{۱}{۲}$$

با ضرب طرفین معادله در  $۲v(v - ۱۰)$  داریم:

$$۱۲۰v - ۱۲۰(v - ۱۰) = v(v - ۱۰) \Rightarrow ۱۲۰۰ = v^2 - ۱۰v \Rightarrow v^2 - ۱۰v - ۱۲۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow v = ۴۰, -۳۰$$

$v = ۴۰$  قابل قبول است، لذا:

$$v_{\text{رفت}} = ۴۰ \Rightarrow v_{\text{برگشت}} = ۳۰ \Rightarrow \frac{v_{\text{برگشت}}}{v_{\text{رفت}}} = \frac{۳}{۴}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

برای راحتی فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^{\nu} - \frac{1}{x^{\nu}} = A \\ x^{\nu} + \frac{1}{x^{\nu}} = B \end{cases}$$

پس به  $f(A) = B$  می‌رسیم. ابتدا سعی می‌کنیم  $A$  و  $B$  را به هم نزدیک کنیم. برای این منظور آن‌ها را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^{\nu} - \frac{1}{x^{\nu}} = A \Rightarrow (x^{\nu} - \frac{1}{x^{\nu}})^{\nu} = A^{\nu} \Rightarrow x^{\nu^2} + \frac{1}{x^{\nu^2}} - \nu = A^{\nu} \quad (1)$$

$$x^{\nu} + \frac{1}{x^{\nu}} = B \Rightarrow (x^{\nu} + \frac{1}{x^{\nu}})^{\nu} = B^{\nu} \Rightarrow x^{\nu^2} + \frac{1}{x^{\nu^2}} + \nu = B^{\nu} \quad (2)$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$x^{\nu^2} + \frac{1}{x^{\nu^2}} = A^{\nu} + \nu$$

با جایگذاری در (۲) داریم:

$$\underbrace{x^{\nu^2} + \frac{1}{x^{\nu^2}}}_{A^{\nu} + \nu} + \nu = B^{\nu} \Rightarrow B^{\nu} = A^{\nu} + 4$$

$$\Rightarrow B = \pm \sqrt{A^{\nu} + 4}$$

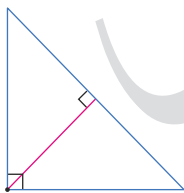
از آنجا که  $B = x^{\nu} + \frac{1}{x^{\nu}}$ ، بنابراین  $B$  همواره مثبت است و فقط  $B = \sqrt{A^{\nu} + 4}$  قابل قبول می‌باشد. پس:

$$f(A) = B \Rightarrow f(A) = \sqrt{A^{\nu} + 4}$$

$$f(x) = \sqrt{x^{\nu} + 4} \text{ در واقع}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

گزاره "ارتفاع‌های هر مثلثی نقطه‌ای در داخل یا خارج مثلث هم‌رس‌اند." گزاره‌ای غلط است که با مثال نقض مثلث قائم‌الزاویه می‌توان نادرستی آن را نشان داد.  
می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، محل هم‌رسی ارتفاع‌ها در رأس قائم یعنی در نقطه‌ای روی مثلث است.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

باید حد چپ و راست تابع در نقطه  $x = 0$  با مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} - 4 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} - 4 = a - 4 \\ f(0) = b + \left[0 - \frac{y}{y}\right] = b + \left[-\frac{3}{5}\right] = b - 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + 4 = [0^-] + 4 = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} a - 4 = 3 \Rightarrow a = 7 \\ b - 4 = 3 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a + b = 14 \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

اگر ریشه‌های معادله را  $\alpha$  و  $\beta$  فرض کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| &= \sqrt{3} \Rightarrow \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = 3 \\ \Rightarrow S - 2\sqrt{P} &= 3 \Rightarrow \frac{24}{4} - 2\sqrt{\frac{k}{4}} = 3 \\ \Rightarrow 6 - \sqrt{k} &= 3 \Rightarrow \sqrt{k} = 3 \Rightarrow k = 9 \end{aligned}$$

حال با معلوم شدن  $k = 9$ ، مجموع مکعب ریشه‌های معادله  $4x^2 - 24x + 9 = 0$  برابر است با:

$$\frac{S=6}{P=\frac{9}{4}} \rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3P.S = 6^3 - 3\left(\frac{9}{4}\right)(6) = 216 - \frac{162}{2} = \frac{432 - 162}{2} = \frac{270}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی یازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$f(2) = a - 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( a + \frac{bx + c}{|x^2 - 5x + 6|} \right) = a - 10$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین عدد ثابت } a \text{ را کم می‌کنیم}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{bx + c}{|x^2 - 5x + 6|} = -10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{bx + c}{x^2 - 5x + 6} = -10 \Rightarrow 2b + c = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{bx - 2b}{(x-2)(x-3)} = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{b}{x-3} = -b = -10 \Rightarrow b = 10 \xrightarrow{2b+c=0} c = -20 \Rightarrow b+c = -10$$

$$\text{توجه : } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) > 0 \Rightarrow |x^2 - 5x + 6| = x^2 - 5x + 6 \\ x \rightarrow 2^- \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

مقدار هریک از نسبت‌های مثلثاتی را به دست می‌آوریم:

$$۱) \cos\left(\frac{-19\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{18\pi + \pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$۲) \tan\left(\frac{-11\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{10\pi + \pi}{4}\right)$$

$$= -\tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$۳) \sin\left(\frac{46\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{23\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{24\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(8\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} \times -1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی یازدهم

تابع  $f$  از ضرب دو عبارت  $\left[\frac{x}{3}\right]$  و  $2x^2 + bx + c$  تشکیل شده که فقط  $\left[\frac{x}{3}\right]$  در نقاطی به طول مضرب ۳ ناپیوسته است و عبارت  $2x^2 + bx + c$  همه جا پیوسته است.

در بازه  $(5, 10)$  دو عدد مضرب ۳ داریم: ۶ و ۹

برای آنکه ضرب این دو عبارت پیوسته باشد، باید  $2x^2 + bx + c$  به ازای  $x = 6$  و  $x = 9$ ، صفر شود:

$$2x^2 + bx + c = 2(x - 6)(x - 9) \Rightarrow 2x^2 + bx + c = 2x^2 - \underbrace{30x}_{b} + \underbrace{108}_{c}$$

$$\Rightarrow b + c = -30 + 108 = 78$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

عبارت را با استفاده از قوانین توان و لگاریتم ساده می‌کنیم:

$$(\sqrt{32})^{2 - \log_4 3} = \frac{(\sqrt{32})^2}{(\sqrt{32})^{\log_4 3}} = \frac{32}{(2^{\frac{5}{2}})^{\log_4 3}} = \frac{32}{2^{\frac{5}{2} \log_4 3}}$$

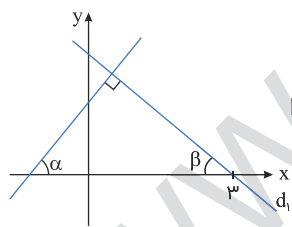
$$= \frac{32}{2 \log_4 \sqrt{3^5}} = \frac{32}{\sqrt{3^5}} = \frac{32}{3 \sqrt{3}}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری

تستر علوم تجربی یازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  متمم هستند، پس اگر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  باشد،  $\cos \beta = \frac{3}{5}$  است، بنابراین  $\tan \beta = \frac{4}{3}$  خواهد بود.



پس شیب خط  $d_1$  برابر  $-\tan \beta = \frac{-4}{3}$  می‌شود. خط  $d_1$  از نقطه  $(3, 0)$  می‌گذرد. معادله آن را می‌نویسیم:

$$y - 0 = \frac{-4}{3}(x - 3) \Rightarrow (x = 0) \text{ محل برخورد با محور } y \Rightarrow y = \frac{-4}{3}(-3) = 4$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

قرار می‌دهیم:  $\sqrt{x-5} = t$ ، پس  $x = t^2 + 5$  و معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$t + \sqrt{t^2 + 5 + 8t} = 7 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 8t + 5} = 7 - t \Rightarrow t^2 + 8t + 5 = t^2 - 14t + 49 \Rightarrow 22t = 44 \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow x-5 = 4 \Rightarrow x = 9 \quad \text{ق ق}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی یازدهم

صادق طاهری

۱ اگر  $m > a$  باشد، مقدار مینیمم نسبی تابع  $y = x^3 - 3x + m - 2$  مثبت خواهد بود. کمترین مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) -۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۲ اگر  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x - x^2}$  باشد، حاصل  $D_{f \circ g} \cap D_{g \circ f}$  برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $[0, 1]$   
(۲)  $[-1, 1]$   
(۳)  $\{0\}$   
(۴)  $\emptyset$

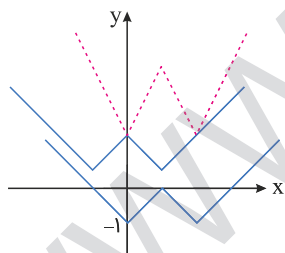
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۳ اگر  $(f \circ g)(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$  و  $f(x) = \frac{x}{x + 1}$  باشد، حاصل ضرب طول نقاط تلاقی توابع  $f$  و  $g$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳)  $\frac{1}{3}$   
(۴)  $-\frac{1}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۴ اگر نمودارهای  $f(x) - k$ ،  $kf(x)$  و  $f(x + \frac{k}{p})$  به شکل‌های زیر باشند،  $k$  کدام است؟



- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) -۱  
(۴) -۲

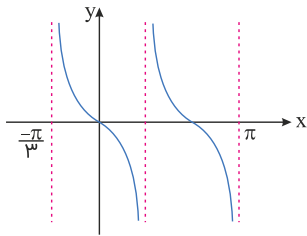
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۵ اگر  $f(x) = \frac{|x+1|}{x+b}$  و  $D_{f'} = \mathbb{R} - \{a, 2\}$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲) -۱  
 (۳) ۳  
 (۴) -۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

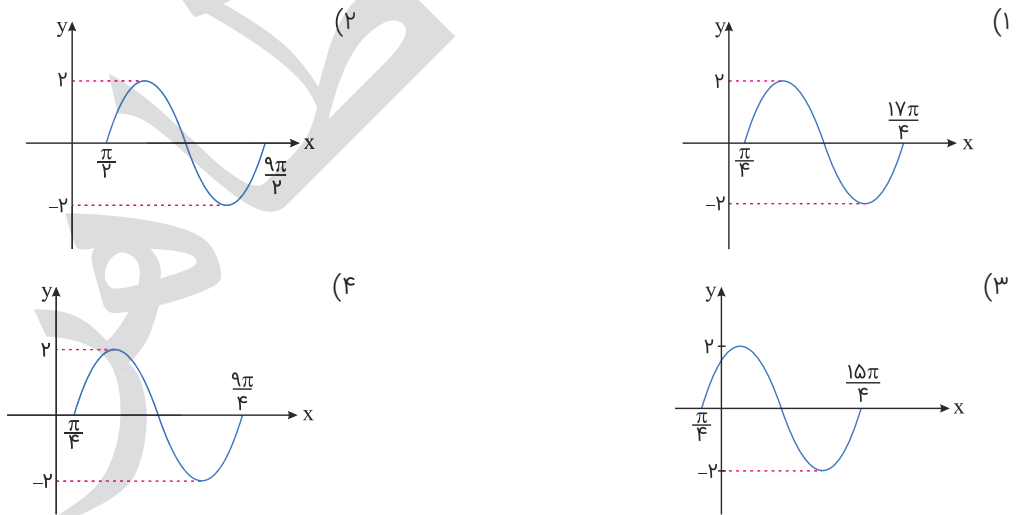
۶ شکل زیر مربوط به قسمتی از تابع  $f(x) = \tan ax$  می‌باشد. مقدار  $a$  کدام است؟



- (۱) ۳  
 (۲) -۳  
 (۳) ۳/۲  
 (۴) -۳/۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۷ تابع  $f(x) = \sin x$  با دامنه  $[0, 2\pi]$  مفروض است. نمودار تابع  $g(x) = 2f\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)$  کدام است؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع  $f(x) = ax^2 - 4x + 2a - 1$  مفروض است. اگر در بازه  $[-1, +\infty)$  به ازای هر  $x_1 < x_2$  داشته باشیم

۸

در این صورت حدود  $a$  کدام است؟

(۲)  $-2 \leq a \leq 0$

(۱)  $a \geq -2$

(۴)  $0 < a \leq 2$

(۳)  $-2 \leq a < 0$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{26}$  باشد، حاصل  $|\tan 4\alpha|$  کدام است؟

۹

(۲)  $\frac{12}{5}$

(۱)  $\frac{13}{5}$

(۴)  $\frac{5}{12}$

(۳)  $\frac{5}{13}$

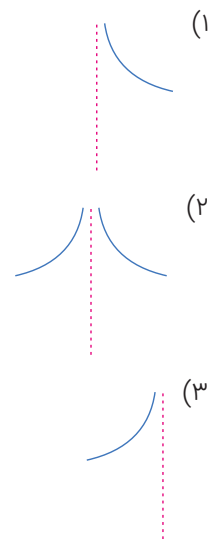
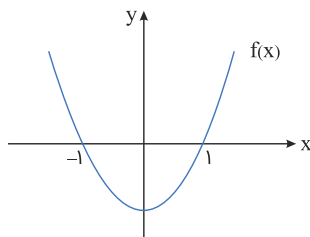
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{f(-x)}}$  در اطراف  $x = -1$  به کدام صورت است؟

۱۰



(۴) تابع در اطراف  $x = -1$  تعریف نمی‌شود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

کدام گزینه در مورد تابع  $f(x) = x(x - [x])$  در  $x = 1$  درست است؟

- (۱) تابع در این نقطه مینیمم نسبی دارد و نه مطلق.  
 (۲) تابع در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد و نه مطلق.  
 (۳) تابع در این نقطه مینیمم نسبی و مطلق دارد.  
 (۴) تابع در این نقطه ماکزیمم نسبی و مطلق دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

a و b اعدادی صحیح‌اند. اگر تابع  $f = \{(-1, -2), (0, 1), (1, a), (2, 4), (3, b), (4, 6)\}$  صعودی اکید باشد، مجموع مقادیر ab برابر کدام است؟

- (۱) ۲۵  
 (۲) ۲۲  
 (۳) ۲۰  
 (۴) ۱۲

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $f(x) = ax^2 \sqrt{3x^2 - 4}$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2) - f(x)}{x^2 + 2x - 8} = \frac{4}{3}$  باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$   
 (۲)  $-\frac{2}{3}$   
 (۳)  $\frac{8}{3}$   
 (۴)  $-\frac{8}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

جواب کلی معادله  $2 \cos x (\sin x + \cos x) = 1$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$   
 (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$   
 (۳)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$   
 (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

اگر  $f(x) = x - [x + \frac{1}{4}]$  و  $g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$  باشند، بُرد تابع  $g \circ f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $[0, \frac{1}{4}]$   
 (۲)  $[0, \frac{1}{2}]$   
 (۳)  $[0, 1)$   
 (۴)  $\{0\}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۶ تابع  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-1}$  در بازه  $(a, b)$  اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۴  
(۳) ۶  
(۴) ۸

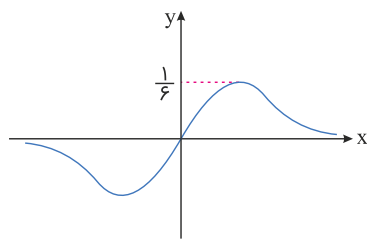
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۷ فاصله بین دو نقطه اکسترمم نسبی متوالی تابع  $f(x) = |a \sin \frac{\pi x}{a}|$  برابر با  $\sqrt{5}$  است. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\pm 1$   
(۲)  $\pm 2$   
(۳)  $\pm \sqrt{2}$   
(۴)  $\pm 4$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

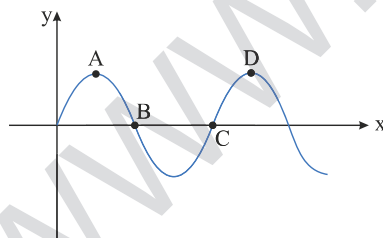
۱۸ نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2 + k}$  مطابق شکل زیر است.  $k$  کدام است؟



- (۱) ۴  
(۲) ۹  
(۳) -۴  
(۴) -۹

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۹ شکل زیر، نمودار تابع  $f(x) = a \sin(\frac{x}{a})$  است. اگر مساحت شکل حاصل از وصل کردن نقاط  $A, B, C, D$  به یکدیگر، برابر با  $\frac{13}{5}\pi$  باشد، کمترین مقدار  $a$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{3}$   
(۲) ۳  
(۳)  $-\frac{1}{3}$   
(۴) -۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۲۰ اگر  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  باشد، ضابطه  $f \circ f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$  (۲)  $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$   
 (۳)  $x$  (۴)  $1$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۲۱ مشتق تابع  $f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)$  در  $x=0$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $-1$   
 (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۲۲ تابع اکیداً نزولی  $f$  با دامنه  $(0, +\infty)$  مفروض است. اگر  $f(k^2 + k + 1) < f(2k^2 - 3k + 1)$  باشد، آنگاه چند عدد صحیح به جای  $k$  می‌توان پیدا کرد؟

- (۱)  $4$  (۲)  $3$   
 (۳)  $2$  (۴)  $1$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۲۳ اگر  $D_f = \mathbb{N}$  و  $g(x) = 2 - x^2$  باشد، آنگاه دامنه تابع  $f \circ g$  چند عضوی است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$   
 (۳)  $3$  (۴)  $4$

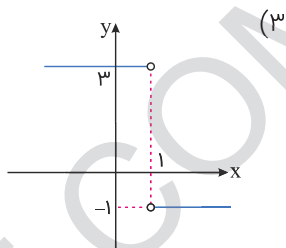
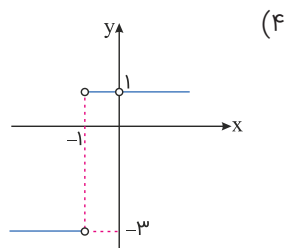
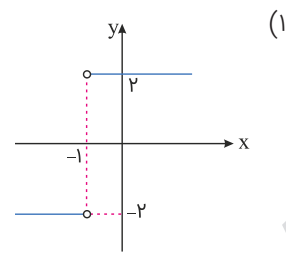
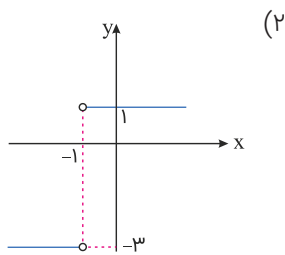
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۲۴ توابع مشتق‌پذیر  $f$  و  $g$  مفروض‌اند. اگر  $g(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x}$  و  $(f \circ g)(x) = 5x^2 - 6x + 1$  باشند، آنگاه  $f'(2)$  کدام است؟

- (۱)  $4$  (۲)  $8$   
 (۳)  $-4$  (۴)  $-8$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۲۵ اگر  $f(x) = |2x + 2| - x$  باشد، نمودار تابع  $f'$  کدام است؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۲۶ اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 + a(x-1)^3}{b(x+2) + (x-3)^2} = \frac{a}{2}$  باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) -۷  
(۲) -۸  
(۳) -۹  
(۴) -۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۲۷ معادله  $\sqrt{x} \cos x - \sin x = 0$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۲۸ مشتق تابع  $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$  در نقطه  $x = 1$  چند برابر مشتق تابع  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$  در همان نقطه است؟

- (۱)  $2\sqrt{2} - 3$   
(۲)  $2\sqrt{2} + 3$   
(۳)  $\sqrt{2} - 1$   
(۴)  $\sqrt{2} + 1$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مجموعه جواب‌های کلی معادله  $\sin 2x - \tan x = 0$  به کدام صورت زیر است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (۳)$$

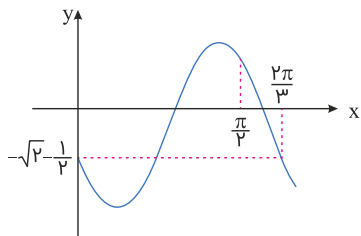
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  باشد، ضابطه تابع  $f \circ f(x)$  کدام است؟

$$\begin{matrix} x & (۱) \\ -x & (۲) \\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 & (۴) \\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 & (۳) \end{matrix}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

نمودار تابع  $y = 2 \sin\left(bx - \frac{3\pi}{4}\right) + a$  به شکل زیر می‌باشد.  $a + b$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{7}{2}$
- (۲)  $\frac{5}{2}$
- (۳)  $-\frac{7}{2}$
- (۴)  $-\frac{5}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

تابع با ضابطه  $f(x) = x|x^2 - 4|$ ، دارای ..... اکسترمم نسبی و ..... نقطه بحرانی است.

- (۱)  $۴ - ۲$
- (۲)  $۴ - ۴$
- (۳)  $۳ - ۲$
- (۴)  $۲ - ۴$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۳۳ اگر  $f\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$  باشد، حاصل  $f(\sqrt{5})$  چند برابر  $\sqrt{5}$  است؟

- (۱) ۲  
(۲)  $\sqrt{2}$   
(۳)  $\sqrt{3}$   
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۳۴ اگر فاصله نقطه  $\min$  و  $\max$  نسبی در تابع  $y = x|x - a|$  برابر با  $\sqrt{2}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟ ( $a > 0$ )

- (۱) ۱  
(۲)  $\sqrt{2}$   
(۳) ۲  
(۴)  $\sqrt{8}$

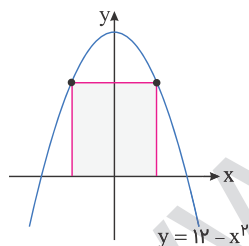
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۳۵ اگر  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$  باشد، حاصل  $\frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - 1}{\sqrt{1 - \sin 2\alpha} + 1}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan \frac{\alpha}{2}$   
(۲)  $-\tan \frac{\alpha}{2}$   
(۳)  $\cot \frac{\alpha}{2}$   
(۴)  $-\cot \frac{\alpha}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۳۶ بیشترین مساحت از بین مستطیل‌هایی که مانند شکل زیر یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور  $x$  و دو رأس آن‌ها بر منحنی  $y = 12 - x^2$  قرار گیرند، کدام است؟



- (۱) ۱۶  
(۲) ۲۴  
(۳) ۳۲  
(۴) ۳۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۳۷ در مورد تابع  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}$  کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) تابع  $f$  صعودی است.  
(۲) تابع  $f$  نزولی است.  
(۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی است.  
(۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۳۸ اگر  $f'(x) = \sin x \cos x$  باشد، آنگاه  $f(x)$  روی کدام فاصله صعودی است؟

- (۱)  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$   
(۲)  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$   
(۳)  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$   
(۴)  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۳۹ اگر  $f = \{(1, 2), (0, -1), (2, 0)\}$  باشد، آنگاه حاصل  $(f \circ (f + 1))(0)$  کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) صفر  
(۳) ۱  
(۴) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۴۰ وارون تابع  $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ ;  $x \geq 2$  به صورت  $f^{-1}(x) = x^2 + ax + b$  می‌باشد. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) صفر

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۱ اگر تابع  $f(x) = (x^2 + bx + c) \left[ \frac{x}{3} \right]$  در بازه  $(8, 4)$  مشتق‌پذیر باشد، مقدار  $b + 2c$  کدام است؟

- (۱) ۶۰  
(۲) ۷۲  
(۳) ۸۴  
(۴) ۹۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۴۲ تابع  $f(x) = x^6 - ax^3 + 5x^2 - 9x + b$  بر  $۲ - ۳x + x^2$  بخش پذیر است. حاصل  $a + b$  چقدر است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۳  
(۳) ۶  
(۴) ۹

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۴۳ حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2 + 5x}}{2x + \sqrt{-2x}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$   
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴)  $\frac{3}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۴۴ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 4[x^2 - 2x]}{\sqrt{3x+1} - 2}$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

- (۱) ۳  
(۲)  $\frac{20}{3}$   
(۳) ۷  
(۴)  $\frac{25}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۴۵ تابع مشتق پذیر  $f(t) = \sqrt{t^2 + k}$  به شرط  $k \in \mathbb{N}$  نشان دهنده جمعیت جامعه در زمان  $t$  سال بعد است. درباره آهنگ رشد جمعیت در طی یک مدت زمان طولانی، کدام گزینه درست است؟

- (۱) ثابت و بسیار کم است.  
(۲) مثبت و بسیار کم است.  
(۳) مثبت و بسیار زیاد است.  
(۴) بستگی به مقدار  $k$  دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۴۶ معادله  $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۴۷ حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x+4}{x+1} \right]$  کدام است؟

(۱)  $-3$

(۲)  $3$

(۳)  $2$

(۴) حد موجود نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۴۸ نمودار تابع  $y = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$  در فاصله  $\left[ a, -\frac{3\pi}{4} \right]$  اکیداً نزولی می‌باشد. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{5\pi}{4}$

(۲)  $-\frac{3\pi}{2}$

(۳)  $-\pi$

(۴)  $-\frac{7\pi}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۴۹ تابع  $f(x) = |2x - 2| + kx$  اکیداً صعودی است. حدود مقادیر  $k$  کدام است؟

(۱)  $k > 2$

(۲)  $k > -2$

(۳)  $-2 < k < 2$

(۴)  $k < 2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۵۰ تعداد ریشه‌های معادله مثلثاتی  $\sin x(\sin x - \cos x) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چندتا است؟

(۱)  $2$

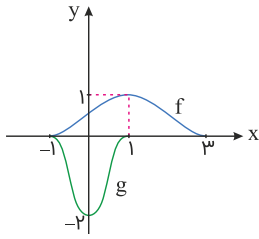
(۲)  $3$

(۳)  $4$

(۴)  $5$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

در شکل زیر، نمودار تابع  $g$  از روی نمودار تابع  $f$  ساخته شده است. ضابطه  $g$  کدام است؟



(۱)  $-2f\left(\frac{x+2}{2}\right)$

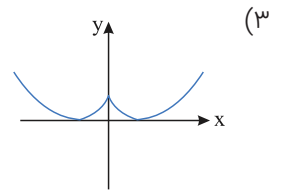
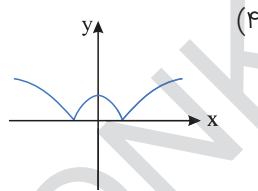
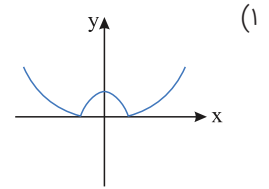
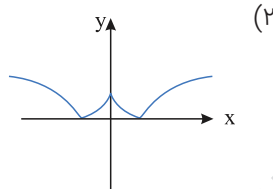
(۲)  $2f(-2x+1) - 1$

(۳)  $2f\left(\frac{-x+2}{2}\right) + 1$

(۴)  $-2f(2x+1)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نمودار تابع  $y = |\sqrt{|x|} - 1|$  به کدام گزینه نزدیکتر است؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

کمتربین فاصله نقاط منحنی  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$  از نقطه  $(-3, 0)$  کدام است؟

(۲) ۲

(۱)  $2\sqrt{2}$

(۴)  $\sqrt{6}$

(۳) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۵۴ تابع  $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} |3x^2 + x^2 - 4x|$  در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۵۵ مقدار مشتق دوم تابع  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{ax^2 + 1}}$  در  $x = 2$  برابر با یک می‌باشد. مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳)  $\frac{3}{4}$   
(۴) ۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۵۶ سه تابع  $f(x) = x + a$ ،  $g(x) = f^2(x)$  و  $h(x) = f^3(x)$  مفروض‌اند و در بازه  $[3, 4]$  داریم:  $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ .  
ا کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) -۳  
(۳) ۴  
(۴) -۴

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۵۷ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)(\sqrt[3]{x} + x)}{x\sqrt{x} - 1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) ۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۵۸ اگر  $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{x + 1}$  و  $x = 2$  نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد، مقدار ماکزیمم نسبی تابع  $f$  کدام است؟

- (۱) -۸  
(۲) -۹  
(۳) -۱۰  
(۴) -۱۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۵۹ تابع دوضابطه‌ای  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x > 0 \\ -x^2 + k & ; x \leq 0 \end{cases}$  وارون‌پذیر می‌باشد. اگر  $f^{-1} \circ f^{-1}(3) = 0$  باشد، آنگاه مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) -۲  
(۴) صفر

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۶۰ نمودار تابع  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 10$  از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (۱) اول  
(۲) دوم  
(۳) سوم  
(۴) چهارم

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۶۱ اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 1}{ax^2 + bx + 4} = -\infty$  باشد، حاصل  $a^2 + b$  کدام است؟

- (۱) -۸  
(۲) ۸  
(۳) -۱۶  
(۴) ۱۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۶۲ کدام تابع اکستریم نسبی دارد؟

- (۱)  $y = \log x$   
(۲)  $y = \sqrt{x}$   
(۳)  $y = x|x|$   
(۴)  $y = x - [x]$

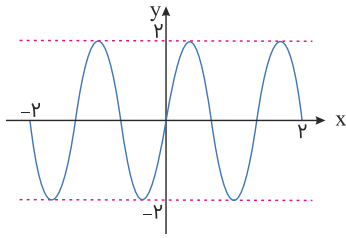
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۶۳ نمودار تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + a$  نسبت به نقطه  $(-1, -5)$  متقارن است.  $a$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲) ۲  
(۳) -۴  
(۴) ۴

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

شکل زیر، قسمتی از نمودار  $y = a \cos(\pi(\frac{3}{4} - bx))$  می‌باشد. مقدار عددی  $a.b$  کدام است؟



- (۱) ۳  
(۲) -۳  
(۳)  $\frac{3}{4}$   
(۴)  $-\frac{3}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} - 1)}$  کدام است؟

- (۱) ۱۲  
(۲) ۲۴  
(۳) ۳۶  
(۴) ۴۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

کدام گزینه در مورد تابع  $f(x) = \begin{cases} |x| & ; x \leq 0 \\ \sqrt{x} & ; x \geq 0 \end{cases}$  درست است؟

- (۱) روی  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است.  
(۲) در فاصله  $[0, +\infty)$  مشتق‌پذیر است.  
(۳) در  $x = 0$  ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.  
(۴) در  $x = 0$  نقطه گوشه‌ای است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع  $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$  در فاصله  $[-3, 0]$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt[3]{4}$   
(۲)  $2\sqrt[3]{2}$   
(۳) ۱  
(۴)  $1 + \sqrt[3]{4}$

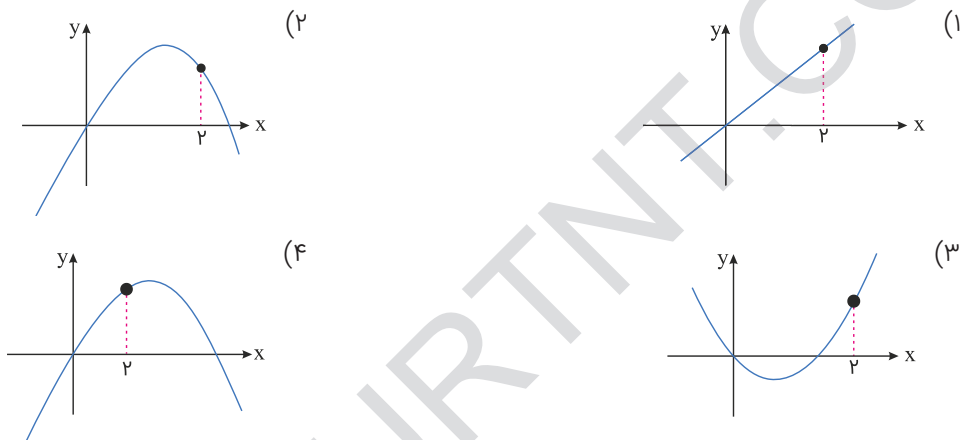
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مجموع جواب‌های معادله  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = \frac{7}{8}$  در بازه  $[0, \frac{\pi}{3}]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{11\pi}{24}$
- (۲)  $\frac{\pi}{2}$
- (۳)  $\frac{13\pi}{24}$
- (۴)  $\frac{7\pi}{12}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

در تابع  $y = f(x)$ ، آهنگ لحظه‌ای تغییرات در نقطه  $x = 2$  از آهنگ متوسط تغییرات در بازه  $[0, 2]$  بیشتر است. نمودار تابع  $f$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

فاصله نقاط مینیمم نسبی تابع  $f(x) = x^2|x| - x^2$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲)  $\frac{2}{3}$
- (۳) ۲
- (۴)  $\frac{4}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مقدار مینیمم نسبی تابع  $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$  کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) -۱
- (۳) ۱
- (۴) -۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۷۲ اگر  $f(x) = \sqrt{x - 4\left[\frac{x}{4}\right]}$  و  $g(x) = -x^2 + 6x + 1$  باشند، برد تابع  $g \circ f(x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۷  
(۳) ۸  
(۴) ۹

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۷۳ حد راست و چپ تابع  $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x}$  در نقطه  $x = \frac{7\pi}{6}$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱)  $+\infty$  و  $+\infty$   
(۲)  $+\infty$  و  $-\infty$   
(۳)  $-\infty$  و  $-\infty$   
(۴)  $-\infty$  و  $+\infty$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۷۴ حاصل حد عبارت  $\frac{\tan^2 x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin^2 x}$  وقتی  $x \rightarrow 0^-$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$   
(۲)  $-2\sqrt{2}$   
(۳)  $-\sqrt{2}$   
(۴)  $\sqrt{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۷۵ اگر  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a^3} - a}{x} & ; x \neq 0 \\ b & ; x = 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته باشد،  $b$  کدام است؟ ( $a \neq 0$ )

- (۱)  $3a^2$   
(۲)  $-3a^2$   
(۳)  $\frac{-1}{3a^2}$   
(۴)  $\frac{1}{3a^2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۷۶ آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = 3\sqrt{4x+1}$  در بازه  $[2, 2/001]$  کدام است؟

- (۱)  $3/001$   
(۲)  $2/001$   
(۳)  $2/999$   
(۴)  $1/999$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نمودار تابع  $f(x) = 10x - [10x]$  در بازه  $(\frac{1}{10}, 10)$  در چند نقطه، فقط از چپ پیوسته است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۹  
(۳) ۱۰  
(۴) بی‌شمار

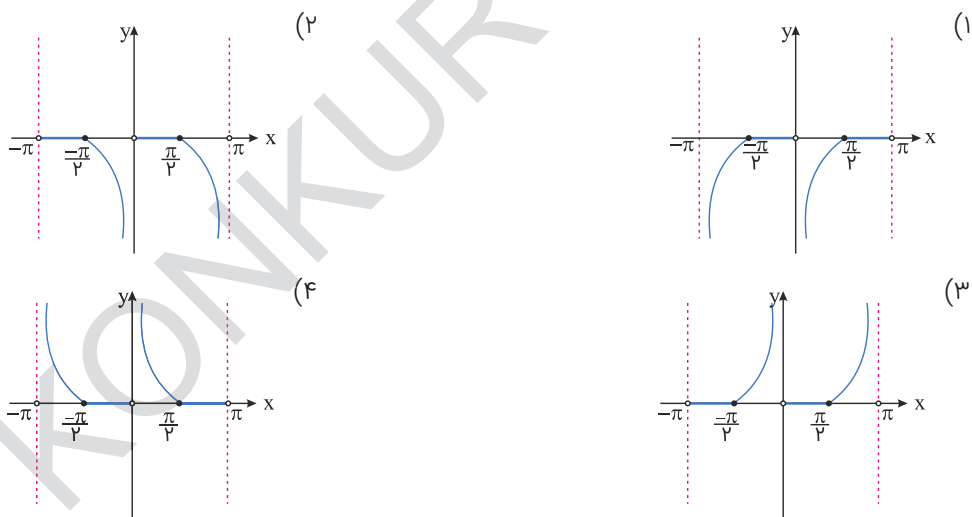
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع دوقطعه‌ای  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x > 0 \\ -x^2 + k & ; x \leq 0 \end{cases}$  وارون‌پذیر است. اگر  $f^{-1} \circ f^{-1}(3) = 0$  باشد، آنگاه مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) -۱  
(۳) -۲  
(۴) صفر

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\cot x + |\cot x|}{2}$  در بازه  $(-\pi, \pi)$  کدام است؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

خط  $y = -2x + 3$  در ناحیه اول بر منحنی  $y = -x^3 + x + m$  مماس می‌باشد.  $m$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

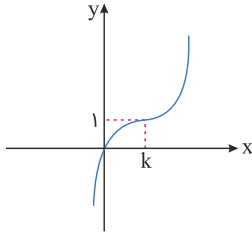
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به ماشین  $x^2 \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow (x-1)$ ، اگر  $g(x) = \frac{x+1}{x}$  باشد، حاصل  $f(\frac{3}{2})$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۹

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  به صورت زیر است. حاصل  $a + b + c$  کدام است؟



- (۱) صفر  
(۲) ۶  
(۳) -۶  
(۴) ۳

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $f(x) = (2x^3 + 5)^3 + kx(4x^2 + 2)^n$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۶ باشد، مقدار  $n + k$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$   
(۲)  $\frac{5}{2}$   
(۳) ۱  
(۴) ۳

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

اگر تابع با ضابطه  $f(x) = (m-3)x^2 + 2(m^2-3)x + 5$  روی بازه  $(-\infty, 1)$  اکیداً صعودی و روی بازه  $(1, +\infty)$  اکیداً نزولی باشد، آنگاه مجموع مقادیر  $m$  کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) -۳

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

شیب خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \frac{5x[x^2] - 3}{3x + |2x - 4|}$  در نقطه  $(\frac{3}{2}, \frac{24}{11})$ ، کدام است؟

- (۲)  $\frac{172}{169}$   
(۴)  $\frac{172}{121}$

- (۱)  $\frac{152}{169}$   
(۳)  $\frac{152}{121}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ،  $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x-1}$  و  $g^{-1}(f(3a)) = 1$  باشد، کدام است  $a$ ؟

- (۲)  $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

(۴) تعریف نشده است.

- (۳)  $\frac{1}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$  از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

(۲) دوم

(۱) اول

(۴) چهارم

(۳) سوم

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; x < 1 \\ \sqrt{x-1} + a & ; x \geq 1 \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  صعودی اکید است.  $a$  چه مقادیری دارد؟

(۲)  $a < 1$

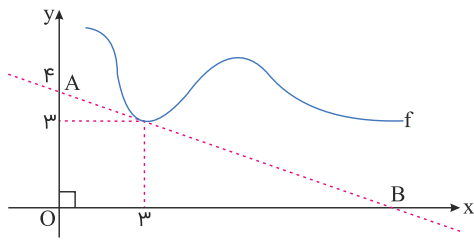
(۱)  $a \geq 1$

(۴)  $a < -1$

(۳)  $a \geq 0$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

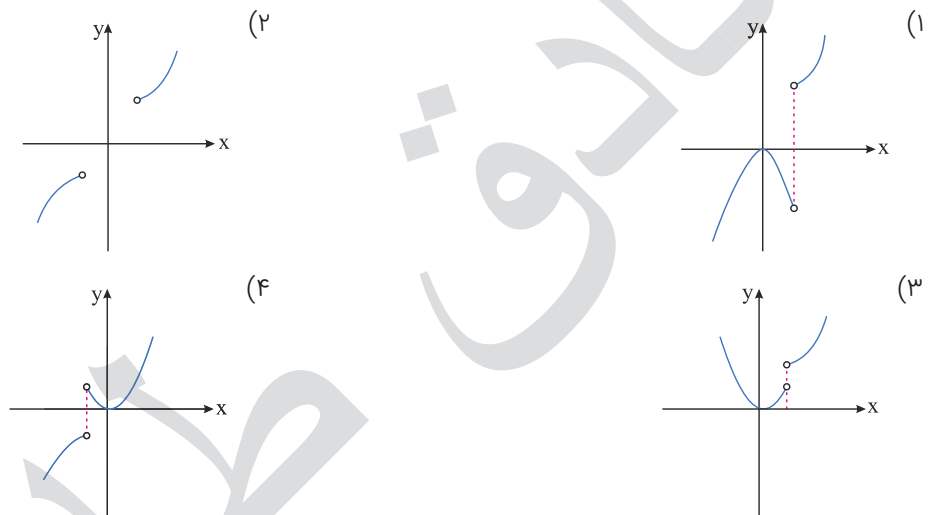
مساحت مثلث OAB در شکل زیر، برابر با ۱۰ است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 9}{x - 3}$  کدام است؟



- (۱) ۶
- (۲) -۶
- (۳) -۴/۸
- (۴) ۴/۸

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نمودار مشتق تابع  $y = |x^3 - 1|$  به کدام صورت است؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر تابع  $y = |4x^2 - mx + 1|$  در  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر باشد و بدانیم در بازه  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  اکیداً صعودی است، حدود  $m$  کدام می‌باشد؟

- (۱)  $-4 \leq m \leq 4$
- (۲)  $-4 \leq m \leq 2$
- (۳)  $-2 \leq m \leq 4$
- (۴)  $-2 \leq m \leq 2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $f(x) = x\sqrt{2x+2}$  باشد، حاصل  $\lim_{t \rightarrow 7} \frac{f(t) - f(\frac{3t+7}{4})}{t-7}$  کدام است؟

$$\frac{23}{4} \quad (2)$$

$$\frac{23}{8} \quad (4)$$

$$\frac{21}{4} \quad (1)$$

$$\frac{21}{8} \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تعداد نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$  برابر کدام گزینه است؟

$$1 \quad (2)$$

$$3 \quad (4)$$

(۱) نقطه بحرانی ندارد.

$$2 \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

شیب خط واصل بین نقاط بیشترین و کمترین مقدار تابع  $y = x^3 - 3mx^2 + 1$  در بازه  $[m, 3m]$  کدام است؟ ( $m > 0$ )

$$2m^2 \quad (2)$$

$$4m^2 \quad (4)$$

$$m^2 \quad (1)$$

$$3m^2 \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $f(x) = x|x+1|$  باشد، آنگاه تابع  $y = |f(x)|$  در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟

$$\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \quad (2)$$

$$[1, 2] \quad (4)$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \quad (1)$$

$$\left[-1, -\frac{1}{2}\right] \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نقاط بحرانی تابع  $f(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 16x^2}$  رئوس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث چند واحد مربع است؟

$$6 \quad (2)$$

$$16 \quad (4)$$

$$4 \quad (1)$$

$$8 \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مجموع جواب‌های معادله  $\sin^2 x = \cos^2 x - 1$  در بازه  $(0, \pi)$  کدام است؟

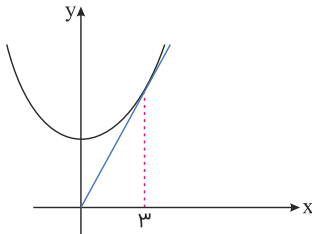
۹۷

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$   
 (۲)  $\pi$   
 (۳)  $\frac{\pi}{2}$   
 (۴)  $\frac{3\pi}{4}$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

در شکل زیر، در نقطه  $x = 3$  خطی مماس بر منحنی  $f(x) = x^2 + k$  رسم شده است.  $k$  کدام است؟

۹۸



- (۱) ۳  
 (۲) ۴  
 (۳) ۹  
 (۴) ۱۲

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

در کدام نقطه از تابع  $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، خط مماس بر منحنی موازی خط قاطع گذرنده از نقاطی به طول‌های  $x = 3$  و  $x = 0$  بر روی منحنی است؟

۹۹

- (۱) ۱  
 (۲)  $\frac{5}{4}$   
 (۳)  $\frac{3}{2}$   
 (۴)  $\frac{7}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{ax} - \sqrt{bx} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

۱۰۰

- (۱) صفر  
 (۲) ۱  
 (۳) ۵  
 (۴) ۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۰۱ اگر  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{-1}{ax^2 + 2x + a} = +\infty$  باشد، حاصل  $a - b$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۲  
(۳) -۲  
(۴)  $\pm ۲$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۰۲ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6 - \sqrt{x+5}} - 2}{9 - x^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{72}$   
(۲)  $\frac{1}{144}$   
(۳)  $\frac{1}{216}$   
(۴)  $\frac{1}{288}$

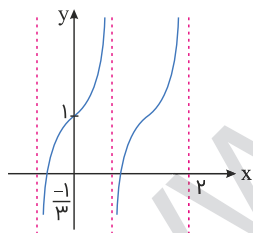
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۰۳ اگر خط  $y + 2x = 3$  بر تابع  $f$  در  $x = 2$  مماس باشد و  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 4}{x^2 - 1} = 3$  مقدار  $(g \circ f)'(2)$  کدام است؟ (تابع  $g$  در  $x = -1$  مشتق پذیر است)

- (۱) -۶  
(۲) ۶  
(۳) -۱۲  
(۴) ۱۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۰۴ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = a \tan(b\pi x) + c$  را نشان می‌دهد. حاصل  $a + b + c$  برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟



- (۱)  $0/75$   
(۲)  $1/75$   
(۳)  $2/25$   
(۴)  $2/75$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۰۵ معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  واقع بر آن، به صورت  $y = 3x + 1$  است. حاصل  $a - b$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) -۳  
(۴) -۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۰۶ تابع  $f(x) = \frac{2x + b}{3x + d}$  در بازه‌های  $(-2, +\infty)$  و  $(-\infty, -2)$  اکیداً یکنوا است و محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. کدام تابع زیر اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $y = d^{-x}$   
(۲)  $y = bx^{30}$   
(۳)  $y = dx - b|x|$   
(۴)  $y = \sin(dx)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۰۷ پنجره‌ای به شکل یک مستطیل است که در بالا و پایین آن دو نیم‌دایره با قطری برابر با عرض مستطیل قرار گرفته‌اند. اگر محیط این پنجره برابر با ۲۰۰ متر باشد و بخواهیم بیشترین نوردهی را داشته باشد، شعاع نیم‌دایره‌ها چندبرابر  $\frac{1}{\pi}$  است؟

- (۱) ۵۰  
(۲) ۷۵  
(۳) ۱۰۰  
(۴) ۲۰۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۰۸ اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع  $f(x) = \frac{a\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$  در  $x = 16$  برابر با  $\frac{1}{40}$  باشد، آهنگ متوسط تغییر تابع  $f$  در بازه  $[1, 4]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{12}$   
(۲)  $\frac{5}{18}$   
(۳)  $\frac{7}{12}$   
(۴)  $\frac{7}{18}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۰۹ اگر  $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\tan(\frac{\pi x}{2}) + 1}$  باشد، کدام گزینه درست است؟

(۲)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^-} f(x) = +\infty$

(۱)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} f(x) = -\infty$

(۴)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{4}^-} f(x) = -\infty$

(۳)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{4}^+} f(x) = +\infty$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۱۰ تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}|x^3 - x|$  چند نقطهٔ بحرانی دارد که در آن‌ها تابع مشتق‌پذیر نیست؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۱۱ تابع  $f(x) = (x^3 - 40x)\sqrt[3]{x}$  در کدام بازه، صعودی است؟

(۲)  $(-3, -1)$

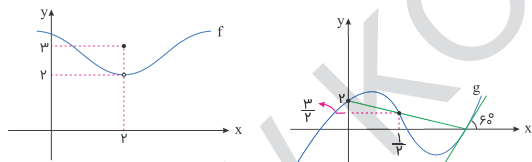
(۱)  $(-7, -5)$

(۴)  $(3, 5)$

(۳)  $(1, 3)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۱۲ اگر نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشند، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)g(2+h) - f(2)g(2)}{h}$  کدام است؟



(۱) صفر

(۲)  $2\sqrt{3}$

(۳)  $3\sqrt{3}$

(۴) وجود ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۱۳ اگر  $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$  باشد، نمودار تابع  $f(x) = 3 \cos(ax)$  در بازهٔ  $(0, 2\pi)$  حداکثر چند تلاقی با نمودار  $y = a$  دارد؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

اگر تابع  $f$  برای هر  $x$  در رابطه  $f(2x+1) = 4x^2 - 2x$  صدق کند،  $f(-x)$  کدام است؟

$$x^2 + 3x - 2 \quad (2)$$

$$x^2 + 3x + 2 \quad (1)$$

$$x^2 - 3x - 2 \quad (4)$$

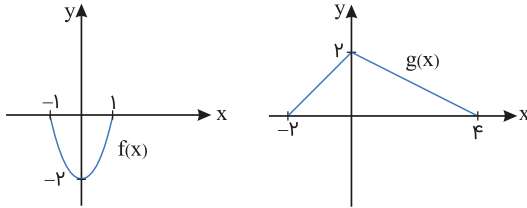
$$x^2 - 3x + 2 \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به نمودار تابع درجه دوم  $f$  و تابع  $g$  در شکل زیر، چند عدد صحیح در دامنه تعریف تابع  $f \circ g$  وجود دارد؟



$$3 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$5 \quad (3)$$

$$6 \quad (4)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

اگر  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + 7x + 6}{x^3 - 4x} = -\infty$  باشد، مجموعه مقادیر  $a$  کدام است؟

$$\{0, 2\} \quad (2)$$

$$\{0\} \quad (1)$$

$$\{0, 2, -2\} \quad (4)$$

$$\{2\} \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x + 7 \cos x + 4 = 0$  کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

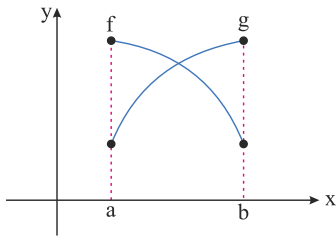
$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$  در بازه  $[a, b]$  رسم شده است. تابع  $\frac{f}{g}$  در این بازه از نظر یکنوایی چه وضعی دارد؟



(۱) اکیداً نزولی

(۲) اکیداً صعودی

(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی

(۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  باشد، حاصل عبارت  $(\frac{1}{\cos x} - 2 \cos x) \sqrt{2 + 2 \cos 2x}$  کدام است؟

(۱)  $2 \cos 2x$

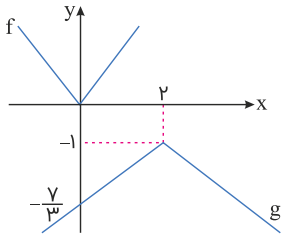
(۲)  $-2 \cos 2x$

(۳)  $-2 \sin^2 x$

(۴)  $2 \sin^2 x$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نمودار تابع  $g$  از روی نمودار تابع  $f(x) = |x|$  رسم شده است.  $g(\frac{5}{3})$  کدام است؟



(۱)  $-4$

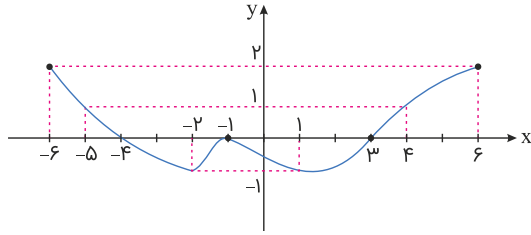
(۲)  $-\frac{5}{2}$

(۳)  $-\frac{7}{3}$

(۴)  $-3$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

اگر نمودار تابع  $f(x)$  به صورت زیر باشد، طول حداکثر بازه‌ای که تابع  $y = \frac{1}{f(x) - 1}$  اکیداً نزولی می‌باشد، کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حاصل  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \frac{\tan x - 1}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$  کدام است؟

- $\sqrt{2}$  (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳) $\sqrt{2}$  (۲)- $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

اگر دامنهٔ تعریف تابع  $f(x) = x + \sqrt{ax + b - x^2}$  به صورت بازه  $[-1, 3]$  باشد، مقدار اکستریم نسبی و نوع آن کدام است؟

۲ $\sqrt{2}$ ، مینیمم نسبی (۱)۲ $\sqrt{2} + 1$ ، ماکزیمم نسبی (۳)۲ $\sqrt{2}$ ، ماکزیمم نسبی (۲)۲ $\sqrt{2} + 1$ ، مینیمم نسبی (۴)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

در تابع  $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$  کمترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای در بازه  $[1, 3]$  چقدر از آهنگ متوسط در این بازه کمتر است؟

۱ (۱)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴ (۴)

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۲۵ اگر  $f = \{(-1, 2), (2, 0), (0, -1), (1, 1)\}$  باشد، مجموع عضوهای برد تابع  $f^{-1} \circ f^2$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۲۶ نمودار تابع  $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x - 1}$  در حوالی نقطه  $x = \frac{\pi}{3}$  به کدام صورت است؟



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۲۷ اگر  $f(x) = x + \sqrt{2x-1} - 7$  باشد، مقدار مشتق  $\frac{f \circ f}{f}$  به ازای  $x = 5$  کدام است؟

- (۱) ۱۲  
(۲)  $\frac{28}{3}$   
(۳)  $\frac{20}{3}$   
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۲۸ تابع  $f(x) = ||x| - 3|$  در بازه  $(-3, a)$  فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است.  $a$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) -۱  
(۲) صفر  
(۳) ۲  
(۴) ۴

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۲۹ کترین مقدار دوره تناوب تابع  $f(x) = \frac{2 \sin x + \sin 2x}{(1 + \cos x) \sin x}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲)  $\pi$   
(۳)  $2\pi$   
(۴) هر عددی می‌تواند باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۳۰ اگر  $f(x) = x\sqrt{x}$  باشد، آنگاه مشتق تابع  $f(x^2 f(x))$  در  $x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$   
(۲)  $\frac{7}{4}$   
(۳)  $\frac{21}{2}$   
(۴)  $\frac{21}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۳۱ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \sqrt{1-x}}$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) -۲  
(۳)  $\frac{2}{3}$   
(۴)  $-\frac{2}{3}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۳۲ اگر  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{-x^2 + (a+1)x - 2b - 1} = +\infty$  باشد،  $a + b$  چقدر است؟

- (۱) ۳  
(۲) -۳  
(۳) ۲  
(۴) -۲

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۳۳ مشتق تابع  $y = \sqrt{2 - \sqrt{\frac{3}{x+2}}}$  در  $x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{12}$   
(۲)  $\frac{1}{12}$   
(۳)  $\frac{1}{24}$   
(۴)  $-\frac{1}{24}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۳۴ تابع  $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{1-x}$  از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) اکیداً صعودی  
(۲) اکیداً نزولی  
(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی  
(۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۳۵ اگر فاصله خطوط مماس بر منحنی  $f(x) = \frac{ax}{x^2+1}$  و  $a > 0$  در نقاط اکسترمم نسبی آن  $20$  واحد باشد، مقدار  $f(2)$  کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۶  
(۳) ۸  
(۴) ۱۰

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۳۶ اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 + mx - m}$  باشد، آنگاه به ازای چه مقادیری از  $m$ ، تابع  $f$  در  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است؟

- (۱)  $m \in (-4, 0)$   
(۲)  $m \in [-4, 0]$   
(۳)  $m \in (-5, -3)$   
(۴)  $m \in (-\infty, -4)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۳۷ به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $f(x) = x|x-1| + a|x^2-1|$  در نقطه  $x=1$  مشتق‌پذیر است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$   
(۲)  $-\frac{1}{4}$   
(۳)  $-1$   
(۴)  $-\frac{3}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۳۸ اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{a \cos^f x - 1}{\cos^f x - \sin^f x} = L$  باشد، حاصل  $a + 3L$  کدام است؟ ( $L \in \mathbb{R}$ )

- (۱) ۱۰  
(۲) ۱۱  
(۳) ۱۲  
(۴) ۱۳

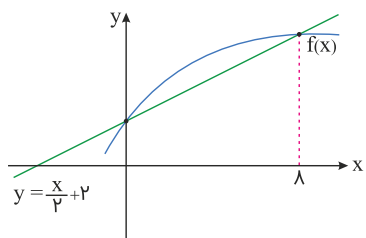
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۳۹ تانژانت زاویه‌ای که تابع خطی  $f$  با جهت مثبت محور  $x$  ها می‌سازد برابر ۴ است. اگر  $(fog)(x) = -\lambda x + 1\lambda$  و  $(gof)(x) = -\lambda x - 9$  مقدار  $g(-2)$  کدام است؟

- (۱) ۷  
(۲) ۶  
(۳) ۵  
(۴) ۹

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۴۰ نمودار تابع اکیداً یکنوای  $f$  به صورت زیر است. دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{f^{-1}(x) - 2x} + 4$  کدام است؟



- (۱)  $\mathbb{R} - (2, 6)$   
(۲)  $[2, 6]$   
(۳)  $[0, 8]$   
(۴)  $\mathbb{R} - (0, 8)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۴۱ اگر  $f(x) = \lambda x^3 - 1$  و  $f(g(x)) = x^3 + 3x^2 + 3x$  باشد، مقدار  $(f+g)(-1)$  کدام است؟

- (۱) -۶  
(۲) -۷  
(۳) -۸  
(۴) -۹

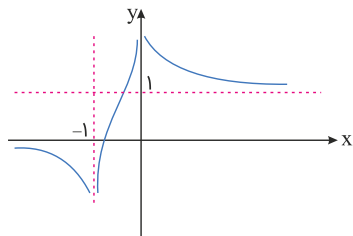
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۴۲ اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + b}) = \frac{1}{2}$  باشد،  $b$  کدام مقدار را می‌تواند بپذیرد؟

- (۱) صفر  
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳) هیچ مقدار  
(۴) هر مقدار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۴۳ شکل زیر مربوط به نمودار تابع  $y = f(x)$  می‌باشد. در این صورت حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$  کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) -۱

(۴) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۴۴ حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} + \sqrt{4x^2 - x + 1})$  کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $-\infty$

(۱) صفر

(۳)  $+\infty$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۴۵ اگر نقطه  $x = 3$ ، نقطه بحرانی تابع  $f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x + b}$  باشد ولی اکسترمم نسبی آن نباشد،  $a - b$  کدام است؟

(۲) ۵

(۴) امکان پذیر نیست.

(۱) ۱

(۳) ۷

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۴۶ اگر  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$  باشد، کامل‌ترین بازه‌ای که نمودار  $y = |f(x)|$  در آن اکیداً صعودی است، کدام می‌باشد؟

(۲)  $(1, +\infty)$

(۴)  $(0, +\infty)$

(۱)  $(2, +\infty)$

(۳)  $(-\infty, 1)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۴۷ اگر  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & ; x > 2 \\ 2x + 6 & ; x \leq 2 \end{cases}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + |h|) - f(2)}{h}$  کدام است؟

- (۱) ۱۰  
(۲) ۸  
(۳) ۱۲  
(۴) وجود ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۴۸ مینیمم مطلق تابع  $f(x) = \frac{2x^2 - \sqrt{x}}{2}$  در فاصله  $[0, 1]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) صفر  
(۳)  $-\frac{1}{4}$   
(۴)  $-\frac{3}{16}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۴۹ اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h - 3) + 5}{\Delta h^2 + h} = 6$  حاصل مشتق تابع  $f^3\left(\frac{1}{x}\right)$  در  $x = -\frac{1}{3}$  کدام است؟

- (۱) -۲۷۰  
(۲) -۶۷۵  
(۳) -۱۳۵۰  
(۴) -۲۰۲۵

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۵۰ وارون تابع  $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$  (به شرط  $x > 2$ ) کدام است؟

- (۱)  $y = x^2 - 2x + 2$   
(۲)  $y = x^2 - 2x$   
(۳)  $y = x^2 + 2x$   
(۴)  $y = x^2 + 2x + 2$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۵۱ اگر  $f$  تابعی چندجمله‌ای و  $f \circ f'(x) = 108x^2 + mx + n$  باشد، حاصل  $f''(99)$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۶  
(۳) ۹۹  
(۴) قابل محاسبه نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۵۲ جواب کلی معادله  $\sin x(\cos x - \sin x) = \frac{\cos 2x}{2}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$   
 (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$   
 (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$   
 (۴)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۵۳ اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{1-x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x - |x+1|}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{2}{3}$   
 (۴)  $2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۵۴ اگر  $f(x)$  تابعی خطی باشد، در تابع  $g(x) = (x+1)f(x)$ ، اختلاف آهنگ متوسط تغییرات در بازه  $[-1, 3]$  با آهنگ لحظه‌ای تغییرات در  $x = 1$  کدام است؟

- (۱) صفر  
 (۲) ۱  
 (۳) ۲  
 (۴) نمی‌توان تعیین نمود.

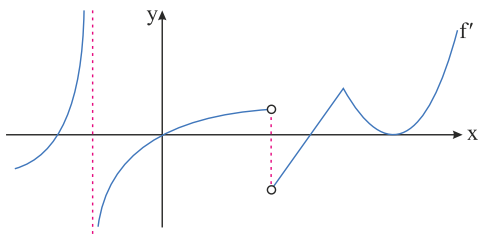
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۵۵ تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{-x}$  را تحت یک انقباض ۲ واحدی افقی قرار داده و سپس قرینه آن را نسبت به محور  $y$  ها به دست آورده و پس از آن یک واحد انتقال افقی به چپ می‌دهیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{-2x}} + \sqrt{2x-2}$   
 (۲)  $\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + \sqrt{2x}$   
 (۳)  $\frac{1}{\sqrt{-2x+1}} + \sqrt{2x+1}$   
 (۴)  $\frac{1}{\sqrt{-2x}} + \sqrt{2x+2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۵۶ نمودار تابع  $f'$  به صورت زیر است. اگر  $D_f = \mathbb{R}$  باشد، تعداد نقاط بحرانی و نقاط ماکزیمم نسبی تابع  $f$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



(۱) ۲ و ۷

(۲) ۲ و ۶

(۳) ۳ و ۷

(۴) ۳ و ۶

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۵۷ اگر  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  و  $g(x) = \frac{1}{x + 3}$ ، آنگاه چند عدد صحیح در دامنه  $g \circ f$  وجود ندارد؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۵

(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۵۸ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{1 + \cos 4x}$  کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{4}$

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $\frac{1}{6}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۵۹ اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 1$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) صفر

(۳) -۱

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی دوازدهم

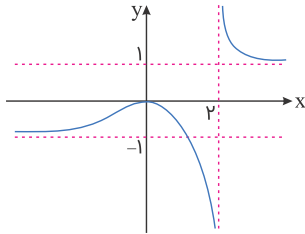
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۶۰ تابع با ضابطه  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{x}$  دارای چند نقطه بحرانی است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۳  
(۳) ۲  
(۴) ۱

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۶۱ باتوجه به نمودار  $f$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] - \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(f(x))]$  برابر کدام است؟



- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳) ۱  
(۴) ۲

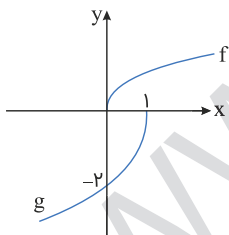
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۶۲ تابع  $f(x) = \begin{cases} ax + a - 1 & ; x < 1 \\ x + \sqrt{x+3} & ; x \geq 1 \end{cases}$  اکیداً یکنوا است. مجموعه مقادیر  $a$  شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی‌شمار

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۶۳ نمودار تابع  $g(x)$  طی مراحل از روی نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  رسم شده است.  $g(-3)$  کدام است؟



- (۱) -۳  
(۲) -۴  
(۳) -۶  
(۴) -۸

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نقطه A و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. در این صفحه چند نقطه وجود دارد به طوری که از A به فاصله معلوم k و از خط d به فاصله معلوم k' باشد؟ ۱۶۴

- (۱) ۴ نقطه  
 (۲) ۲ نقطه  
 (۳) حداکثر ۴ نقطه  
 (۴) حداکثر ۲ نقطه

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $x = 2$  یکی از صفرهای تابع پیوسته  $f(x)$  باشد و بدانیم  $f'(x) = 2x^4 + x^6 + 1$ ، وضعیت نمودار تابع  $y = \frac{1-x}{f(x)}$  در اطراف  $x = 2$  چگونه می‌باشد؟ ۱۶۵



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع  $f(x) = (x+a)|x^2 - 1|$  فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است. a چند مقدار متمایز می‌تواند اختیار کند؟ ۱۶۶

- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

اختلاف ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع  $y = \frac{x}{1+x^2}$  کدام است؟ ۱۶۷

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{2}$   
 (۳) ۱  
 (۴) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

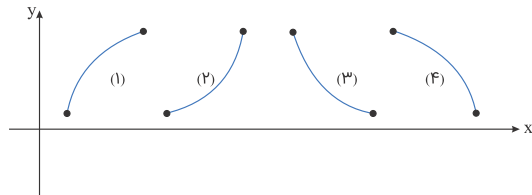
۱۶۸ اگر  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  باشد، حاصل  $\sin^4 \alpha - \sin \alpha \cos^4 \alpha$  کدام است؟

(۲)  $-\frac{3}{4}$   
(۴)  $\frac{3}{8}$

(۱)  $\frac{3}{4}$   
(۳)  $-\frac{3}{8}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۶۹ علی می‌تواند هریک از مسیرهای شکل زیر را برای پیاده‌روی انتخاب کند. او از کدام مسیر حرکت کند تا آهنگ تغییر لحظه‌ای و متوسط حرکت هر دو منفی باشد به طوری که در هر نقطه از مسیر قدر مطلق آهنگ لحظه‌ای بیشتر از آهنگ متوسط باشد؟



- (۱) مسیر ۱  
(۲) مسیر ۲  
(۳) مسیر ۳  
(۴) مسیر ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۷۰ برای رسم نمودار تابع  $y = 2\sqrt{x-1} + 1$  از روی  $y = \sqrt{x}$ ، کدام یک از روندهای زیر باید صورت پذیرد؟

- (۱) انبساط عمودی  $\frac{1}{2}$  واحد و سپس انتقال افقی یک واحد به راست و یک واحد انتقال قائم به بالا  
(۲) انبساط عمودی ۲ واحد و سپس انتقال افقی یک واحد به چپ و یک واحد انتقال قائم به بالا  
(۳) انبساط عمودی ۲ واحد و سپس انتقال افقی یک واحد به راست و یک واحد انتقال قائم به بالا  
(۴) انبساط افقی ۲ واحد و سپس انتقال افقی یک واحد به راست و یک واحد انتقال قائم به بالا

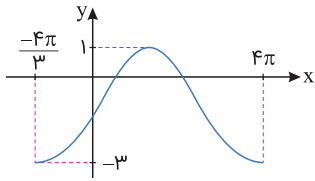
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۷۱ ضابطه وارون تابع  $f(x) = \frac{|x| - 1}{\sqrt{-x + 1}}$  کدام است؟

- (۱)  $-(x-1)^2; x \leq 0$   
(۳)  $-(x-1)^2; x \geq -1$   
(۲)  $-(x+1)^2; x \leq 0$   
(۴)  $-(x+1)^2; x \geq -1$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

۱۷۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $y = b \sin(ax) + c$  در یک دوره تناوب می باشد. مقدار  $abc$  کدام است؟



(۱)  $1/5$

(۲)  $-1/5$

(۳)  $3$

(۴)  $-3$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۷۳ در تابع  $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \sqrt[4]{x^2} \sqrt[3]{x^2}$ ، اگر  $f'(x) = \frac{a}{b\sqrt{x^c}}$  باشد (  $a$  و  $b$  قابل ساده شدن باهم نیستند)، حاصل  $a - b + c$  کدام است؟

(۲)  $1$

(۱) صفر

(۴)  $30$

(۳)  $15$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۷۴ اگر تابع  $f(x) = |x| + |2x - 1| + ax + 3$  بی شمار نقطه بحرانی داشته باشد، مجموع مقادیر ممکن برای  $a$  کدام است؟

(۲)  $1$

(۱) صفر

(۴)  $3$

(۳)  $2$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۷۵ می خواهیم یک قوطی نوشابه استوانه ای شکل به گنجایش  $330$  سانتی متر مکعب از یک لایه نازک فلزی بسازیم. شعاع قاعده این قوطی چقدر باشد تا سطح به کاررفته از فلز در تولید آن کمینه گردد؟

(۲)  $\sqrt[3]{\frac{660}{\pi}}$

(۱)  $\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$

(۴)  $\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$

(۳)  $\sqrt[3]{\frac{145}{\pi}}$

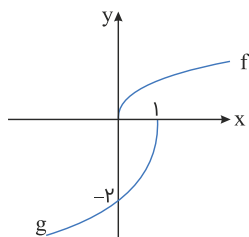
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۷۶ توابع  $f = \{(2, -5), (3, 0), (1, 4), (4, \frac{7}{4})\}$  و  $g(x) = \sqrt{4-x}$  مفروض اند. اگر  $3g(f(a)) + f(f^{-1}(-5)) = 1$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

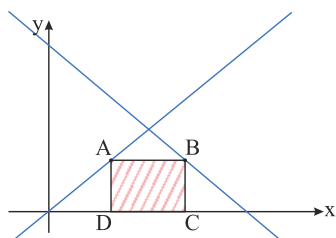
۱۷۷ نمودار تابع  $g$  طی مراحل از روی نمودار  $f(x) = \sqrt{x}$  رسم شده است. ضابطه تابع  $g$  کدام می باشد؟



- (۱)  $-2f(x)$   
(۲)  $-2f(-x+1)$   
(۳)  $-2f(-x)$   
(۴)  $-2f(-x-1)$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۷۸ باتوجه به شکل زیر، دو نقطه A و B روی دو خط به معادلات  $y = 3x$  و  $y = -3x + 2$  قرار دارند. اگر C و D به ترتیب تصاویر این دو نقطه روی محور xها باشند، ماکزیم مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{6}$   
(۲)  $\frac{1}{3}$   
(۳)  $\frac{1}{2}$   
(۴) ۱

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۷۹ اگر  $f(x) = \begin{cases} 4x & ; x < 1 \\ 2x^2 + x & ; x \geq 1 \end{cases}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1) - f(1-2h^2)}{3h^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{3}$   
(۲)  $\frac{1}{3}$   
(۳)  $\frac{5}{3}$   
(۴) وجود ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۸۰ خط  $y = 10x + 20$  در محل برخوردش با محور  $x$  ها، بر منحنی  $f(x)$  مماس است. مشتق تابع  $g(x) = (f(x) - f^3(x))((x^2 - 9)(x^2 - 8) \dots (x^2 - 3))$  در نقطه  $x = -2$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۳  
(۴) -۳

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۸۱ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 9x + 14}$  کدام است؟

- (۱)  $-\infty$   
(۲)  $+\infty$   
(۳) ۲  
(۴)  $\frac{1}{2}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

۱۸۲ کدامیک از گزینه‌های زیر در رابطه با نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = |x| \cdot \left( \left[ \frac{x}{2} \right] + 2 \right)$  در بازه  $(-2, 4)$ ، صحیح می‌باشد؟

- (۱) فقط یک max نسبی وجود دارد.  
(۲) فقط یک min نسبی وجود دارد.  
(۳) فاقد max و min نسبی می‌باشد.  
(۴) یک min نسبی و یک max نسبی وجود دارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

۱۸۳ تابع  $y = -3 \cos ax$  در فاصله  $(0, \frac{4\pi}{3})$ ، ۳ بار ماکزیمم می‌شود. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{21}{2}$   
(۲)  $\frac{21}{4}$   
(۳)  $\frac{45}{8}$   
(۴)  $\frac{45}{4}$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

در تابع  $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$  با دامنه  $[-1, 4]$ ، اگر مقدار ماکزیمم مطلق،  $5$  برابر مقدار مینیمم مطلق باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

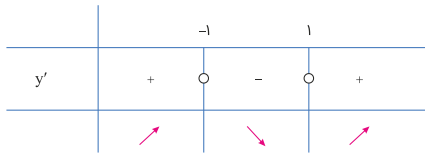
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

WWW.KONKURTNT.COM

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



تابع در  $x = 1$  دارای مینیمم نسبی است، پس:

$$f(1) > 0 \Rightarrow 1 - 3 + m - 2 > 0 \Rightarrow m > 4$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

گزینه ۳

۲

ابتدا دامنه تعریف توابع  $f$  و  $g$  را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \text{ یا } x \neq \pm 1, \quad g(x) = \sqrt{x - x^2} \\ \Rightarrow D_g = [0, 1] \text{ یا } 0 \leq x \leq 1$$

حال باتوجه به تعریف دامنه تابع مرکب، داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid \sqrt{x - x^2} \neq \pm 1\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid x - x^2 \neq 1\} \\ = \{0 \leq x \leq 1 \mid \underbrace{x^2 - x + 1 \neq 0}_{\Delta < 0}\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \\ \Rightarrow D_{f \circ g} = [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq f(x) \leq 1\} = \left\{x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \leq 1\right\}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \xrightarrow{\text{صورت همواره مثبت است.}} 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1 - x^2} \leq 0 \xrightarrow{\text{صورت همواره نامنفی است.}} 1 - x^2 < 0 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \text{ یا } x = 0 \end{cases}$$

اشتراک بازه‌های بالا  $\{0\}$  است، پس  $D_{g \circ f} = \{0\}$  می‌شود و اشتراک آن با  $D_{f \circ g}$  هم همان  $\{0\}$  خواهد بود. داریم:

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = [0, 1] \\ D_{g \circ f} = \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_{f \circ g} \cap D_{g \circ f} = \{0\}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا با داشتن  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، ضابطه تابع  $f(g(x))$  را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+1}$$

حال ضابطه به دست آمده را با ضابطه  $f \circ g$  که در صورت تست داده شده است، برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{g(x)+1} &= \frac{2x-1}{x+3} (*) \Rightarrow x \cdot g(x) + 3g(x) = 2x \cdot g(x) + 2x - g(x) - 1 \\ \Rightarrow (-x+3)g(x) &= 2x-1 \Rightarrow g(x) = \frac{2x-1}{-x+3} \end{aligned}$$

در آخر توابع  $f$  و  $g$  را با هم قطع می‌دهیم. برای این منظور ضابطه آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2x-1}{-x+3} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = -x^2 + 3x \Rightarrow 3x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = P &= \frac{c}{a} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

تذکر: برای محاسبه ضابطه  $g(x)$ ، می‌توانیم در تناسب  $(*)$ ، تفصیل صورت در مخرج انجام دهیم. این کار، محاسبات ما را کمی ساده‌تر می‌کند. داریم:

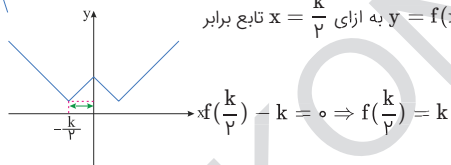
$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تفصیل صورت در مخرج}} \frac{a}{b-a} &= \frac{c}{d-c} \\ \xrightarrow{(*)} \frac{g(x)}{g(x)+1} = \frac{2x-1}{x+3} &\Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)+1-g(x)} = \frac{2x-1}{x+3-(2x-1)} \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{2x-1}{-x+3} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

از آنجایی که همه نمودارها هم‌جهت هستند و قطعاً یکی از آن‌ها متعلق به تابع  $kf(x)$  است، می‌توان نتیجه گرفت  $k$  عددی مثبت است. اگر  $k < 0$  بود باید یکی از نمودارها به شکل زیر درمی‌آمد.

باتوجه به مثبت بودن  $k$ ، نمودار تابع  $y = f(x) - k$  شکل پایینی، نمودار  $y = f(x) + \frac{k}{p}$  شکل وسطی و نمودار  $y = kf(x)$  شکل بالایی است. باتوجه به این شرایط در نمودار وسطی، فاصله طولی رأس تا محور عرض‌ها  $\frac{k}{p}$  است.

اگر این فاصله را  $\frac{k}{p}$  در نظر بگیریم در شکل پایینی نقاط زیر برحسب  $k$  پیدا می‌شوند، بنابراین در تابع  $y = f(x) - k$  به ازای  $x = \frac{k}{p}$  تابع برابر صفر است، یعنی:



نمودار تابع  $y = kf(x)$  و  $y = f(x) + \frac{k}{p}$  در  $x = 0$  متقاطع‌اند، پس:  $k = kf(0) \xrightarrow{\div k} 1 = f(0)$ . در نهایت باتوجه به اینکه در شکل پایینی مقدار تابع در  $x = 0$  برابر  $-1$  است، داریم:

$$xy = f(x) - k \xrightarrow{(0, -1)} -1 = f(0) - k \xrightarrow{f(0)=1} -1 = 1 - k \Rightarrow k = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

از آنجاکه  $D_f = \mathbb{R} - \{a, 2\}$ ، پس نقاط  $x = 2$  و  $x = a$  تنها نقاط مشتق‌ناپذیر تابع  $f$  هستند.

از طرفی می‌دانیم که تابع  $f(x) = \frac{|x+1|}{x+b}$  در نقاط  $x = -1$  به‌عنوان ریشه ساده داخل قدر مطلق (نقطه گوشه) و  $x = -b$  به‌عنوان ریشه مخرج (تعریف‌نشده و ناپیوسته) مشتق‌ناپذیر است.  
پس:

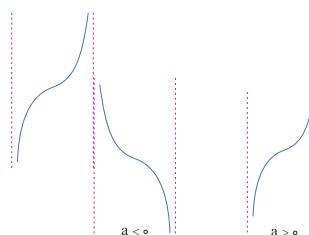
$$\begin{cases} a = -1 \\ -b = 2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

و لذا:  $a + b = -3$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

نمودار تابع  $y = \tan x$  در بازه‌های پیوستگی‌اش به‌صورت زیر است:

نمودار تابع  $y = \tan(ax)$  با توجه به علامت  $a$ ، در بازه‌های پیوستگی‌اش به‌صورت زیر است، داریم:



باتوجه به نمودار رسم شده،  $a$  باید منفی باشد. از طرفی دیگر  $\frac{-\pi}{3}$  تا  $\pi$ ، تابع دارای ۲ دوره تناوب است، پس هر دوره تناوب اصلی این تابع، برابر است با:

$$2T = \pi - \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow 2T = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

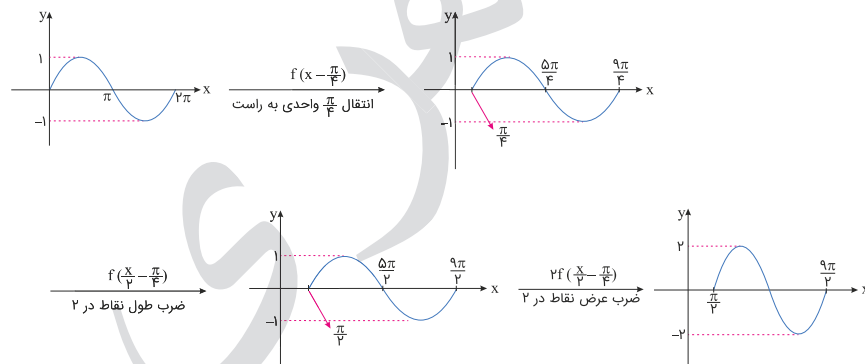
چون  $a < 0$  است، پس مقدار منفی آن را می‌پذیریم. داریم:

$$T = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{3}{2}$$

ضریب کمان  $x$

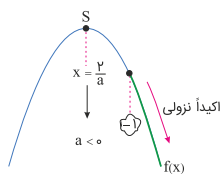
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای رسم نمودار  $g(x)$ ، باید نمودار  $f\left(\frac{2x-\pi}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$  را رسم کنیم. به همین جهت ابتدا نمودار تابع  $f$  را در جهت افقی و به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  به سمت راست انتقال می‌دهیم. سپس طول همه نقاط نمودار حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انبساط افقی می‌شود). شکل حاصل نمودار  $f\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$  را نشان می‌دهد. در ادامه عرض همه نقاط نمودار  $f\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$  را در ۲ ضرب می‌کنیم. نمودار حاصل همان  $g(x)$  است.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

از صورت تست نتیجه می‌گیریم که تابع  $f$  در بازه  $[-1, +\infty)$  اکیداً نزولی است. برای این منظور قبل از هر کاری باید به این موضوع توجه کنیم که قطعاً دهانه سهمی رو به پایین است. در غیر این صورت تابع درجه دوم، نمی‌تواند از عدد  $-1$  به بعد، اکیداً نزولی باشد. از طرفی دیگر می‌دانیم تابع درجه دوم زمانی در یک بازه اکیداً یکتوا است که طول رأس سهمی در درون آن بازه نباشد، پس داریم:



(۱)  $a < 0 \Rightarrow$  دهانه سهمی رو به پایین است

$$(۲) \quad \frac{x^2}{a} \leq -1 \xrightarrow{\text{عکس می‌کنیم}} \frac{a}{x^2} \geq -1 \xrightarrow{-x^2} a \geq -x^2$$

$$(۱) \cap (۲) \rightarrow -2 \leq a < 0$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

راه حل اول:

$$\underbrace{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}_{\frac{1}{2} \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{26}$$

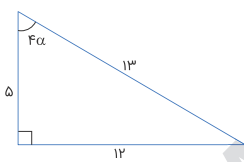
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

حال با داشتن  $\sin 2\alpha$ ، مقدار  $\cos 2\alpha$  را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2 = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$$

به کمک مثلث قائم‌الزاویه، مقدار  $|\tan 2\alpha|$  را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{5}{13}$$



$$\Rightarrow |\tan 2\alpha| = \frac{12}{5}$$

راه حل دوم:

$$1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \xrightarrow{\cos 2\alpha = \frac{5}{13}} 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |\tan 2\alpha| = \frac{12}{5}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

به ازای  $x = -1$ ، صورت کسر عبارت زیر رادیکال برابر  $-2$  است و مخرج کسر عبارت زیر رادیکال برابر  $f(1)$  خواهد بود. چون  $f(1) = 0$  است، پس باید از سمتی به  $x = -1$  نزدیک شویم که حاصل  $f(-x)$ ، مقدار  $0^-$  به خود بگیرد که عبارت زیر رادیکال مثبت شود. اگر از سمت راست به  $-1$  نزدیک شویم، ورودی تابع  $f(-x)$ ، برابر  $1^-$  است که مقدار تابع برابر  $0^-$  خواهد بود. پس تنها همسایگی راست  $x = -1$  عضو دامنهٔ تعریف تابع  $g$  بوده و داریم:

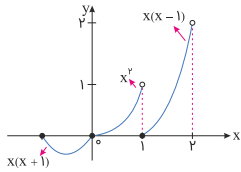
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{\frac{3x+1}{f(-x)}} = \sqrt{\frac{3(-1)+1}{f(-(-1^+))}} \\ &= \sqrt{\frac{-3+1}{f(1^-)}} = \sqrt{\frac{-2}{0^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty \end{aligned}$$

پس نمودار تابع  $g(x)$  در اطراف  $x = -1$  به صورت زیر است. داریم:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

سعی می‌کنیم نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{aligned} f(x) &= x(x - [x]) \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow f(x) = x^2 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow f(x) = x(x-1) \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow f(x) = x(x+1) \end{aligned}$$

مطابق شکل تابع در نقطهٔ  $(0, 0)$  فقط  $\min$  نسبی دارد. چون به ازای  $x < 0$  تابع مقادیر منفی را نیز می‌پذیرد، پس این نقطه نمی‌تواند  $\min$  مطلق هم باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علوی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

طبق تعریف تابع اکیداً صعودی اگر  $x_2 > x_1$ ، آنگاه  $f(x_2) > f(x_1)$ . باتوجه به اینکه  $0 < 1 < 2$ ، پس  $f(0) < f(1) < f(2)$  و چون  $2 < 3 < 4$  پس  $f(2) < f(3) < f(4)$ ؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(0) < f(1) < f(2) \Rightarrow 1 < a < 4 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = 2 \text{ یا } 3 \\ f(2) < f(3) < f(4) \Rightarrow 4 < b < 6 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab = 10 \text{ یا } 15$$

$$ab \text{ مجموع مقادیر } = 10 + 15 = 25$$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حد داده شده را کمی ساده تر می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 + 2x - 4} = \frac{f}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(f(x) - f(2))}{(x-2)(x+4)} = \frac{f}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{-1}{x+4} = \frac{f}{3}$$

$$\Rightarrow f'(2) \times \frac{-1}{4} = \frac{f}{3} \Rightarrow f'(2) = -\lambda$$

حال با داشتن ضابطه  $f$ ، مقدار  $f'(2)$  را حساب می کنیم:

$$f(x) = ax^2 \sqrt[3]{3x^2} - f \Rightarrow f'(x) = 2ax \sqrt[3]{3x^2} - f + ax^2 \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(3x^2 - f)^2}}$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2) = \lambda a + fa = 12a \xrightarrow{f'(2)=-\lambda} 12a = -\lambda \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

معادله را ساده می کنیم:

$$2 \cos x \sin x + 2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = -2 \cos x \sin x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x = \sin(-2x) \xrightarrow{\sin(-2x) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)} \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow \text{نشدنی} \\ 2x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

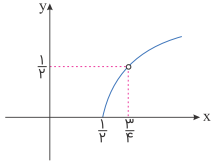
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

روش اول: برای تعیین بُرد تابع  $g \circ f$ ، باید نمودار تابع اصلی  $g$  را در بُرد تابع  $f$  در نظر گرفته و بُرد را مشخص نماییم. پس ابتدا باید بُرد تابع  $f$  را مشخص کنیم. برای این منظور عدد  $\frac{1}{4}$  را اضافه و کم می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x - \left[ x + \frac{1}{4} \right] = x + \frac{1}{4} - \underbrace{\left[ x + \frac{1}{4} \right]}_u - \frac{1}{4} = u - [u] - \frac{1}{4}$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq f(x) < \frac{3}{4} \Rightarrow R_f = \left[ -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

حال نمودار تابع  $g$  را در این بُرد به دست آمده (یعنی بُرد  $f$ ) در نظر می‌گیریم. داریم:



$$g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$$

$$D_g = R_f = \left[ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

پس بُرد تابع  $g \circ f$  به صورت بازه  $\left[ 0, \frac{1}{4} \right)$  است.  
روش دوم: ابتدا ضابطه تابع  $g \circ f$  را می‌سازیم. داریم:

$$g \circ f(x) = \sqrt{x - \left[ x + \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4}} = \sqrt{\underbrace{x + \frac{1}{4} - \left[ x + \frac{1}{4} \right] - \frac{3}{4}}_{0 \leq u - [u] < 1}}$$

$$-\frac{3}{4} \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{باتوجه به دامنه رادیکال}} 0 \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x - \left[ x + \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4}} < \frac{1}{4} \Rightarrow R_{g \circ f} = \left[ 0, \frac{1}{4} \right)$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نکته تستری:

۱) تابع  $f$  در بازه‌ای صعودی است که  $f' \geq 0$  بوده و در بازه‌ای نزولی است که  $f' \leq 0$  باشد.

۲) در توابع کسری اگر مشتق تابعی را بزرگتر از صفر یا کوچکتر از صفر قرار دهیم تا پی ببریم تابع در چه بازه‌ای صعودی یا نزولی است ولی بازه به دست آمده شامل ریشهٔ مخرج (مجانِب قائم) باشد، باید این بازه را در ریشهٔ مخرج تفکیک حدود کنیم.

برای آنکه پی ببریم تابع  $y = \frac{x^2 + 3x}{x-1}$  در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است، کافی است ابتدا مشتق تابع را محاسبه کرده و کوچکتر از صفر قرار دهیم. داریم:

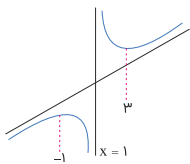
$$y' = \frac{(2x+3)(x-1) - 1(x^2+3x)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} < 0$$

همواره نامنفی

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

چون بازهٔ به دست آمده شامل ریشهٔ مخرج یا همان مجانِب قائم، یعنی  $x=1$  است، پس این بازه را در  $x=1$  تفکیک حدود می‌کنیم. بنابراین تابع  $y = \frac{x^2 + 3x}{x-1}$  در بازهٔ  $(-1, 1)$  و  $(1, 3)$  اکیداً نزولی بوده و داریم:

$$\begin{cases} (a, b) = (-1, 1) \Rightarrow b - a = 2 \\ (a, b) = (1, 3) \Rightarrow b - a = 2 \end{cases}$$

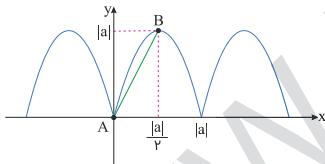


تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

دورهٔ تناوب تابع  $f$  را حساب می‌کنیم:

$$T_f = \frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = |a|$$

نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است:



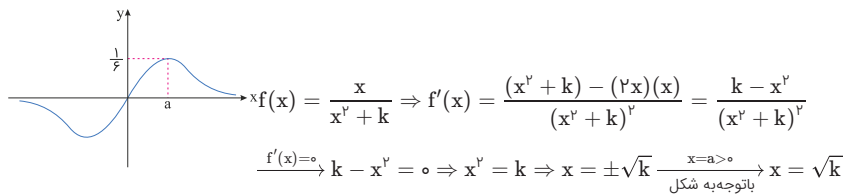
نقاط  $A$  و  $B$ ، دو نقطهٔ اکسترم نسبی متوالی تابع  $f$  هستند. طول  $AB$  را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{\pi} |a| = \sqrt{5} \Rightarrow |a| = \pi \Rightarrow a = \pm\pi$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به نمودار، واضح است که ماکزیمم مطلق این تابع که در نقطه بحرانی  $x = a$  اتفاق افتاده است، برابر با  $\frac{1}{6}$  می‌باشد؛ به عبارتی  $f(a) = \frac{1}{6}$ .

ببینید:

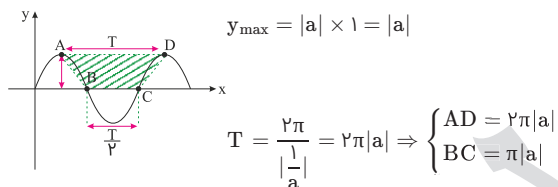


حالا می‌دانیم:

$$f(\sqrt{k}) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{k+k} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{2k} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{k} = 3 \Rightarrow k = 9$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به شکل زیر، واضح است که چهار ضلعی ABCD ذوزنقه‌ای است که قاعده بزرگ آن  $AD = T$ ، قاعده کوچک آن  $BC = \frac{T}{2}$  و طول ارتفاع آن برابر با  $YA$  یعنی به اندازه مقدار ماکزیمم تابع است:



ازطرفی دقت کنید که دوره تناوب این تابع برابر است با:

پس مساحت ذوزنقه فوق برابر است با:

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع قاعده‌ها}}{2} = \frac{(2\pi|a| + \pi|a|) \times |a|}{2} = \frac{3\pi|a|^2}{2} = \frac{3\pi}{2} a^2$$

$$\frac{S=13/\Delta\pi}{\frac{3\pi}{2}} a^2 = 13/\Delta\pi \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

دقت کنید که باتوجه به نمودار سینوسی کشیده شده و ضابطه  $f(x) = a \sin(\frac{x}{a})$ ،  $a$  می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد:

$$f(x) = a \sin\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} \frac{a=3}{\rightarrow} 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \\ \frac{a=-3}{\rightarrow} -3 \sin\left(\frac{x}{-3}\right) = 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \end{cases}$$

پس  $a = \pm 3$  هر دو قابل قبول هستند و کمترین مقدار ممکن برای  $a$ ،  $-3$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم در تابع (هموگرافیک)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر  $a+d=0$  باشد،  $f = f^{-1}$  است. چون در تابع  $f(x) = \frac{-x+1}{x+1}$ ، حاصل  $a+d=0$  می‌باشد، پس  $f = f^{-1}$  است. بنابراین داریم:

$$f(f(x)) \xrightarrow{f=f^{-1}} f(f^{-1}(x)) = x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:  $(x \neq 1)$ 

$$f(x) = \frac{(x-1)}{x-1} (x+1)(x^\lambda+1)(x^\lambda+1) = \frac{(x^\lambda-1)}{x-1} (x^\lambda+1)(x^\lambda+1) = \frac{x^\lambda-1}{x-1} (x^\lambda+1) = \frac{x^\lambda-1}{x-1}$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \frac{\lambda x^\lambda (x-1) - (x^\lambda-1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

تابع  $f$  اکیداً نزولی است و  $f(2k^2 + k + 1) < f(2k^2 - 3k + 1)$  پس:

$$k^2 + k + 1 > 2k^2 - 3k + 1 \Rightarrow k^2 - 4k < 0 \Rightarrow 0 < k < 4 \quad (1)$$

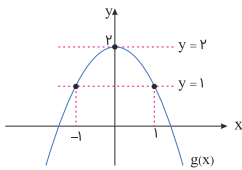
باید حواسمان را جمع کنیم که عبارات داخل پرانتز مقابل  $f$  در دامنه تابع یعنی  $(0, +\infty)$  قرار داشته باشند، بنابراین:

$$\begin{cases} k^2 + k + 1 > 0 \Rightarrow (k + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{R} \quad (2) \\ 2k^2 - 3k + 1 > 0 \Rightarrow (2k-1)(k-1) > 0 \Rightarrow k > 1 \text{ یا } k < \frac{1}{2} \quad (3) \end{cases}$$

از اشتراک‌گیری بازه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان دریافت که:  $0 < k < \frac{1}{2}$  یا  $1 < k < 4$  که در این بازه‌ها، فقط اعداد صحیح ۲ و ۳ وجود دارند؛ بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم  $D_g = \mathbb{R}$  است.  $D_{f \circ g}$  برابر است با  $x$ هایی که حاصل  $g(x)$  به ازای آن‌ها، متعلق به  $D_f$  بوده و عددی طبیعی شود. برای این منظور تابع  $g(x) = 2 - x^2$  برابر با اعداد طبیعی ۱ و ۲ قرار می‌دهیم. داریم:



$$g(x) = 2 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$g(x) = 1 \Rightarrow 2 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \mid \underbrace{x \in D_g}_{x \in \mathbb{R}}, \underbrace{g(x) \in D_f}_{x=0, \pm 1}\} = \{-1, 0, 1\}$$

پس دامنه  $f \circ g$  شامل ۳ عضو است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه به ضابطه  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)$  و مشتق تابع مرکب، داریم:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= (\Delta x^f - \epsilon x + 1)' \Rightarrow \left(f\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)\right)' \\ &= 10x - \epsilon \Rightarrow \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)' \times f'\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right) = 10x - \epsilon \\ &\Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{x}^{\frac{3}{2}}} \times f'\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right) = 10x - \epsilon \end{aligned}$$

چون  $f'(2)$  مطلوب می‌باشد، کافی است به‌جای  $\frac{x + \sqrt{x}}{x}$ ،  $2$  بگذاریم یعنی معادله  $\frac{x + \sqrt{x}}{x} = 2$  را حل کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 2 &\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

حال با قرار دادن  $x = 1$  در رابطه قبل داریم:

$$\frac{-1}{2\sqrt{1}^{\frac{3}{2}}} \times f'(2) = 10(1) - \epsilon \Rightarrow -\frac{1}{2}f'(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = -8$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

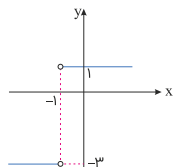
$x = -1$  ریشه ساده عبارت داخل قدر مطلق است، پس  $f$  در این نقطه، مشتق‌ناپذیر است:  $D_f \not\subseteq -1$   
ضابطه  $f$  را به‌صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |2x + 2| - x = \begin{cases} 2x + 2 - x & ; x \geq -1 \\ -2x - 2 - x & ; x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq -1 \\ -3x - 2 & ; x < -1 \end{cases}$$

ضابطه  $f'$  را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x > -1 \\ -3 & ; x < -1 \end{cases}$$

نمودار آن به‌صورت زیر است:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برای آنکه حد یک تابع گویا در بی‌نهایت، یک عدد شود باید درجه صورت از درجه مخرج، کوچک‌تر یا مساوی باشد. درجه مخرج ۲ است، پس درجه صورت هم باید ۲ باشد. ضریب  $x^2$  را در صورت، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2 + a(x-1)^2}{b(x+2)^2 + (x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda x^2 + 12x^2 + 6x + 1 + ax^2 - 2ax^2 + 3ax - a}{bx^2 + 4bx + 4b + x^2 - 6x + 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{(\lambda+a)}^{\text{صفر}} x^2 + (12-2a)x + (6+3a)x + (1-a)}{(b+1)x^2 + (4b-6)x + (4b+9)}$$

$$x^2 \text{ ضریب } = 0 \Rightarrow \lambda + a = 0 \Rightarrow a = -\lambda$$

با جایگذاری  $a = -\lambda$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2 - 18x + 9}{(b+1)x^2 + (4b-6)x + (4b+9)} = \frac{36}{b+1}$$

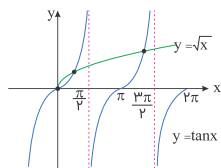
حاصل حد باید با  $\frac{a}{b}$  یعنی  $\frac{-\lambda}{b} = -4$  برابر باشد. داریم:

$$\frac{36}{b+1} = -4 \Rightarrow b+1 = -9 \Rightarrow b = -10$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرایی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\sqrt{x} \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \sqrt{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sqrt{x} = \tan x$$

نمودار توابع  $y = \sqrt{x}$  و  $y = \tan x$  را رسم می‌کنیم. مطابق شکل این دو نمودار در فاصله  $[0, 2\pi]$  در سه نقطه برخورد می‌کنند، در نتیجه معادله داده شده دارای سه جواب است.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرایی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا عبارات را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \times \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} + x} = \sqrt{1+x^2} + x$$

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} - x} = \sqrt{1+x^2} - x$$

حال از عبارت فوق مشتق می‌گیریم. باتوجه به  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  داریم:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$$

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

$$\xrightarrow{x=1} g'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} \times \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2}$$

$$= \frac{-(\sqrt{2}-2)^2}{2} = 2\sqrt{2} - 3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به اینکه  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  و  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  داریم:

$$2 \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x \left( 2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \left( \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} \right) = 0$$

بنابراین حداقل یکی از دو عبارت  $\sin x$  و  $\frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x}$  باید صفر باشند:

$$1) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$2) \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} & \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} & \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

دسته جواب‌های معادله  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  را می‌توان به فرم  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  در نظر گرفت. بنابراین جواب‌های کلی معادله عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x$$

روش دوم: در تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر  $a+d=0$  باشد، داریم:

$$a+d=0 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

از طرفی ترکیب هر تابع با وارونش، برابر تابع همانی است، پس داریم:

$$f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{f^{-1}(x)=f(x)} f(f(x)) = x \text{ یا } f(f^{-1}(x)) = x$$

حال چون در تابع  $f(x) = \frac{-x+1}{x+1}$  مقدار  $a+d=0$  است، پس بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای، برای تعیین ضابطه تابع  $f \circ f(x)$  می‌توانیم ضابطه  $f(f^{-1}(x))$  یا  $f^{-1}(f(x))$  را مشخص نماییم که برابر تابع همانی  $x$  است.

روش سوم:

مقدار ضابطه  $f \circ f(x)$  را به ازای  $x=0$  دلخواهی به دست آورده و سپس این مقدار دلخواه را در تک‌تک گزینه‌ها، جایگذاری کرده و گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای همان  $x=0$  همان مقدار را بدهد. داریم:

$$f(f(x)) \xrightarrow{x=1} f(f(1)) = f(0) = 1$$

تنها گزینه (۱) به ازای  $x=1$  برابر با ۱ می‌شود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$f(0) = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + a = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + a = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm 3$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{b\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \xrightarrow{b=\pm 3} b > 0 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow a+b = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 3 = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

توجه کنید که وقتی نمودار توابع مثلثاتی دارای انتقال افقی هستند، مشخص کردن علامت  $b$  (ضریب  $x$ ) کار ساده‌ای نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا با تفکیک حدود در ریشه‌های داخل قدر مطلق، قدر مطلق‌ها را برداشته و تابع را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = x|x^2 - 4| = \begin{cases} x(x^2 - 4) & ; x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ -x(x^2 - 4) & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & ; x < -2 \text{ یا } x > 2 \\ -3x^2 + 4 & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

ابتدا ضابطه اول را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

چون این دو ریشه به دست آمده در دامنه  $x > 2$  یا  $x < -2$  قرار ندارد، پس در ضابطه اول اکسترم نسبی و نقطه بحرانی وجود ندارد. حال ضابطه دوم را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$-3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (\text{ریشه ساده})$$

ضابطه دوم مشتق، دارای ۲ ریشه ساده بوده که متعلق به دامنه آن می‌باشد. در نتیجه ضابطه دوم دارای ۲ نقطه بحرانی است. در آخر به سراغ نقاط مرزی  $x = 2$  و  $x = -2$  می‌رویم. داریم:

$$f'_-(-2) = 8, f'_+(-2) = -8 \Rightarrow f'(-2) = \text{ندارد}$$

چون در نقطه  $x = -2$ ، مشتق تابع از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس  $x = -2$ ، طول ماکزیمم نسبی تابع  $f$  بوده و چون مشتق چپ و مشتق راست برابر نیستند، پس مشتق در  $x = -2$  وجود نداشته و در نتیجه نقطه بحرانی محسوب می‌شود. حال به سراغ نقطه  $x = 2$  می‌رویم. داریم:

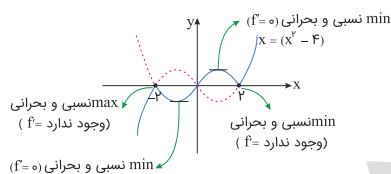
$$f'_-(2) = -8, f'_+(2) = 8 \Rightarrow f'(2) = \text{ندارد}$$

باتوجه به توضیحات قبل، نقطه  $x = 2$  طول نقطه مینیمم نسبی تابع  $f$  بوده و نقطه بحرانی نیز محسوب می‌شود.

پس نمودار تابع  $f$  دارای ۴ اکسترم نسبی و ۴ نقطه بحرانی است.

روش دوم: نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x|x^2 - 4| = \begin{cases} x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) & ; x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ -x(x^2 - 4) = -x(x-2)(x+2) & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$



پس ۴ اکسترم نسبی و ۴ نقطه بحرانی دارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با داشتن ضابطه  $f(u)$ ، باید ضابطه  $f(x)$  را بسازیم. برای این منظور باید ضابطه  $f(u)$  را برحسب  $u$ ، بازنویسی کنیم. داریم:

$$a^u + b^u = (a + b)^u - 3ab(a + b)$$

$$f\left(\frac{x^u + 1}{x}\right) = x^u + \frac{1}{x^u}$$

$$\Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^u - 3x\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\xrightarrow{x + \frac{1}{x} = X} f(X) = X^u - 3X$$

حال با داشتن ضابطه  $f(x) = x^3 - 3x$ ، مقدار  $f(\sqrt{5})$  را مشخص می‌کنیم. داریم:

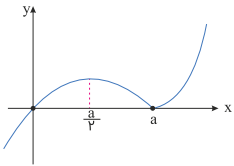
$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5}) = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

پس  $f(\sqrt{5})$ ، دو برابر  $\sqrt{5}$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا به کمک بازبندی، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} x^2 - ax & ; x \geq a \\ -x^2 + ax & ; x < a \end{cases}$$



بنابراین مختصات نقطه  $\min$  و  $\max$  برابر است با:

$$\max : \left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\min : (a, 0)$$

حال فاصله دو نقطه را برابر با  $\sqrt{2}$  قرار می‌دهیم:

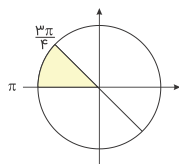
$$\sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{a^2}{4}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\frac{a^2}{4} = t} t + t^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \\ t = -2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = -2 \Rightarrow \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - 1}{\sqrt{1 - \sin 2\alpha} + 1} = \frac{\sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} - 1}{\sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} + 1} = \frac{|\sin \alpha + \cos \alpha| - 1}{|\sin \alpha - \cos \alpha| + 1}$$

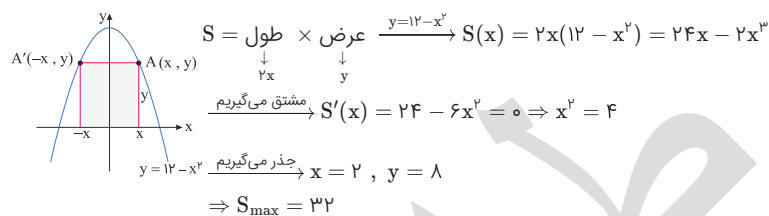
اگر  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$  باشد،  $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$  و  $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$  است. پس داریم:



$$\begin{aligned} \frac{|\sin \alpha + \cos \alpha| - 1}{|\sin \alpha - \cos \alpha| + 1} &= \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1} = \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (\cancel{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - 1)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (\cancel{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}})} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{-2 \cos \frac{\alpha}{2} (\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})} = -\cot \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرایی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در این مسئله تابعی که باید ماکزیمم شود، مساحت مستطیلی است که محدود به سهمی  $y = 12 - x^2$  و محور  $x$ ها می‌باشد. نقطه دلخواه  $A(x, y)$  و  $A'(-x, y)$  را روی سهمی در نظر بگیرید. مساحت مستطیل سایه‌زده در شکل زیر برابر است با:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرایی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته تستی: در توابع شامل رادیکال با فرجه زوج، اولین گام تعیین دامنه تعریف تابع است. دامنه تعریف تابع  $f$ ، برابر  $\mathbb{R}$  است. برای بررسی یکنوایی تابع  $f$ ، باید از ضابطه تابع مشتق گرفته و جدول تغییرات تابع را رسم کنیم. داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\overbrace{2x-2}^{y(x-1)}}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{\sqrt{x^2-2x+3} + x - 1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که مخرج ریشه حقیقی ندارد (چون دلتای عبارت زیر رادیکال، یعنی عبارت  $x^2 - 2x + 3$  منفی است). بنابراین مخرج کسر مشتق همواره مثبت است. حال به بررسی وجود ریشه‌های صورت کسر مشتق می‌پردازیم. داریم:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 1 - x \xrightarrow{1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1} x^2 - 2x + 3 = (1-x)^2$$

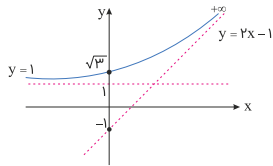
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3 = 1 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

چون صورت کسر مشتق ریشه حقیقی ندارد، پس یا همواره مثبت است و یا همواره منفی. با کمی دقت یا جایگذاری عدد دلخواهی به راحتی پی می‌بریم صورت کسر مشتق نیز همواره مثبت می‌باشد. باتوجه به این توضیحات صورت و مخرج مشتق همواره مثبت بوده و در نتیجه مشتق تابع  $f$ ، همواره مثبت می‌باشد. بنابراین نمودار تابع  $f$ ، همواره اکیداً صعودی خواهد بود. روش دوم: باتوجه به اینکه دامنه تعریف تابع  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است، پس کافی است رفتار تابع را در بی‌نهایت دور بررسی نماییم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}) \xrightarrow{\text{هم‌ارزی برنولی}} \lim_{x \rightarrow \infty} (x + |x - 1|)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty & y = 2x - 1 \\ x \rightarrow -\infty & y = 1 \end{cases}$$

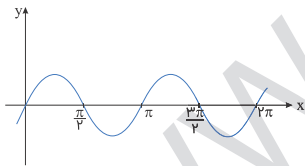
پس نمودار  $f$  به صورت زیر خواهد بود:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$f'(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

نمودار  $f'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$  را رسم می‌کنیم:



جایی که  $f'(x)$  مثبت باشد، تابع  $f(x)$  صعودی است. مطابق شکل روی بازه  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$  مثبت می‌باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا تابع  $f + 1$  را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$f = \{(1, 2), (0, -1), (2, 0)\}$$

$$f + 1 = \{(1, 3), (0, 0), (2, 1)\}$$

حال با داشتن تابع  $f + 1$ ، مقدار تابع  $(fo(f + 1))(0)$  را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور در گام اول مقدار تابع  $f + 1$  را به ازای صفر مشخص کرده و در گام بعدی، مقدار به دست آمده را در تابع  $f$  قرار داده و مقدار تابع را به ازای این مقدار محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$(f + 1)(0) = 0$$

$$\Rightarrow (fo(f + 1))(0) = f(\underbrace{(f + 1)(0)}_0) = f(0) \xrightarrow{(0, -1) \in f} f(0) = -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

باید عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل تبدیل کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}; x \geq 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} - 1|$$

چون  $x \geq 2$  است، پس عبارت داخل قدر مطلق، قطعاً بزرگتر یا مساوی صفر خواهد بود. پس داریم:

$$\xrightarrow{x \geq 2} y = f(x) = |\underbrace{\sqrt{x-1} - 1}_{\substack{\text{همواره بزرگتر} \\ \text{یا مساوی صفر} \\ \text{به توان ۲}}}| \xrightarrow{x \rightarrow y, y \rightarrow x} x = \sqrt{y-1} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-1} = x + 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y - 1 = (x + 1)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2, x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4$$

تذکر: چون بُرد تابع  $f$  به صورت  $y \geq 0$  است، پس در تابع وارون،  $x \geq 0$  خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نکته: توابع شامل جزء صحیح در نقطه‌ای به طول  $x_0$  که به ازای آن عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح شود، معمولاً ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. زمانی تابع در  $x_0$  مشتق‌پذیر می‌شود که  $x_0$  طول  $\min$  (نسبی) عبارت داخل جزء صحیح بوده و یا در  $x_0$  پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجه ۲ (یا بیشتر از ۲) وجود داشته باشد. ابتدا از روی حدود  $x$ ، حدود عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم. داریم:

$$4 < x < 8 \Rightarrow \frac{4}{3} < \frac{x}{3} < \frac{8}{3}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تنها  $x = 6$  مقدار صحیح به خود می‌گیرد. چون در صورت مسئله به این جمله اشاره شده است که تابع در این بازه مشتق‌پذیر است. پس باید در  $x = 6$ ، پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجه ۲ قرار دهیم تا تابع در این بازه مشتق‌پذیر باشد. به عبارت دیگر  $x = 6$  ریشه مضاعف عبارت پشت جزء صحیح باشد. داریم:

$$2 \text{ از درجه } 2 \text{ عامل صفرشونده در } x = 6 \Rightarrow (x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36 = x^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} b = -12 \\ c = 36 \end{cases}$$

در نتیجه حاصل  $b + 2c$  برابر است با:

$$b + 2c = (-12) + 2(36) = 60$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم:  $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ ، بنابراین  $f(x)$  هم بر  $x-1$  و هم بر  $x-2$  بخش‌پذیر است و داریم:

$$f(1) = f(2) = 0$$

حال با جایگذاری  $x=1$  و  $x=2$  در ضابطه  $f$ ، مقادیر  $a$  و  $b$  را محاسبه می‌کنیم:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 - a(1)^3 + \omega(1)^2 - 9(1) + b = 0 \Rightarrow b - a - 3 = 0 \quad (1)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^4 - a(2)^3 + \omega(2)^2 - 9(2) + b = 0 \Rightarrow b - 8a + 4 = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a = 3, b = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

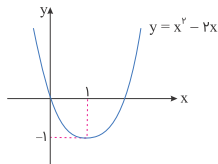
تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

طبق قاعدهٔ پرتوان، در رادیکال صورت بین  $9x^2$ ،  $5x$  و  $9x^2$  و در مخرج بین  $\sqrt{-2x}$  و  $2x$  را انتخاب می‌کنیم؛ پس داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2 + 5x}}{2x + \sqrt{-2x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |3x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-3x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول به سراغ جزء صحیح می‌رویم. نقطهٔ  $x=1$  طول رأس سهمی  $y = x^2 - 2x$  است. باتوجه‌به نمودار سهمی، وقتی  $x \rightarrow 1^+$ ،  $x^2 - 2x \rightarrow -1$ ، بنابراین  $[x^2 - 2x]$  و حد به‌صورت زیر درمی‌آید:



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{3x+1} - 2} = \frac{1^2 + 3(1) - 4}{\sqrt{3(1)+1} - 2} = \frac{0}{0}$$

بنابراین به سراغ رفع ابهام عامل صفروشونده می‌رویم. با ضرب مخرج در مزدوج آن داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{3x+1} - 2} &\times \frac{\sqrt{3x+1} + 2}{\sqrt{3x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x - 4) \times (\sqrt{3x+1} + 2)}{(3x+1) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)(\sqrt{3x+1} + 2)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(\sqrt{3x+1} + 2)}{3} = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

روش دوم: از روش هویپیتال نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$f(t) = \sqrt[t^v]{t^v + k} = (t^v + k)^{\frac{1}{t}}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} (t^v + k)^{-\frac{1}{t}} \times vt = \frac{vt}{t^2 \sqrt[t^v]{(t^v + k)^t}}$$

از آنجاکه  $t$  زمان و لذا همواره مثبت است، پس  $f'(t) > 0$  و آهنگ رشد جمعیت همواره مثبت می‌باشد. اما دقت کنید در یک بازه زمانی طولانی ( $t \rightarrow +\infty$ ) داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{vt}{t^2 \sqrt[t^v]{(t^v + k)^t}} &= \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{vt}{t^2 \sqrt[t^v]{(t^v + k)^t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{vt}{t^2 \sqrt[t^v]{t^{2v}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{vt}{t^2 \sqrt[t^v]{t^{2v}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{vt}{t^2 t^{\frac{2v}{t}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{v}{t^{\frac{2v}{t} - 1}} = \frac{v}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

پس آهنگ رشد جمعیت در درازمدت، عدد مثبت بسیار کوچکی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

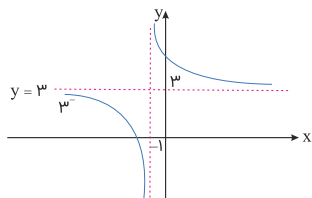
$$\begin{aligned} \frac{\sin^v x - \sin x}{\sin x \sin^v x} &= \frac{v}{\sin^v x} \Rightarrow \sin^v x (\sin^v x - \sin x) = v \sin x \sin^v x \\ \xrightarrow{\sin^v x = v \sin^v x \cos^v x} &v \sin^v x \cos^v x (\sin^v x - \sin x) = v \sin x \sin^v x \\ \xrightarrow{\text{ریشهٔ مخرج}} &\cos^v x (\sin^v x - \sin x) = \sin x \Rightarrow \cos^v x \sin^v x - \cos^v x \sin x = \sin x \\ \Rightarrow \cos^v x \sin^v x &= \sin x (1 + \cos^v x) \xrightarrow{1 + \cos^v x = v \cos^v x} \cos^v x \sin^v x = v \sin x \cos^v x \\ \Rightarrow v \sin x \cos^v x &= \sin x (1 + \cos^v x) \xrightarrow{\sin x, \cos^v x \neq 0} \cos^v x = \cos x \\ \Rightarrow v x = vk\pi \pm x &\Rightarrow x = vk\pi \text{ یا } x = \frac{vk\pi}{v} \end{aligned}$$

باتوجه به فرض، روابط  $\sin^v x = 0$ ،  $\sin^v x \cos^v x = 0$ ،  $\sin^v x \cos^v x = 0$  باید برقرار باشند. پس:  $\frac{vk\pi}{v}$ ،  $\frac{k\pi}{v}$ ،  $\frac{k\pi}{v}$ ،  $x = vk\pi$ ، بنابراین در بازه  $[0, 2\pi]$  فقط دو جواب  $\frac{2\pi}{v}$ ،  $\frac{v\pi}{v}$  قابل قبول است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

راه حل اول:

می‌دانیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{x+1} = 3$  است. ولی چون عبارت  $\frac{3x+4}{x+1}$  داخل جزء صحیح قرار دارد، مهم است بدانیم از مقادیر بیشتر از ۳ به عدد ۳ نزدیک می‌شود یا از مقادیر کمتر از ۳. برای این منظور نمودار تابع  $y = \frac{3x+4}{x+1}$  را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل، در  $-\infty$  تابع از مقادیر کمتر از ۳ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x+4}{x+1} \right] = [3^-] = 2$$

راه حل دوم:

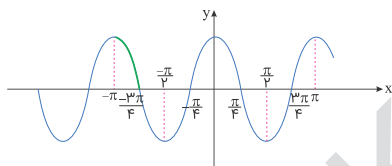
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x+4}{x+1} \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x+3}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 3 + \frac{1}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \left[ \frac{1}{x+1} \right] = 3 + [0^-] = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم:

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

پس نمودار تابع  $y = \cos 2x$  را رسم می‌کنیم. داریم:

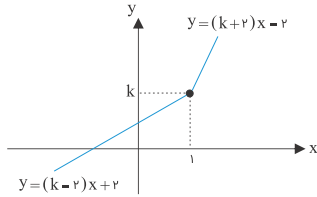


باتوجه به نمودار رسم شده در بالا، تابع در فاصله  $\left[ -\pi, -\frac{3\pi}{4} \right]$  اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار  $a$  برابر با  $-\pi$  می‌باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای حذف قدر مطلق و ساده‌سازی عبارت، دامنه تابع را به دو بازه  $x \geq 1$  و  $x < 1$  افزایش می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 + kx = (k+2)x - 2 & ; x \geq 1 \\ -2x + 2 + kx = (k-2)x + 2 & ; x < 1 \end{cases}$$



هر دو ضابطه، خط هستند و مقدار هر دو ضابطه به ازای  $x = 1$  یکسان است. (توجه داشته باشید که نمودار ضابطه اول به ازای  $x = 1$ ، توپر است و نمودار ضابطه دوم به ازای  $x = 1$  توخالی می‌باشد). برای آنکه این دو خط اکیداً صعودی باشند، باید شیب هر دو آن‌ها مثبت باشد، یعنی:  $k + 2 > 0$  و  $k - 2 > 0$  و در نتیجه  $k > -2$  و  $k > 2$  که از اشتراک این دو بازه  $k > 2$  به دست می‌آید.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sin x(\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = -\sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = -\sin x \cos x \Rightarrow \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x(\cos x + \sin x) = 0$$

بنابراین دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$1) \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

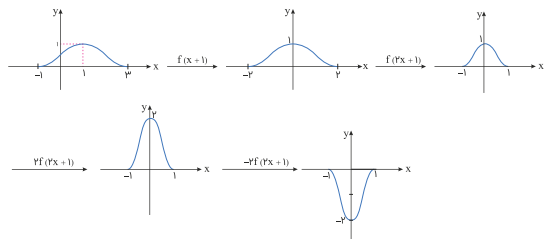
$$2) \cos x = -\sin x \xrightarrow{-\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)} \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow \text{نشدنی} \\ x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله در بازه  $[0, 2\pi]$ ، چهار جواب دارد.

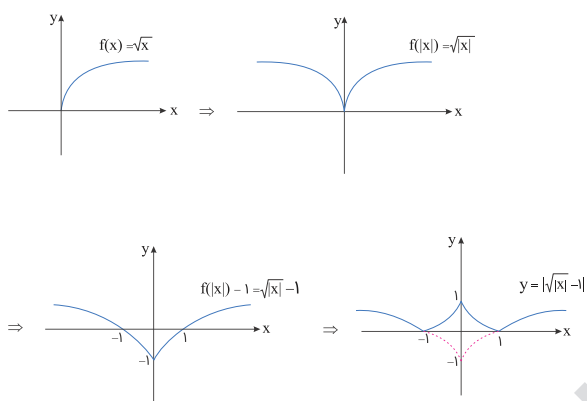
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

در گام نخست تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی می‌دهیم؛ سپس طول نقاط نمودار را در  $\frac{1}{p}$  ضرب می‌کنیم و بعد عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و در نهایت نمودار را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم. داریم:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را رسم می‌کنیم. داریم:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

نقطه  $A$  روی منحنی  $y = \sqrt{x^2 + 2x + \lambda}$  را به صورت  $A(x, \sqrt{x^2 + 2x + \lambda})$  در نظر می‌گیریم. فاصله  $A(x, \sqrt{x^2 + 2x + \lambda})$  تا  $B(-3, 0)$  را می‌نویسیم:

$$AB = \sqrt{(x+3)^2 + (\sqrt{x^2 + 2x + \lambda} - 0)^2} = \sqrt{2x^2 + \lambda x + 17}$$

ریشه مشتق عبارت فوق را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{2x + \lambda}{2\sqrt{2x^2 + \lambda x + 17}} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\min(AB) = \sqrt{\lambda - 16 + 17} = \sqrt{\lambda} = 3$$

$x = -2$  در  $\sqrt{2x^2 + \lambda x + 17}$  قرار می‌دهیم:

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علویون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: توابع به شکل  $y = |f(x)|$  در ریشه‌های فقط ساده (غیرمکرر) داخل قدر مطلق، مشتق‌ناپذیر هستند. اگر به ازای این ریشه ساده، پشت قدر مطلق عامل صفرشونده دیده شود، تابع در این ریشه ساده داخل قدر مطلق، مشتق‌پذیر بوده و مشتق برابر صفر دارد. باتوجه به نکته فوق، ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$3x^3 + x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 + x - 4 = 0 \end{cases}$$

برای حل معادله درجه سوم  $3x^2 + x - 4 = 0$ ، چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یک ریشه قطعاً  $x = 1$  خواهد بود. چون این عبارت به صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس این عبارت اکیداً صعودی بوده و نمی‌تواند بیش از یک جا، محور  $x$  را قطع کند. بنابراین معادله  $3x^2 + x - 4 = 0$  تنها دارای ریشه ساده  $x = 1$  است. باتوجه به توضیحات بالا، عبارت داخل قدر مطلق دارای دو ریشه ساده  $x = 0$  و  $x = 1$  است و دیگر ریشه‌ای ندارد. چون به ازای  $x = 0$  عبارت پشت قدر مطلق صفر می‌شود، نتیجه می‌گیریم که مشتق تابع در  $x = 0$  صفر است. پس تابع تنها در  $x = 1$ ، مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: اگر در تابع  $y = f(x) \times g(x)$  مقدار  $f(x)$  در  $x = a$  صفر شود (عامل صفرشونده)، آنگاه:

$$y'(a) = f'(a) \times g(a)$$

باتوجه به ضابطه  $y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{ax^2+1}}$  و همچنین نکته عامل صفرشونده، داریم:

$$y' = 2(x-2) \times \frac{1}{\sqrt{ax^2+1}}$$

همچنین باتوجه به اینکه هنوز عامل صفرشونده موجود است، بنابراین می‌توان برای مشتق دوم نیز از همین ضابطه دوباره مشتق گرفت:

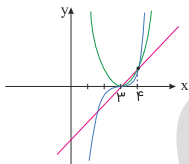
$$y'' = 2 \times \frac{1}{\sqrt{ax^2+1}} \xrightarrow{x=2} 1 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{a(2)^2+1}} \Rightarrow \sqrt{4a+1} = 2$$

$$\Rightarrow 4a+1 = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

توابع  $f(x) = (x+a)^2$ ،  $g(x) = (x+a)^3$  و  $h(x) = (x+a)^3$ ، هرکدام، یک انتقال افقی  $a$  واحدی از توابع  $y = x^2$ ،  $y = x^3$  و  $y = x^3$  هستند که تنها در بازه  $[0, 1]$  مقدار تابع  $y = x$  از مقدار تابع  $y = x^2$  و مقدار تابع  $y = x^3$  بیش‌تر است. پس از انتقال افقی  $a$  واحدی این سه تابع، تغییری در شکل و ظاهر و نحوه قرارگیری آن‌ها رخ نمی‌دهد.

باتوجه به این‌که در بازه  $[3, 4]$  داریم:  $(x+a)^2 \geq (x+a)^3$ ، می‌توان دریافت که هرکدام از توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  یک انتقال سه واحدی به سمت راست از توابع اولیه‌شان هستند، بنابراین:  $a = -3$ .



تألیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{(x^3 - 1)}^{\text{عامل صفر}} \cdot \overbrace{(\sqrt[3]{x} + x)}^{\text{مابقی عوامل}}}{\underbrace{x \sqrt[3]{x} - 1}_{x^{\frac{4}{3}}}} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{3x^2}^{\text{مشتق}} \cdot \overbrace{(\sqrt[3]{x} + x)}^{\text{مابقی عوامل}}}{\underbrace{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}}_{x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

روش دوم: باتوجه به نکته زیر، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^{\frac{4}{3}} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x} + x) \stackrel{\substack{m=3 \\ n=\frac{4}{3}}}{=} \frac{3}{\frac{4}{3}} \times 2 = 3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$x = 2$  نقطه بحرانی  $f$  است، پس مشتق  $f$  در این نقطه، صفر است:

$$f(x) = \frac{x^3 + ax + 5}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 + a)(x + 1) - 1(x^3 + ax + 5)}{(x + 1)^2}$$

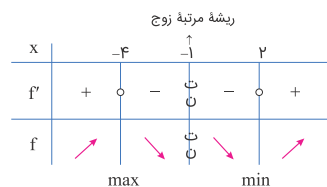
$$\xrightarrow{f'(2)=0} (3 + a)(3) - (8 + 2a + 5) = 0 \Rightarrow 9 + 3a - 13 - 2a = 0 \Rightarrow a = -3$$

با جایگذاری  $a = -3$ ، ضابطه  $f'$  را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x + 1) - (x^3 - 3x + 5)}{(x + 1)^2} = \frac{3x^2 - x - 3 - x^2 + 3x - 5}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 1)^2}$$

$f'$  را تعیین علامت می‌کنیم و اکسترم‌های نسبی آن را مشخص می‌کنیم:

مقدار max نسبی تابع  $f$  به ازای  $x = -4$  رخ می‌دهد:

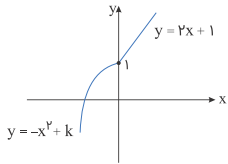
$$\max(f) = f(-4) = \frac{16 + 12 + 5}{-4 + 1} = \frac{33}{-3} = -11$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به فرض سوال، داریم:  $f^{-1}(f^{-1}(3)) = 0$ . اگر  $f^{-1}(3) = a$ ، آنگاه بررسی می‌کنیم که تابع  $f$  به ازای چه مقدار  $a$ ، خروجی ۳ می‌دهد. لذا داریم:

$$f(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + k = 3 \Rightarrow a^2 = k - 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{k-3} \end{cases}$$

اما دقت کنید که چون تابع  $f$  وارون‌پذیر است، باید یک‌به‌یک باشد. لذا باتوجه به نمودار تابع  $f$  می‌توان گفت که  $k \leq 1$ ؛ زیرا اگر  $k > 1$ ، آنگاه تابع  $f$  دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین مقدار  $\sqrt{k-3}$  تعریف‌نشده است و  $a = \pm\sqrt{k-3}$  قابل قبول نیست. (چون زیر رادیکال منفی می‌شود)



پس فقط  $a = 1$  قابل قبول است. در ادامه داریم:

$$f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

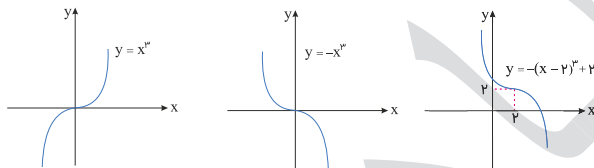
$$\xrightarrow{x=0} f(0) = -(0)^2 + k = 1 \Rightarrow k = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ضابطه تابع را به کمک اتحاد مکعب دو جمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 10 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 + 2 \\ = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 2 = -(x-2)^3 + 2$$

نمودار تابع  $y = x^3$  را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نمودار تابع از ربع سوم نمی‌گذرد.

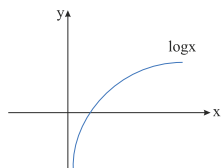
تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

چون حاصل حد فقط برابر  $-\infty$  است، پس مخرج باید در  $x = 1$  ریشه مضاعف داشته باشد. برای این منظور باید مخرج کسر را به صورت  $f(x-1)^2$  در نظر بگیریم. داریم:

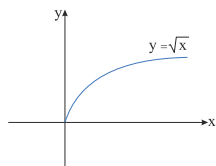
$$\text{مخرج کسر} = ax^2 + bx + 4 = f(x-1)^2 = f(x^2 - 2x + 1) = fx^2 - 2fx + f \\ \Rightarrow \begin{cases} a = f \\ b = -2f \end{cases} \Rightarrow a^2 + b = f^2 + (-2f) = 16 - 8 = 8$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نمودار توابع را رسم می‌کنیم:  
گزینه "۱": تابع اکسترم نسبی ندارد.

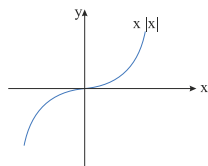


گزینه "۲":  $x = 0$  ابتدای بازه دامنه است و اکسترم نسبی نمی‌باشد.

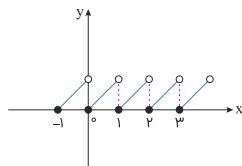


گزینه "۳": تابع اکسترم نسبی ندارد.

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

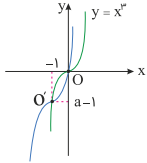


گزینه "۴": تابع در نقاط با طول صحیح min نسبی دارد.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا ضابطه تابع را طوری می‌نویسیم که از آن بیشترین استفاده را ببریم. باتوجه به اینکه:  $x^3 + 3x^2 + 3x + a = (x+1)^3 + a - 1$  نمودار این تابع را از روی تابع  $y = x^3$  رسم می‌کنیم:



مرکز تقارن تابع  $y = x^3$  نقطه  $O(0, 0)$  است که پس از انتقال، به نقطه  $(-1, -\delta)$  تبدیل شده است. طبق قوانین انتقال، نقطه  $O(0, 0)$  ابتدا یک واحد انتقال افقی به سمت چپ داشته و سپس  $(a-1)$  واحد انتقال قائم خواهد داشت. بنابراین مختصات این نقطه پس از انتقال  $(-1, a-1)$  خواهد بود که باتوجه به فرض مسئله داریم:

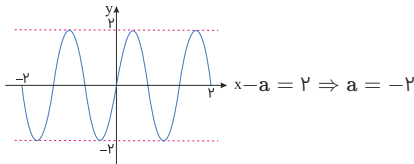
$$O' = (-1, -\delta) \Rightarrow (-1, -\delta) = (-1, a-1) \Rightarrow a-1 = -\delta \Rightarrow a = -4$$

نکته: مرکز تقارن تابع درجه سوم  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، نقطه  $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$  است.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به اینکه  $\cos(\frac{3\pi}{4} - \pi bx) = -\sin \pi bx$ ، ضابطه نمودار را ساده می‌کنیم:

$$y = a \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \pi bx\right) = -a \sin \pi bx$$



با دقت در شکل می‌بینیم که  $y_{\max} = 2$ ، یعنی:

و همچنین در بازه  $[-2, 2]$  نمودار سه بار تکرار داشته است. لذا داریم:

$$3T = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow T = \frac{4}{3}$$

$$\frac{T = \frac{4}{3}}{\frac{2\pi}{\pi b}} \Rightarrow \frac{2\pi}{\pi b} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} & \text{ق.ق.} \\ b = -\frac{3}{2} & \text{غ.ق.} \end{cases}$$

چون  $a = -2$  و نمودار نسبت به محور  $y$ ها قرینه نشده است،  $b = -\frac{3}{2}$  قابل قبول نیست، بنابراین داریم:

$$a = -2, b = \frac{3}{2} \Rightarrow a.b = -3$$

\* می‌توانستیم  $a = 2$  و  $b = -\frac{3}{2}$  را هم در نظر بگیریم اما چون ضرب مدنظر است فرقی ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

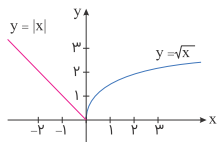
صورت کسر، باز شده  $(x-1)^3$  است. حد داده شده را به سه حد تفکیک می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x}-1} \\ &= 2 \times 3 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} &= \frac{n}{m} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^1 - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^1 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^1 - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} &= 2 \times 3 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا نمودار تابع  $f(x)$  را رسم می‌کنیم. داریم:

تابع در  $x = 0$  نقطه گوشه‌ای است، پس گزینه‌های "۱" و "۳" نمی‌توانند درست باشند. چون مشتق راست تابع  $f$  در  $x = 0$  موجود نیست (مشتق راست برابر  $+\infty$  است)، گزینه "۲" هم نمی‌تواند صحیح باشد.

$$f'_+(0) : (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بنابراین تنها گزینه "۴" صحیح می‌باشد و تابع  $f$  در  $x = 0$  نقطه گوشه‌ای است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{(x+2)^2} = (x+2)^{\frac{2}{3}} \\ f'(x) &= \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

مقدار تابع را در نقاط بحرانی پیدا می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-3) &= 1 \\ f(-2) &= 0 \Rightarrow \min \\ f(0) &= \sqrt[3]{2} \Rightarrow \max \end{aligned} \right\} \Rightarrow \max + \min = \sqrt[3]{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

راه حل اول:

به کمک اتحاد  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \alpha$  داریم:

$$\sin^2 \sqrt{2}x + \cos^2 \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \sqrt{2}x \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sin^2 \sqrt{2}x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \sqrt{2}x = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{2}} \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} \end{cases} \\ \sin^2 \sqrt{2}x = \sin^2 \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{2}} \text{جواب ندارد} \\ \sqrt{2}x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{2}} \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{2\sqrt{2}}$$

راه حل دوم:

$$\sin^2 x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

حال از معادله (\*), داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \sqrt{2}x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \sin^2 \sqrt{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{2}x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\div \sqrt{2}} x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \pm \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ یا $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$ یا $\frac{5\pi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{5\pi}{2\sqrt{2}}$ یا $\frac{7\pi}{2\sqrt{2}}$
غ.ق.ق.	✓	✓	✓

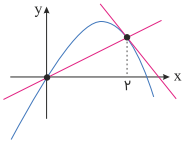
$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{2\sqrt{2}}$$

تألیف محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تست ریاضی و فیزیک دوازدهم

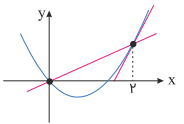
تست علوم تجربی دوازدهم

آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع  $f$  در  $x = 2$  همان شیب خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $x = 2$  است و آهنگ متوسط تغییرات در بازه  $[0, 2]$  همان شیب پاره‌خط واصل بین دو نقطه  $x = 0$  و  $x = 2$  می‌باشد. پس گزینه‌ای درست است که شیب خط مماس بر  $f$  در  $x = 2$  بیشتر از شیب پاره‌خط واصل بین  $x = 0$  و  $x = 2$  باشد. واضح است که در گزینه "۱" این دو مقدار باهم برابرند.  
گزینه "۲":



شیب خط مماس > شیب پاره‌خط واصل

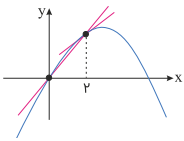
گزینه ۳:



شیب خط مماس < شیب پاره‌خط واصل

پس همین گزینه درست است.

گزینه "۴":



شیب خط مماس > شیب پاره‌خط واصل

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}|x| - x^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} & ; x \geq 0 \\ -x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} & ; x < 0 \end{cases}$$

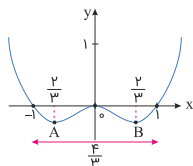
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^{\frac{2}{3}} - 2x = x(3x - 2) & ; x > 0 \\ -3x^{\frac{2}{3}} - 2x = x(-3x - 2) & ; x < 0 \end{cases}$$

برای پیدا کردن اکسترم‌های نسبی تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم. هرکدام از ضابطه‌ها را در فاصله خودش تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$x(3x-2)$	-	0	+
$x(-3x-2)$	-	0	+
$f'$	-	0	+
f	↘	↗	↘
	min	max	min

پس تابع در نقاطی به طول‌های  $x = \frac{2}{3}$  و  $x = -\frac{2}{3}$  مینیمم نسبی دارد.

چون در این نقاط تابع  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}|x| - x^{\frac{2}{3}}$  عرض یکسانی دارد، فاصله این دو نقطه برابر فاصله طول آن‌ها باهم خواهد بود.



$$\text{فاصله مینیمم نسبی‌ها} = AB = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	0
$y'$	-   +
y	↘   ↗
	min

مینیمم تابع در  $x = 0$  رخ می‌دهد و برابر است با:

$$y(0) = -1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

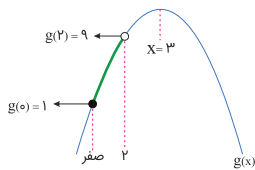
می‌دانیم در تابع  $g \circ f(x)$  برد تابع  $f(x)$  برابر با دامنه تابع  $g(x)$  خواهد بود، پس ابتدا برد تابع  $f(x)$  را مشخص کرده و سپس تابع درجه دوم رسم پذیر  $g(x)$  را در این برد به دست آمده، برش می‌زنیم تا برد تابع  $g$  مشخص شود. این برد همان برد تابع  $g \circ f(x)$  است. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x - 4\left[\frac{x}{4}\right]} = \sqrt{4\left(\frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right)}$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \xrightarrow{\times 4} 0 \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < 4 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 2$$

$$\Rightarrow R_f = [0, 2) \Rightarrow D_g = [0, 2)$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 + 6x + 1, D_g = R_f = [0, 2)$$



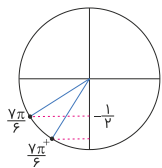
$$\Rightarrow R_{g \circ f(x)} = [1, 9)$$

پس برد تابع  $g \circ f(x)$  برابر با بازه  $[1, 9)$  است که این بازه شامل ۸ عدد صحیح است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0} = \infty$$

برای تعیین علامت  $\infty$  باید تکلیف علامت صفر حدی مخرج را مشخص کنیم (شکل را ببینید):

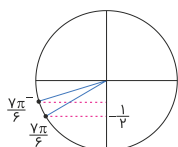


الف)  $x \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^+ \Rightarrow \sin x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-$

پس جواب حد برابر است با:

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^-} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + (-1)^-} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = +\infty$$

ب)  $x \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2})^- \Rightarrow \sin x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+$



پس جواب حد برابر است با:

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^+} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + (-1)^+} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = -\infty$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه به فرمول‌های مثلثاتی، باید عامل صفرشونده را با یک شکل یکسان در صورت و مخرج کسر بسازیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan 2x \cdot \sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \sqrt{2 \sin^2 x}}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{2} \overset{\text{منفی}}{\sin x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

تابع  $f$  در  $x = 0$  پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = b$$

به محاسبه حد فوق می‌پردازیم:

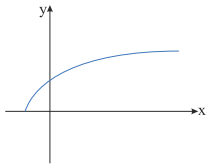
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+a^3} - a}{x} = \frac{0}{0} \text{ هوبیتال} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(x+a^3)^{-\frac{2}{3}}}{1} \\ &= \frac{1}{3}(a^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(a)^{-2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow b = \frac{1}{3a^2} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

محاسبه آهنگ تغییر مشکل است، از طرفی تابع در نقطه  $x = 2$  مشتق‌پذیر است و باتوجه به کوتاه‌بودن طول بازه، آهنگ متوسط خواسته شده بسیار نزدیک به آهنگ لحظه‌ای در نقطه  $x = 2$  است.

$$f(x) = 3\sqrt{4x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3 \times 4}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(2) = 2$$

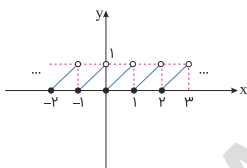
پس پاسخ گزینه "۲" یا "۴" است. از طرفی باتوجه به نمودار تابع، آهنگ تغییر در این تابع نزولی است، پس پاسخ گزینه "۴" می‌باشد.



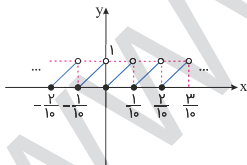
$$f(x) = 3\sqrt{4x+1}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم نمودار تابع  $y = x - [x]$  به صورت زیر است:



پس با یک انقباض افقی، نمودار تابع  $f(x) = 10x - [10x]$  بدین صورت خواهد بود:



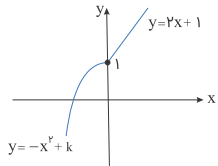
واضح است که نمودار این تابع، در نقاطی به فرم  $x = \frac{k}{10}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) فقط از راست پیوسته و در سایر نقاط از هر دو طرف پیوسته است. پس نمودار این تابع در هیچ نقطه‌ای، صرفاً دارای پیوستگی چپ نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به فرض سوال داریم:  $f^{-1}(f^{-1}(3)) = 0$ . اگر  $f^{-1}(3) = a$ ، آنگاه بررسی می‌کنیم که تابع  $f$  به ازای چه مقدار  $a$ ، خروجی ۳ می‌دهد. لذا داریم:

$$f(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + k = 3 \Rightarrow a^2 = k - 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{k - 3} \end{cases}$$

اما دقت شود که چون تابع  $f$  وارون‌پذیر است؛ باید یک‌به‌یک باشد. لذا باتوجه به نمودار تابع  $f$  می‌توان گفت که  $k \leq 1$ ، زیرا اگر  $k > 1$ ، آنگاه تابع  $f$  دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین مقدار  $\sqrt{k - 3}$  تعریف نشده است و  $a = \pm\sqrt{k - 3}$  قابل قبول نیست. (چون زیر رادیکال منفی می‌شود)



پس فقط  $a = 1$  را داریم. در ادامه داریم:

$$f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$$\xrightarrow{x \leq 0} f(0) = -(0)^2 + k = 1 \Rightarrow k = 1$$

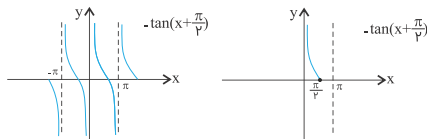
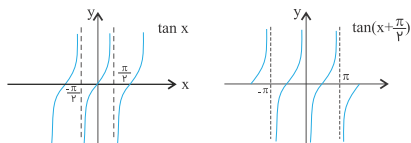
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حدیدی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

طباطبائی

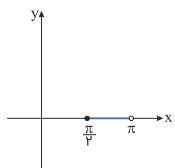
برای رسم تابع  $f$  باید قدر مطلق را برداریم. برای این منظور باید علامت  $\cot x$  را در بازه  $(-\pi, \pi)$  مشخص کنیم. داریم:

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\substack{\text{ربع اول} \\ \cot x > 0}} f(x) = \frac{\cot x + \cot x}{2} = \frac{\cancel{2} \cot x}{\cancel{2}} = \cot x$$

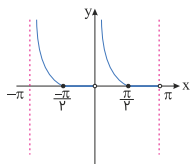
باتوجه به اینکه  $-\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$  است، برای رسم  $\cot x$  باید نمودار تانژانت را  $\frac{\pi}{2}$  سمت چپ ببریم و سپس آن را نسبت به محور  $x$  قرینه کنیم، در آخر در بازه  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$  تابع را رسم می‌کنیم:



$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \xrightarrow{\substack{\text{ربع دوم} \\ \cot x < 0}} f(x) = \frac{\cot x - \cot x}{2} = 0$$



پس نمودار تابع  $f$  به صورت زیر خواهد بود. داریم:



شیب خط  $y = -2x + 3$  باید با مشتق تابع  $y = -x^3 + x + m$  برابر باشد. داریم:

$$y' = -3x^2 + 1 = -2 \Rightarrow -3x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \checkmark \\ x = -1 & \times \end{cases}$$

چون نقطه تماس در ناحیه اول قرار دارد،  $x = 1$  قابل قبول است. به علاوه منحنی و خط در  $x = 1$  باید از یک نقطه عبور کنند.

$$y = -2x + 3 \xrightarrow{x=1} y = 1 \Rightarrow \text{نقطه تماس: } A(1, 1)$$

این نقطه باید در ضابطه  $y = -x^3 + x + m$  هم صدق کند. پس داریم:

$$1 = -1 + 1 + m \Rightarrow m = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

از ماشین  $x^2 \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow (x-1)$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$f(g(x-1)) = x^2 \xrightarrow{g(x)=\frac{x+1}{x}} f\left(\frac{(x-1)+1}{(x-1)}\right) = x^2 \Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right) = x^2$$

حال برای محاسبه  $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، کافی است ورودی تابع  $f$  را برابر  $\frac{3}{2}$  قرار دهیم. داریم:

$$\text{ورودی تابع} = \frac{x}{x-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{f\left(\frac{x}{x-1}\right)=x^2} f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$$

تذکر: می‌توانیم با داشتن ضابطه  $f(u)$ ، ضابطه  $f(x)$  را مشخص کرده و سپس به جای  $x$  در آن  $x = \frac{3}{2}$  را جایگذاری نماییم که این کار، بسیار وقت‌گیر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ضابطه تابع  $f(x)$  (باتوجه به نمودار) برابر است با:

$$f(x) = (x-k)^3 + 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 + 1$$

تابع از مبدأ گذشته است، بنابراین نقطه  $(0, 0)$  در آن صدق می‌کند:

$$0 = (0)^3 - 3k(0)^2 + 3k^2(0) - k^3 + 1 \Rightarrow k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$$

ضابطه تابع پس از جایگذاری عدد  $1$  به جای  $k$  برابر است با:

$$f(x) = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 + 1 \xrightarrow{k=1} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

پس  $a = -3$ ،  $b = 3$  و  $c = 0$ ، بنابراین داریم:

$$a + b + c = -3 + 3 + 0 = 0$$

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

عبارت  $(2x^3 + 5)^3 = 8x^9 + 60x^6 + 30x^3 + 125$ ، یک عبارت درجه ۹ است. برای آنکه درجه کل عبارت ۶ باشد، باید حتماً جمله درجه ۹ عبارت  $(2x^3 + 5)^3$  با یکی از جملات  $kx(4x^2 + 2)^2$  حذف شود. پس  $n$  باید ۲ باشد. بنابراین داریم:

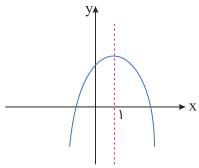
$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^3 + 5)^3 + kx(4x^2 + 2)^2 \\ &= (8x^9 + 60x^6 + 30x^3 + 125) + (16kx^9 + 16kx^6 + 4kx) \\ \Rightarrow f(x) &= (8 + 16k)x^9 + 60x^6 + 16kx^6 + 30x^3 + 4kx + 125 \end{aligned}$$

برای اینکه تابع  $f$  یک چندجمله‌ای از درجه ۶ باشد، باید ضریب جمله  $x^9$  را برابر صفر قرار دهیم تا این جمله حذف شود. داریم:

$$8 + 16k = 0 \Rightarrow k = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2} \Rightarrow n + k = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ضابطه تابع، ضابطه یک سهمی را نشان می‌دهد که باتوجه به بازه‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی تابع، می‌توان دریافت که  $x = 1$  محور تقارن تابع است و اینکه سهمی رو به پایین است، بنابراین ضریب  $x^2$  منفی و  $-\frac{b}{2a} = 1$  است.



$$m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$$

$$-\frac{2(m^2 - 3)}{2(m - 3)} = 1 \Rightarrow -(m^2 - 3) = m - 3$$

$$\Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \xrightarrow{m < 3} \text{ قابل قبول} \\ m = -3 \xrightarrow{m < 3} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر  $m$  برابر است با  $-1 = 2 + (-3)$ .

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

کافی است  $f'\left(\frac{3}{2}\right)$  را حساب کنیم:  
در همسایگی  $\frac{3}{2}$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} [x^2] = \left[\frac{9}{4}\right] = 2 \\ [2x - 4] = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{10x - 3}{3x - 2x + 4} = \frac{10x - 3}{x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{43}{(x + 4)^2} \\ \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{43}{\left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{172}{121} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

وقتی  $1 = g^{-1}(f(3a))$  است، یعنی  $f(3a) = g(1)$ .

$$g(1) = \frac{1}{2} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(3a) = \frac{1}{2}$$

پس کافی است معادله  $f(x) = \frac{1}{2}$  را حل کنیم:

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{1}{2}$$

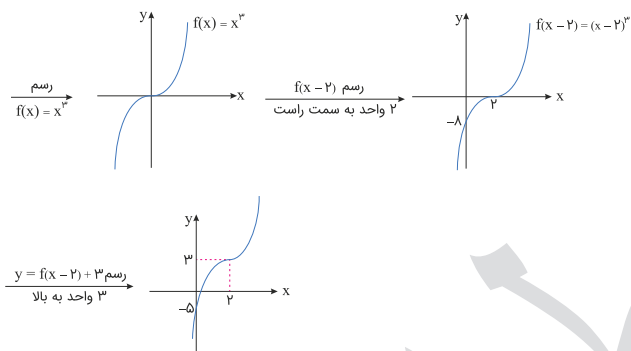
نیازی به حل نیست! قابل حدس است که  $x = 1$  در این تساوی صدق می‌کند. پس ورودی  $f$  برابر با ۱ است، به عبارتی:

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای رسم نمودار تابع  $f$ ، باید ابتدا ضابطه آن را ساده کنیم. داریم:

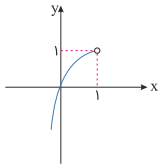
$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = \underline{x^3 - 6x^2 + 12x - 1} + 3 = (x-2)^3 + 3$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، نمودار تابع فوق از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

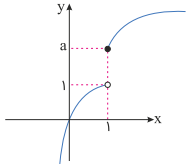
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به اینکه  $1 + (x-1)^2 = x^2 - x^2$ ، نمودار این ضابطه را در  $x < 1$  رسم می‌کنیم.



برای آنکه تابع  $f$  اکیداً صعودی باشد، کافی است عرض نقطهٔ توپُر، از عرض نقطهٔ توخالی بزرگ‌تر یا مساوی باشد (در سایر نقاط هردو ضابطه روند صعودی خود را طی می‌کند و نیازی به بررسی نیست) یعنی:  $a \geq 1$ .

بنابراین یکی از حالت‌های نمودار می‌تواند به صورت زیر باشد:



تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{OA \times OB}{2} \Rightarrow 10 = \frac{f \times OB}{2} \Rightarrow OB = 4 \Rightarrow B(4, 0)$$

شیب پاره‌خط  $AB$  (که در واقع همان خط مماس بر منحنی  $f$  در  $x = 3$  است) را به کمک دو نقطهٔ  $A(0, f)$  و  $B(4, 0)$  حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - f}{4 - 0} = -\frac{f}{4} \Rightarrow f'(3) = -\frac{f}{4}$$

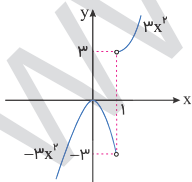
ضمناً باتوجه به شکل، می‌دانیم که:  $f(3) = 3$ .

حالا با داشتن  $f(3)$  و  $f'(3)$  به محاسبهٔ حد  $\frac{0}{0}$  داده‌شده به کمک قاعدهٔ هسپیتال می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)f'(x)}{1} = 2f(3)f'(3) = 2(3)\left(-\frac{f}{4}\right) = \frac{-2f}{4} = -\frac{2f}{4} = -\frac{f}{2} = -\frac{3}{2}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$y = |x^3 - 1| = \begin{cases} x^3 - 1 & ; x \geq 1 \\ -x^3 + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 & ; x > 1 \\ -3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: در توابع  $y = |f(x)|$  ریشه‌های ساده  $f(x)$ ، نقاط مشتق‌ناپذیر هستند. بنابراین بایستی  $f(x) = \mathcal{F}x^2 - mx + 1$  یا فاقد ریشه باشد و یا دارای ریشه مضاعف، پس داریم:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (-m)^2 - \mathcal{F}(\mathcal{F})(1) \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 1\mathcal{F} \Rightarrow -\mathcal{F} \leq m \leq \mathcal{F} \quad (\text{I})$$

از طرفی باتوجه به اینکه  $\Delta \leq 0$  است، بنابراین عبارت  $\mathcal{F}x^2 - mx + 1$  همواره بزرگ‌تر مساوی صفر می‌باشد. پس:

$$y = |\mathcal{F}x^2 - mx + 1| = \mathcal{F}x^2 - mx + 1$$

حال می‌دانیم تابع درجه دوم با ضریب مثبت  $x^2$  بعد از رأس اکیداً صعودی خواهد بود، بنابراین:

$$x_S = \frac{-(-m)}{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{\mathcal{F}} \Rightarrow m \leq \mathcal{F} \quad (\text{II})$$

بنابراین اشتراک دو بازه  $-\mathcal{F} \leq m \leq \mathcal{F}$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\lim_{t \rightarrow \mathcal{Y}} \frac{f(t) - f\left(\frac{\mathcal{W}t + \mathcal{Y}}{\mathcal{F}}\right)}{\frac{t - \mathcal{Y}}{\mathcal{F}}} \stackrel{0}{=} \lim_{t \rightarrow \mathcal{Y}} \frac{f'(t) - \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{F}} f'\left(\frac{\mathcal{W}t + \mathcal{Y}}{\mathcal{F}}\right)}{\frac{1}{\mathcal{F}}} \stackrel{0}{=} \lim_{t \rightarrow \mathcal{Y}} \frac{\frac{1}{\mathcal{F}} f'(t)}{\frac{1}{\mathcal{F}}} = f'(\mathcal{Y})$$

$$f(x) = x\sqrt{\mathcal{Y}x + \mathcal{Y}} \Rightarrow f'(x) = (1)\sqrt{\mathcal{Y}x + \mathcal{Y}} + \frac{x}{\sqrt{\mathcal{Y}x + \mathcal{Y}}} \Rightarrow f'(\mathcal{Y}) = \mathcal{F} + \frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{Y}\mathcal{F}}{\mathcal{F}}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول دامنه تعریف تابع را پیدا می‌کنیم. داریم:

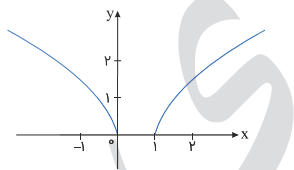
$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

تابع در  $x = 0$  و  $x = 1$  نقطه بحرانی دارد، چراکه نقاط ابتدا و انتهای بازه، جزء نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شوند. حالا مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم تا بررسی کنیم که آیا تابع نقطه بحرانی دیگری دارد یا نه. داریم:

$$f'(x) = \frac{\mathcal{Y}x - 1}{\mathcal{Y}\sqrt{x^2 - x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\mathcal{Y}}$$

$x = \frac{1}{\mathcal{Y}}$  در دامنه تابع نیست، پس نمی‌تواند نقطه بحرانی باشد. برای فهم بیشتر نمودار تابع  $f$  را برایتان رسم کرده‌ایم.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برای به دست آوردن نقاط اکسترم‌های مطلق (نقاط بیشترین و کمترین مقدار تابع) بایستی طول تمام نقاط بحرانی را به دست آورده و سپس عرض آن‌ها را محاسبه کنیم. پس از آن بیشترین مقدار به عنوان  $\max$  مطلق و کمترین مقدار به عنوان  $\min$  مطلق خواهد بود. (دقت کنید ابتدا و انتهای بازه بسته نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.)

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Rightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [m, 3m] \times \\ x = 2m \in [m, 3m] \end{cases}$$

پس طول نقاط بحرانی تابع به صورت  $x = m, 2m, 3m$  می‌باشند. حال با محاسبه عرض آن‌ها، داریم:

$$f(m) = m^3 - 3m^3 + 1 = -2m^3 + 1$$

$$f(2m) = 8m^3 - 12m^3 + 1 = -4m^3 + 1 \xrightarrow{\text{مطلق min}} (2m, -4m^3 + 1)$$

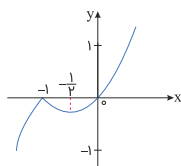
$$f(3m) = 27m^3 - 27m^3 + 1 = 1 \xrightarrow{\text{مطلق max}} (3m, 1)$$

$$\text{شیب خط واصل} = \frac{(1) - (-4m^3 + 1)}{3m - 2m} = \frac{4m^3}{m} = 4m^2$$

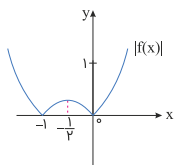
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علویون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول نمودار  $f(x)$  را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x|x+1| = \begin{cases} x(x+1) & ; x \geq -1 \\ -x(x+1) & ; x < -1 \end{cases}$$



حالا نمودار  $|f(x)|$  را رسم می‌کنیم.

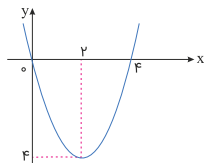


مطابق شکل تابع در فاصله‌های  $[-1, -\frac{1}{2}]$  و  $[\frac{1}{2}, \infty)$  اکیداً نزولی است.

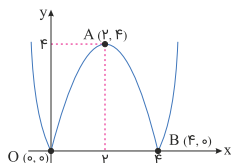
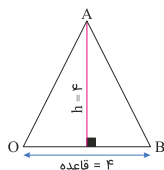
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ضابطه  $f$  را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 4x)^2} = |x^2 - 4x| = |x(x - 4)|$$

تابع  $y = x(x - 4)$  یک سهمی با دهانه رو به بالا و ریشه‌های ۰ و ۴ است.

حالا قدر مطلق به تابع اثر می‌کند و قسمت‌های پایین محور Xها، نسبت به آن قرینه می‌شوند:

باتوجه به شکل، تابع  $f$  در نقاط  $O$  و  $B$ ، مشتق ندارد و در نقطه  $A$ ، مشتقش صفر است، پس هر ۳ نقطه، بحرانی هستند. مساحت مثلث  $OAB$  را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

با جایگذاری  $1 - \sin^2 x$  به جای  $\cos^2 x$  به یک معادله قابل تبدیل به درجه ۲ می‌رسیم:

$$4 \sin^2 x = 4(1 - \sin^2 x) - 1 \Rightarrow 4 \sin^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = t} 4t^2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{4}, t_2 = \frac{1}{4}$$

معادله  $\sin^2 x = -\frac{3}{4}$  جواب ندارد. معادله  $\sin^2 x = \frac{1}{4}$  نیز به دو معادله  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$  منجر می‌شود که در فاصله  $(0, \pi)$  دارای جواب‌های  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{3\pi}{4}$  هستند. پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر با  $\pi$  است.

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا معادله خط مماس رسم شده را می‌نویسیم:  $y = mx$ .

$$m = f'(3) = 2x = 6 \Rightarrow y = 6x$$

با جایگذاری  $x = 3$  در معادله این خط به نقطه  $(3, 18)$  می‌رسیم که باید در ضابطه تابع  $f(x) = x^2 + k$  هم صدق کند:

$$18 = 9 + k \Rightarrow k = 9$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

شیب خط قاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{شیب خط قاطع} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

شیب خط مماس باید  $\frac{1}{3}$  باشد.

$$\text{شیب خط مماس} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x+1 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرایی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

اولاً باید  $b = 1$  باشد تا جملات پرتوان هریک از رادیکال‌های موجود در مخرج با هم ساده شوند، در غیر این صورت مخرج بی‌نهایت شده و جواب حد صفر می‌شود، درحالی‌که قرار است  $\frac{1}{2}$  شود. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{ax}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

با ضرب صورت و مخرج این کسر در مزدوج مخرج داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{ax}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt{x + \sqrt{ax}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{ax}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{ax}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}}{(x + \sqrt{ax}) - (x - \sqrt{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{ax}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}}{\sqrt{ax} + \sqrt{x}} \stackrel{\text{پرتوان}}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{ax} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{a} + 1)\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{a} + 1}$$

پس:

$$\frac{2}{\sqrt{a} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{a} + 1 = 4 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow a + b = 9 + 1 = 10$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرایی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

از آنجاکه حاصل حد برابر با بی‌نهایت است، اولاً باید مخرج کسر به صورت حدی صفر شده باشد، به عبارتی  $x$  باید به سمت ریشهٔ مخرج برود، پس  $b$  ریشهٔ مخرج است. ثانیاً چون حد تابع در حوالی ریشهٔ مخرج نباید تغییر علامت بدهد (دقت کنید که با رفتن  $x$  به سمت  $b$  از هر دو طرف، قرار است جواب  $+\infty$  شود، یعنی مخرج باید  $0^-$  شده باشد). پس مخرج باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد و  $b$  هم ریشهٔ مضاعف مخرج می‌شود. داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2)^2 - 4(a)(a) = 0 \Rightarrow 4 - 4a^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

حال دو حالت پیش می‌آید:

۱)  $a = 1 \Rightarrow$  مخرج:  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$   
 $\Rightarrow b =$  ریشهٔ مضاعف مخرج  $= -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x + 1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

۲)  $a = -1 \Rightarrow$  مخرج:  $-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2$   
 $\Rightarrow b =$  ریشهٔ مضاعف مخرج  $= 1$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-(x - 1)^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \Rightarrow \text{قابل قبول}$$

پس داریم:

پس فقط حالت  $a = -1$  و  $b = 1$  قابل قبول است و  $a - b = -2$ .

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6 - \sqrt{x + 5}} - 2}{9 - x^2} \times \frac{\sqrt{6 - \sqrt{x + 5}} + 2}{\sqrt{6 - \sqrt{x + 5}} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - \sqrt{x + 5} - 4}{4(9 - x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x + 5}}{4(9 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x + 5}}{4(9 - x^2)} \times \frac{4 + 2\sqrt{x + 5} + \sqrt{(x + 5)^2}}{4 + 2\sqrt{x + 5} + \sqrt{(x + 5)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - (x + 5)}{4 \times 4(9 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{4 \times 4(3 - x)(3 + x)} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{288}$$

روش دوم:

$$\text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{6 - \sqrt{x + 5}}}}{2 - x} = \frac{-\frac{1}{12}}{-6} = \frac{-\frac{1}{48}}{-6} = \frac{1}{288}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

خط  $y + 2x = 3$  در  $x = 2$  بر تابع  $f$  مماس است، پس:  
 اولاً: در این نقطه، مقدار یکسانی دارند:

$$y + 4 = 3 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow f(2) = -1$$

$$f'(2) = -2$$

ثانیاً: شیب این خط، برابر با مشتق تابع  $f$  در  $x = 2$  است:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 4}{x^2 - 1} = 3 \text{ از حد } 3 \text{ دو نتیجه می‌گیریم:}$$

اولاً: حد مخرج صفر و حاصل حد کل کسر موجود است، پس حد صورت هم صفر می‌باشد:

$$g(-1) + 4 = 0 \Rightarrow g(-1) = -4$$

ثانیاً: حد ساده می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{\underbrace{(x-1)(x+1)}_{-2}} = 3 \xrightarrow{\frac{g(x)-g(-1)}{(x+1)} = g'(-1)} \frac{g'(-1)}{-2} = 3 \Rightarrow g'(-1) = -6$$

حال با اطلاعات فوق، داریم:

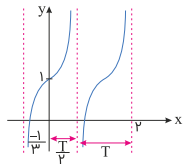
$$(g \circ f)'(2) = f'(2) \cdot g'(f(2)) = f'(2) \cdot g'(-1) = 12$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول از همه مقدار تابع در صفر برابر ۱ است، پس داریم:

$$y(0) = 1 \Rightarrow a \tan(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = a \tan(b\pi x) + 1$$

باتوجه به شکل تابع، داریم:



$$\frac{T}{2} + T = 2 \Rightarrow \frac{2T}{3} = 2 \Rightarrow T = 3$$

دوره تناوب تابع برابر  $\frac{4}{3}$  است، پس داریم:

$$\frac{4}{3} = \frac{\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4} \text{ یا } b = -\frac{3}{4}$$

مقدار تابع در  $\frac{-1}{3}$  برابر صفر است، پس داریم:

$$y = a \tan\left(\frac{3\pi}{4}x\right) + 1 \xrightarrow{\left(\frac{-1}{3}, 0\right)} 0 = a \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) + 1 \Rightarrow -a + 1 \Rightarrow a = 1$$

حال با معلوم بودن مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، حاصل  $a + b + c$  برابر است با:

$$a + b + c = 1 + \frac{3}{4} + a = 2\frac{1}{4}$$

تذکر: به ازای  $b = -\frac{3}{4}$ ، حاصل  $a + b + c$  برابر  $-\frac{1}{4}$  است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح‌نیا - علی شهبانی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

نقطه‌ای به طول  $x = 1$  علاوه بر اینکه روی نمودار  $f(x)$  قرار دارد، روی خط  $y = 3x + 1$  نیز قرار می‌گیرد. بنابراین با صدق دادن  $x = 1$  در معادله خط، می‌توانیم مختصات نقطه تماس را به دست آوریم:

$$x = 1 \xrightarrow{y=3x+1} y = 3(1) + 1 = 4 \Rightarrow (1, 4) \text{ نقطه تماس}$$

حال مختصات نقطه تماس را در معادله  $f(x)$  قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x^m + ax^r + bx + 2 \xrightarrow{x=1, f(x)=4} 4 = (1)^m + a(1)^r + b(1) + 2$$

$$\Rightarrow 4 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = 1$$

از طرفی می‌دانیم شیب خط مماس بر نقطه تماس، معادل مشتق تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = 1$  است. بنابراین داریم:

$$(f'(1) = 3 \text{ شیب خط } y = 3x + 1 \text{ برابر با } m = 3 \text{ است یعنی } f'(1) = 3)$$

$$f'(x) = 3x^r + 2ax + b$$

$$\xrightarrow{f'(1)=3} 3 = 3(1)^r + 2a(1) + b \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$\xrightarrow{a+b=1} a + (-2a) = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a - b = -1 - 2 = -3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

صادق طاهری

از آنجایی که تابع (هموگرافیک)  $f(x) = \frac{2x+b}{3x+d}$  در بازه‌های  $(-2, +\infty)$  و  $(-\infty, -2)$  اکیداً یکتوا است، نتیجه می‌گیریم، عدد  $x = -2$  ریشه مخرج است، پس داریم:

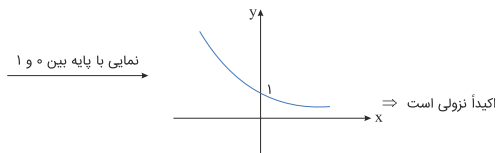
$$3x + d = 0 \xrightarrow{x=-2} 3(-2) + d = 0 \Rightarrow d = 6$$

با تعیین  $d = 6$ ، ضابطه  $f$  به شکل  $f(x) = \frac{2x+b}{3x+6}$  درمی‌آید. حال چون این تابع، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند، پس نقطه  $(1, 0)$  در تابع صدق می‌کند. داریم:

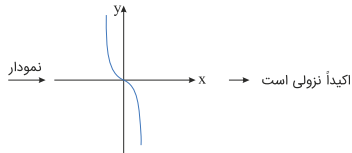
$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{2+b}{9} = 0 \Rightarrow 2+b = 0 \Rightarrow b = -2$$

با جایگذاری  $d = 6$  و  $b = -2$ ، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم:

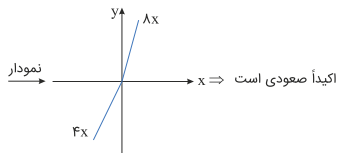
$$(1) y = 6^{-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$$



$$(2) y = -2x^3$$



$$(3) y = 6x + 2|x| = \begin{cases} 8x & ; x \geq 0 \\ 4x & ; x < 0 \end{cases}$$

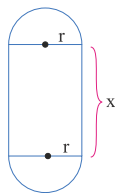


$$(4) y = \sin 6x \Rightarrow \text{غیر یکتوا} \Rightarrow \text{نوسانی (متناوب)}$$

پس جواب گزینه ۳ است.

تألیف محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا یک شکل برای مسئله رسم می‌کنیم:



مطابق شکل داریم:

$$\begin{aligned} \text{محیط دو نیم‌دایره} + 2x &= \text{محیط پنجره} \\ = 2x + 2\left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) &= 2x + 2\pi r \xrightarrow{\text{محیط}=200} 2x + 2\pi r = 200 \\ \Rightarrow x + \pi r &= 100 \quad (*) \end{aligned}$$

می‌خواهیم این پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، به عبارتی مساحت آن ماکزیمم شود:

$$\begin{aligned} \text{مساحت دو نیم‌دایره} + \text{مساحت مستطیل} &= \text{مساحت پنجره} \\ = x \times 2r + 2\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \\ \Rightarrow S = 2rx + \pi r^2 \xrightarrow{x=100-\pi r} 2r(100-\pi r) + \pi r^2 &= 200r - 2\pi r^2 + \pi r^2 = 200r - \pi r^2 \end{aligned}$$

حال نقطه بحرانی تابع مساحت را به دست می‌آوریم:

$$S' = 200 - 2\pi r = 0 \Rightarrow 200 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{100}{\pi} = 100 \times \frac{1}{\pi}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

با استفاده از رابطه  $u' \times \left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}$ ، مشتق تابع  $f$  را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{a\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای  $f$  در  $x = 16$  برابر با  $f'(16)$  است که باید  $\frac{1}{40}$  شود:

$$f'(16) = \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{a+2}{20} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40} \Rightarrow a+2 = 5 \Rightarrow a = 3$$

با جایگذاری  $a = 3$ ، ضابطه  $f$  به صورت  $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$  درمی‌آید. آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[1, 4]$  را حساب می‌کنیم:

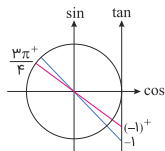
$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{18}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علویون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $x \rightarrow \frac{5}{3}$ ، آنگاه مخرج برابر  $2 = 1 + 1 = 1 + \tan \frac{5\pi}{3}$  است و حاصل حد نمی‌تواند نامتناهی باشد. پس گزینه‌های "۳" و "۴" قطعاً نادرست هستند.  
ولی اگر  $x \rightarrow \frac{3}{3}$ ، آنگاه مخرج  $0 = -1 + 1 = -1 + \tan(\frac{3\pi}{3})$  است و حاصل حد نامتناهی است. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{3}^+} \frac{\sin \pi x}{\tan \frac{\pi x}{3} + 1} = \frac{\sin \frac{3\pi}{3}}{\tan(\frac{3\pi}{3}) + 1} = \frac{-1}{(-1) + 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

توجه کنید چون تابع تانژانت در ناحیه دوم دایره مثلثاتی صعودی است، پس مقدار آن در  $\frac{3\pi}{3}$  نسبت به  $\frac{3\pi}{3}$  افزایش یافته و برابر  $(-1)^+$  می‌باشد. برای درک بهتر می‌توانیم از دایره مثلثاتی نیز کمک بگیریم. داریم:



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع  $f(x)$  در  $x = 1, -1$  مشتق‌ناپذیر است، چرا که این نقاط ریشه‌های درجه یک عبارت داخل قدر مطلق هستند.  $x = 0$  نیز ریشه درجه یک عبارت داخل قدر مطلق است ولی خارج از قدر مطلق عامل صفرکننده  $\sqrt{x}$  باعث صفرشدن مشتق در این نقطه می‌شود و تابع در  $x = 0$  نقطه بحرانی دارد ولی مشتق‌پذیر است.  
دقت کنید که این تابع نقاط بحرانی دیگری نیز دارد ولی تنها نقاط مشتق‌ناپذیری آن  $x = \pm 1$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حدیدی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای آنکه پی ببریم تابع  $f$  در چه بازه‌ای صعودی است، باید مشتق تابع را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم. داریم:

$$f'(x) = (3x^2 - 4) \sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x^3}} (x^3 - 4) = \frac{(3x^2 - 4)(3x) + x^3 - 4}{3\sqrt{x^3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{10x^3 - 16x}{3\sqrt{x^3}} > 0 \Rightarrow 10x^3 - 16x > 0 \Rightarrow 10x(x^2 - 16) > 0$$

همواره نامنفی

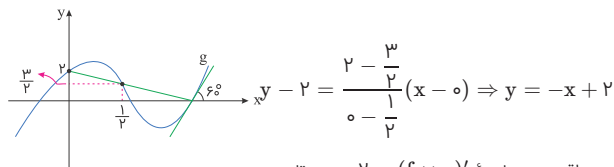
حال برای حل نامعادله فوق، جدول تعیین علامت آن را رسم می‌کنیم. داریم:

$x$		ساده -۴	ساده ۰	ساده ۴	
$f'$	-	۰	+	۰	-
$f$		↘	↗	↘	↗

پس تابع  $f$  در بازه‌های  $(-4, 0)$  یا  $(4, +\infty)$  اکیداً صعودی است.  
در بین گزینه‌ها فقط بازه  $(-3, -1)$  زیرمجموعه بازه‌هایی است که تابع  $f$  در آن اکیداً صعودی می‌باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حد موردنظر همان تعریف مشتق تابع  $f \times g$  در نقطه  $x = 2$  است.  
ابتدا سعی می‌کنیم نقطه‌ای به طول ۲ را در نمودار تابع  $g$  شناسایی کنیم.  
خط واصل بین نقاط  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2})$  و  $(0, 2)$  را روی نمودار ببینید. معادله این خط را می‌نویسیم:



واضح است که محل تلاقی این خط با محور  $x$ ها نقطه  $(2, 0)$  است. پس  $x = 2$  ریشه تابع  $g$  بوده و درواقع در محاسبه  $(f \times g)'$  در  $x = 2$ ، تابع  $g$  عامل صفرشونده محسوب می‌شود و طبق نکته عامل صفرشونده، برای محاسبه  $(f \times g)'(2)$  کافی است  $f(2) \times g'(2)$  را حساب کنیم.

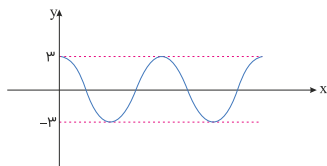
$g'(2)$  از روی نمودار  $g$  یعنی شیب خط مماس بر منحنی  $g$  در  $x = 2$  که باتوجه به شکل برابر است با:  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

اما در مورد مقدار تابع  $f$  در  $x = 2$  مواظب باشید! تابع  $f$  در  $x = 2$  ناپیوسته و لذا مشتق‌ناپذیر است و نکته عامل صفرشونده به صورت  $(\lim_{x \rightarrow 2} f(x)) \times g'(2)$  درمی‌آید، پس ملاک حد تابع  $f$  در  $x = 2$  است که برابر با ۲ باشد نه ۳. پس:

$$(\lim_{x \rightarrow 2} f(x)) \times g'(2) = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرایی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

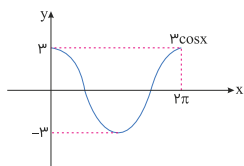
می‌دانیم  $1 \leq \cos(ax) \leq 3$ ، پس  $3 \leq 3 \cos(ax) \leq -3$  و باتوجه به شکل، واضح است که:



$$\begin{cases} \text{صفر تلاقی} \Rightarrow a < -3 \text{ یا } a < 3 \\ \text{کمترین تلاقی} \Rightarrow a = \pm 3 \\ \text{بیشترین تلاقی} \Rightarrow a = \pm 1 \text{ یا } a = \pm 2 \end{cases}$$

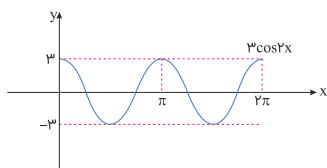
نمودار دقیق تابع را در این دو حالت در فاصله  $(0, 2\pi)$  رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تلاقی را می‌شماریم:

$$1) a = \pm 1 \Rightarrow f(x) = 3 \cos x$$



واضح است که خط  $y = 1$  یا  $y = -1$  هرکدام نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند.

$$2) a = \pm 2 \Rightarrow f(x) = 3 \cos 2x$$



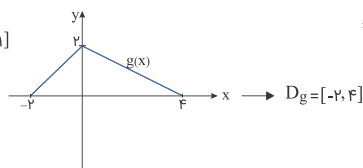
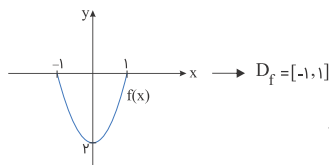
همانطور که می‌بینیم، خط  $y = 2$  یا  $y = -2$  هرکدام نمودار تابع را در چهار نقطه قطع می‌کنند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$\begin{aligned} f(2x+1) &= 3x^2 - 2x \\ \xrightarrow[x=\frac{t-1}{2}]{2x+1=t} f(t) &= 3\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t-1}{2}\right) = (t-1)^2 - (t-1) \\ \Rightarrow f(t) &= t^2 - 3t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2 \\ \xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-x) &= (-x)^2 - 3x(-x) + 2 \Rightarrow f(-x) = x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

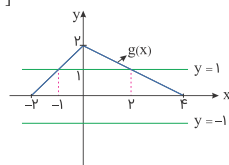
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای تعیین دامنه تعریف تابع  $f \circ g$ ، ابتدا دامنه تابع  $g$  را مشخص کرده و سپس  $g(x)$  را در دامنه تابع  $f$  قرار می‌دهیم. داریم:



$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 4, -1 \leq g(x) \leq 1\}$$

برای حل نامعادله  $-1 \leq g(x) \leq 1$ ، کافی است به شکل زیر دقت نماییم. داریم:



$$\Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq -1 \text{ یا } 2 \leq x \leq 4$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid -2 \leq x \leq -1 \text{ یا } 2 \leq x \leq 4\}$$

پس دامنه تعریف تابع  $f \circ g$  به صورت زیر خواهد بود. داریم:

$$D_{f \circ g} = [-2, -1] \cup [2, 4] \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -2, -1, 2, 3, 4$$

بنابراین دامنه تابع  $f \circ g$  شامل ۵ عدد صحیح است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا صورت و مخرج را تجزیه و کسر را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2x^2 + 7x + 6}{x^3 - 4x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x+3)(2x+3)}{x(x+3)(x-2)} = -\infty$$

پس  $a$  می‌تواند صفر و ۲ (ریشه‌های مخرج) باشد. باید چک کنیم حد چپ تابع در آن‌ها،  $-\infty$  می‌شود یا خیر.

چک کردن  $a = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + 3}{x(x-2)} = \frac{3}{0^+} = +\infty \times$$

چک کردن  $a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 3}{x(x-2)} = \frac{7}{0^-} = -\infty \quad \checkmark$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به فرمول‌های بسط  $2\alpha$ ، ابتدا کمی ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم. داریم:

$$\cos 2x + 7 \cos x + 4 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 7 \cos x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 + 7t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} \Rightarrow t = -3, t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = -3 \quad \times \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

دقت کنید که توابع  $f$  و  $g$  در بازه  $[a, b]$  همواره مثبت هستند اما  $f$  نزولی و  $g$  صعودی است. بنابراین با فرض  $x_1 > x_2$  داریم:  
 $f(x_1) < f(x_2)$  و  $g(x_1) > g(x_2)$  و در نتیجه:

$$g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{g(x_1), g(x_2) > 0} \frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}$$

$$\xrightarrow{f(x_1) < f(x_2)} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)}$$

پس با فرض  $x_1 > x_2$  به  $\frac{f}{g}(x_1) < \frac{f}{g}(x_2)$  رسیده‌ایم، یعنی تابع  $\frac{f}{g}$  اکیداً نزولی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

کمی عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\left( \frac{1}{\cos x} - 2 \cos x \right) \sqrt{2 + 2 \cos 2x} = \left( \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos x} \right) \sqrt{2(1 + \cos 2x)} \quad (I)$$

حال از آنجا که  $1 - 2 \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$ ، نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \text{الف)} & 1 - 2 \cos^2 x = -\cos 2x \\ \text{ب)} & 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \end{cases}$$

پس عبارت (I) به این صورت درمی‌آید:

$$\left( \frac{-\cos 2x}{\cos x} \right) \sqrt{2(2 \cos^2 x)} = \left( \frac{-\cos 2x}{\cos x} \right) \underbrace{\sqrt{4 \cos^2 x}}_{2|\cos x|}$$

چون  $x$  در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس  $\cos x$  مثبت بوده و  $|\cos x| = \cos x$ . بنابراین داریم:

$$\left( \frac{-\cos 2x}{\cos x} \right) \times 2 \cos x = -2 \cos 2x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باید ببینیم چه کارهایی روی  $y = |x|$  می‌توان اعمال کرد که به تابع  $y$  تبدیل شود. در گام نخست تابع  $|x|$  را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم سپس نمودار را نسبت به محور  $x$ ها قرینه می‌کنیم و بعد نمودار را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اما باید توجه داشت که چه اتفاقی رخ داده که  $g(0) = -\frac{4}{3}$  شده است. قطعاً ضریب  $a$  پشت  $|x - 2|$  قرار داشته که این اتفاق افتاده، بنابراین  $a$  را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = -a|x - 2| - 1 \xrightarrow{g(0) = -\frac{4}{3}} g(0) = -2a - 1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow -2a = -\frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{-2}{3}|x - 2| - 1 \Rightarrow g(5) = \frac{-2}{3}|5 - 2| - 1 = -3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
 تستر علوم تجربی دوازدهم

برای تعیین بازه‌ای که در آن تابع  $y = \frac{1}{f(x) - 1}$  اکیداً نزولی باشد، مشتق تابع را مشخص کرده و منفی قرار می‌دهیم. داریم:

$$y' = \frac{0 - f'(x)}{(f(x) - 1)^2} = \frac{-f'(x)}{(f(x) - 1)^2} \leq 0$$

باتوجه به اینکه  $(f(x) - 1)^2$  همواره مثبت می‌باشد، بنابراین بایستی  $0 \geq f'(x)$  باشد. (یعنی بازه‌ای که تابع  $f$  در آن اکیداً صعودی باشد).

به ظاهر طول بیشترین بازه از تابع  $f$  با این خاصیت، بازه  $(1, 6)$  می‌باشد. دقت کنیم که  $x = 4$  ریشهٔ مخرج تابع  $y = \frac{1}{f(x) - 1}$  می‌باشد و این نقطه، نقطهٔ ناپیوستگی تابع است. پس بایستی بازهٔ  $(1, 6)$  را در  $x = 4$  تفکیک کرده و ادعا کنیم تابع در بازه‌های  $(1, 4)$  و  $(4, 6)$  اکیداً نزولی می‌باشد که حداکثر طول بازه  $4 - 1 = 3$  خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\tan x - 1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x |\sin x - \cos x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x - \cos x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

توجه کنید که وقتی  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  است، مقدار  $\sin x$  از  $\cos x$  بزرگتر است، پس:

$$|\sin x - \cos x| = \sin x - \cos x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

چون دامنهٔ تعریف تابع بازهٔ  $[-1, 3]$  است، در نتیجه اگر عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم، جواب نامعادلهٔ حاصل به صورت  $-1 \leq x \leq 3$  خواهد بود. پس  $-1$  و  $3$ ، ریشه‌های عبارت زیر رادیکال (یعنی عبارت  $-x^2 + ax + b$ ) بوده و با مفهوم  $S$  و  $P$  داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -1 + 3 = 2 \xrightarrow{S=a} a = 2$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = -1 \times 3 = -3 \xrightarrow{P=-b} -b = -3 \Rightarrow b = 3$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت  $f(x) = x + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  است. حال از ضابطهٔ تابع مشتق گرفته و ریشهٔ سادهٔ صورت مشتق را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f'(x) = 1 + \frac{\overbrace{-2x+2}^{y(-x+1)}}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{\sqrt{-x^2+2x+3} - x + 1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} = x - 1 \xrightarrow{\substack{x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \text{به توان ۲}}}{-x^2+2x+3 = x^2 - 2x + 1} \Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0$$

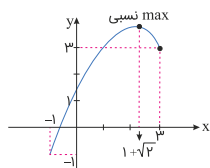
$$\div 2 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \notin 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \text{ ساده} \Rightarrow \text{اکسترمم} \end{cases}$$

حال برای تعیین مقدار تابع در نقطهٔ اکسترمم نسبی آن،  $x = 1 + \sqrt{2}$  را در ضابطهٔ تابع جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$y_{\text{اکسترمم}} = f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{\underbrace{-(1 + \sqrt{2})^2}_{-1-2\sqrt{2}-2} + \underbrace{2(1 + \sqrt{2})}_{2+2\sqrt{2}} + 3} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} \simeq 3.8$$

چون مقدار تابع در نقاط ابتدا و انتهای دامنهٔ تعریف تابع (یعنی  $f(-1) = -1$  و  $f(3) = 3$ ) از مقدار اکسترمم نسبی کمتر است، پس قطعاً عرض نقطهٔ اکسترمم از عرض نقاط همسایگی خود، بیشتر بوده و در نتیجه نوع نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، ماکزیمم نسبی می‌باشد.



می‌دانیم آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با مقدار مشتق تابع موردنظر، پس داریم:

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

کمترین مقدار این تابع به ازای رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$x_S = \frac{-(-6)}{2(3)} = 1 \Rightarrow y'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$$

پس کمترین مقدار آهنگ لحظه‌ای  $-1$  است.  
از طرفی آهنگ متوسط در این بازه برابر است با:

$$\frac{y(3) - y(1)}{3 - 1} = \frac{((3)^3 - 3(3)^2 + 2(3) + 1) - ((1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) + 1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

بنابراین:

$$[1, 3] = 4 - (-1) = 3 = \text{کمترین مقدار ممکن برای آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط در بازه } [1, 3]$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با داشتن زوج مرتب‌های تابع  $f$ ، توابع  $f^{-1}$  و  $f^2$  را می‌سازیم. داریم:

$$f^2 = \{(-1, 4), (2, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \quad f^{-1} = \{(2, -1), (0, 2), (-1, 0), (1, 1)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(f^2(-1)) = f^{-1}(4) = -1 \\ f^{-1}(f^2(2)) = f^{-1}(0) = 2 \\ f^{-1}(f^2(0)) = f^{-1}(1) = 1 \\ f^{-1}(f^2(1)) = f^{-1}(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \circ f^2 = \{(2, 2), (0, 1), (1, 1)\}$$

مجموع اعضای برد تابع  $f^{-1} \circ f^2$  برابر است با:

$$2 + 1 + 1 = 4$$

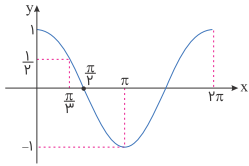
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا حد تابع در نقطه  $x = \frac{\pi}{3}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1} = \infty$$

صفر حدی

برای تعیین علامت  $\infty$ ، باید علامت صفر حدی موجود در مخرج را به دست آوریم. یعنی حد چپ و راست تابع در  $x = \frac{\pi}{3}$  را محاسبه کنیم. باتوجه به نمودار  $y = \cos x$  داریم:



$$x > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos x < 1 \Rightarrow 2 \cos x - 1 < 0$$

$$x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos x > 1 \Rightarrow 2 \cos x - 1 > 0$$

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

بنابراین باید به دنبال نموداری باشیم که در همسایگی راست  $\frac{\pi}{3}$  تا  $-\infty$  و در همسایگی چپ  $\frac{\pi}{3}$  تا  $+\infty$  رفته باشد که با این اوصاف گزینه "۱" صحیح است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا ضابطه  $f'$  را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{2x-1} - 7 \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

مشق  $\frac{f \circ f}{f}$  را حساب می‌کنیم:

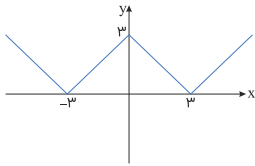
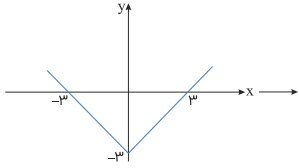
$$y = \frac{f(f(x))}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f'(f(x)) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f(f(x))}{f^2(x)}$$

با جایگذاری  $x = 5$  داریم:

$$y' = \frac{f'(5) \cdot f'(f(5)) \cdot f(5) - f'(5) \cdot f(f(5))}{f^2(5)} = \frac{(\frac{f}{3})(2)(1) - (\frac{f}{3})(-5)}{1^2} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

بهترین کار این است که نمودار تابع  $y = ||x| - ۳|$  را رسم کنیم. کافی است نمودار  $y = |x|$  را سه واحد به سمت پایین برده و سپس قرینه قسمت‌هایی که در زیر محور  $x$ ها واقع شده‌اند را در بالای محور رسم کنیم:



واضح است که این تابع در  $\mathbb{R}$  دارای سه نقطه گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر در  $۳, ۰, -۳ = x$  است. حالا باتوجه به گزینه‌ها، دامنه این تابع را محدود می‌کنیم:

- ۱ گزینه  $a = -۱ \Rightarrow$  بازه  $(-۳, -۱) \Rightarrow$  مشتق‌ناپذیر  
 ۲ گزینه  $a = ۰ \Rightarrow$  بازه  $(-۳, ۰) \Rightarrow$  مشتق‌ناپذیر  
 ۳ گزینه  $a = ۲ \Rightarrow$  بازه  $(-۳, ۲) \Rightarrow x = ۰$  در  $x = ۰$  مشتق‌ناپذیر  
 ۴ گزینه  $a = ۴ \Rightarrow$  بازه  $(-۳, ۴) \Rightarrow x = ۰, ۳$  در  $x = ۰, ۳$  مشتق‌ناپذیر

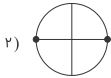
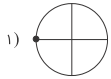
تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
 تستر علوم تجربی دوازدهم  
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا کمی ضابطه تابع را ساده تر می کنیم:

$$f(x) = \frac{2 \sin x + \sin 2x}{(1 + \cos x) \sin x} = \frac{2 \sin x + 2 \sin x \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} = \frac{2 \sin x (1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \sin x} = 2$$

اما دقت کنید! نقاطی که مخرج کسر را صفر می کنند، عضو دامنه این تابع نیستند:

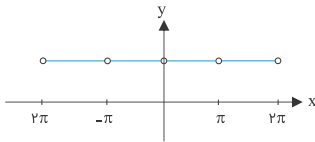
$$(1 + \cos x) \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 & (1) \\ \sin x = 0 & (2) \end{cases}$$



اجتماع این نقاط روی دایره مثلثاتی به صورت زیر می شود، یعنی ریشه های مخرج به صورت  $x = k\pi$  بوده و دامنه این تابع  $\mathbb{R} - \{x | x = k\pi\}$  می باشد.



پس نمودار آن به صورت خط افقی  $y = 2$  با نقاط توخالی در  $x = k\pi$  است:



واضح است که دوره تناوب این تابع  $T = \pi$  می باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$f(x^y f(x)) \xrightarrow{\text{مشتق}} (x^y f(x))' f'(x^y f(x)) = (y x f(x) + x^y f'(x)) f'(x^y f(x)) \\ = (y f(1) + f'(1)) f'(f(1)) \\ \downarrow \\ x=1$$

چون  $f(x) = x\sqrt{x}$ ، پس  $f(1) = 1$  است. داریم:

$$(f(x^y f(x)))' = (y + f'(1)) \times f'(1)$$

$f'(1)$  را می‌خواهیم:

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow (f(x^y f(x)))' = (y + \frac{3}{2}) \times \frac{3}{2} = \frac{y}{2} + \frac{3}{2} = \frac{y+3}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبانی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

حد داده شده ابهام  $\frac{0}{0}$  است. برای ساختن عامل صفرشونده می‌توانیم از هم‌ارزی برنولی برای حل مسئله استفاده کنیم. اگر  $u \rightarrow 0$ ، آنگاه داریم:

$$\sqrt[3]{1+u} \sim 1 + \frac{u}{3} \\ (1+u)^m \sim 1 + mu \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{1 - (1 + \frac{1}{3}(3x))}{1 - (1 - \frac{1}{2}(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\frac{1}{2}x} = -2$$

روش دوم:

حد صورت تست ابهام  $\frac{0}{0}$  است. پس برای رفع ابهام از روش هوییتال کمک می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \sqrt{1-x}} \xrightarrow{\text{ابهام}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2} \sqrt[3]{(1+3x)^{\frac{2}{3}}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبانی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

هنگامی که جواب حد وقتی  $x \rightarrow -1$  میل کرده،  $+\infty$  شده است، حد راست و چپ در  $(-1)$  هر دو  $+\infty$  شده! (انفصال مضاعف) و این یعنی مخرج ریشه مضاعف  $(-1)$  دارد، پس:

$$\text{مخرج} = -(x+1)^y = -x^y - 2x - 1 = -x^y + (a+1)x - 2b - 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} a+1 = -2 \Rightarrow a = -3 \\ -2b - 1 = -1 \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow a+b = -3$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

شکل تابع به صورت  $\sqrt{u}$  است که در آن  $u = 2 - \sqrt{\frac{3}{x+2}}$  می‌باشد. حال مشتق این تابع را با رابطه  $u' \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}$  محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'}{y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{\frac{3}{x+2}}}} \times \left( 0 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{x+2}}} \times \left( \frac{-3}{(x+2)^2} \right) \right)$$

در نهایت با جایگذاری  $x = 1$  داریم:

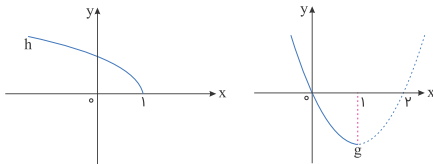
$$y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot \left( -\frac{1}{2\sqrt{1}} \times \frac{-3}{9} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{18} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع  $f$  را به صورت جمع دو تابع  $x^2 - 2x$  و  $g(x) = \sqrt{1-x}$  در نظر می‌گیریم. دقت کنیم دامنه تابع  $f$  به صورت  $D_f = (-\infty, 1]$  است. داریم:

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{h(x)}$$

نمودار  $g$  و  $h$  را با شرط  $x \leq 1$  رسم می‌کنیم. باتوجه به نمودارهای زیر، هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس  $f$  نیز قطعاً اکیداً نزولی خواهد بود.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا طول نقاط اکسترم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f'(x) = \frac{a(x^2 + 1) - 2x(ax)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{a(x^2 + 1 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{a(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

ریشه‌های صورت کسر  $f'$ ،  $x = \pm 1$  بوده و تابع  $f'$  در  $x = 1$  و  $x = -1$  تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقاط اکسترم نسبی  $f'$ ،  $x = 1$  و  $x = -1$  است، داریم:

$$A\left(1, \frac{a}{2}\right), B\left(-1, -\frac{a}{2}\right)$$

معادله خطوط مماس در این دو نقطه به صورت  $y = \frac{a}{2}$  و  $y = -\frac{a}{2}$  است. فاصله این دو خط از هم  $|a|$  است که باید برابر با  $20$  باشد، داریم:

$$\text{فاصله خطوط مماس} = |a| = 20 \xrightarrow{a > 0} a = 20$$

با داشتن  $a = 20$ ، مقدار  $f(2)$  را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = \frac{20x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(2) = \frac{20(2)}{2^2 + 1} = \frac{40}{5} = 8$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کانبار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: توابع رادیکالی با فرجه فرد، در تمام ریشه‌های زیر رادیکال (به شرط آنکه بعد از ساده کردن، ریشه عبارت پشت رادیکال نشود) قطعاً مشتق‌ناپذیر است. اگر عبارت زیر رادیکال با فرجه فرد، یعنی عبارت  $x^2 + mx - m$  ریشه (ساده یا مضاعف) داشته باشد، آنگاه تابع  $f$  در این ریشه مشتق‌ناپذیر است و این با شرط صورت مسئله در تضاد می‌باشد. پس باید عبارت زیر رادیکال دارای ریشه حقیقی نباشد. داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 + 4m < 0 \Rightarrow -4 < m < 0$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x-1| + a|x^2-1|}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$f'_+(1) = 1 + a(2), \quad f'_-(1) = -1 + a(-2) \Rightarrow 1 + 2a = -2a - 1$$

$$\Rightarrow 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حد مخرج کسر وقتی  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  صفر می‌شود. چون حاصل حد، عدد شده است، پس حد صورت نیز باید صفر باشد تا بعد از رفع ابهام  $\frac{0}{0}$ ، حاصل حد که یک عدد است ( $L$ )، به دست آید. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (a \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} - 1 = 0 \Rightarrow a = 2$$

با جایگذاری  $a = 2$ ، حاصل حد را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(2 \cos^2 x - 1)(2 \cos^2 x + 1)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x)}$$

هر دو عبارت  $2 \cos^2 x - 1$  و  $\cos^2 x - \sin^2 x$  برابر با  $\cos 2x$  هستند، پس می‌توانیم آن‌ها را از صورت و مخرج، ساده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{(2 \cos^2 x - 1)}^{\cos 2x} (2 \cos^2 x + 1)}{\underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} (\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x)} = \frac{2 \times \frac{2}{4} + 1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \Rightarrow L = \frac{8}{3}$$

پس حاصل  $a + 3L = 2 + 3 \times \frac{8}{3} = 10$  برابر است با:

$$a + 3L = 2 + 3 \left(\frac{8}{3}\right) = 2 + 8 = 10$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه به مفروضات مشخص می‌شود که  $g$  نیز یک تابع خطی است.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow a = \tan \alpha = 4 \Rightarrow f(x) = 4x + b$$

$$g(x) = cx + d$$

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4(cx + d) + b = 4cx + 4d + b = -4x + 14 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = c(4x + b) + d = 4cx + bc + d = -4x - 9 \end{cases}$$

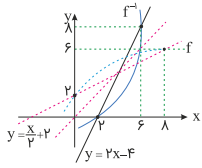
$$\Rightarrow \begin{cases} 4c = -4 \Rightarrow c = -1 \\ 4d + b = 14 \\ bc + d = -9 \end{cases} \xrightarrow{c=-1} d = 3, b = 6 \Rightarrow g(x) = cx + d = -x + 3 \Rightarrow g(-1) = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای محاسبه دامنه تابع  $g$ ، باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، پس داریم:

$$f^{-1}(x) - 2x + 4 \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq 2x - 4$$

اگر نمودار هر دو تابع  $f(x)$  و خط  $y = \frac{x}{2} + 2$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه کنیم (یعنی خط  $y = x$ )، نمودار دو تابع  $f^{-1}(x)$  و خط  $y = 2x - 4$  مشخص می‌شوند (دو خط  $y = \frac{x}{2} + 2$  و  $y = 2x - 4$  وارون یکدیگرند). حال با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که در بازه  $(2, 6) - \mathbb{R}$ ، نمودار تابع  $f^{-1}(x)$  بالاتر یا برابر با خط  $y = 2x - 4$  خواهد بود.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با داشتن ضابطه  $f(x)$ ، خودمان ضابطه  $f(g(x))$  را تشکیل می‌دهیم و سپس ضابطه به دست آمده را برابر با ضابطه  $f(g(x))$  داده شده، قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda x^3 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = \lambda g^3(x) - 1 \\ f(g(x)) &= \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - 1 = \underbrace{(x+1)^3} - 1 \\ \Rightarrow \lambda g^3(x) - 1 &= (x+1)^3 - 1 \\ \Rightarrow g^3(x) &= \frac{(x+1)^3 - 1}{\lambda} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} g(x) = \frac{x+1}{2} \\ \Rightarrow (f+g)(-1) &= f(-1) + g(-1) = -9 + 0 = -9 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

با ابهام  $\infty - \infty$  مواجهیم که برای رفع آن، عبارت را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

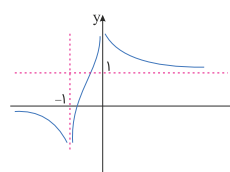
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{2}} - \sqrt{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^{\sqrt{2}} - \sqrt{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b})(x^{\sqrt{2}} + \sqrt{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b})}{x^{\sqrt{2}} + \sqrt{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^{\sqrt{2}}) - (x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b)}{x^{\sqrt{2}} + \sqrt{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\sqrt{2}} - b}{x^{\sqrt{2}} + \sqrt{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b}} \\ \xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرئوان}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\sqrt{2}} - b}{x^{\sqrt{2}} + \sqrt{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} + b}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{2}} + \sqrt{x^{\sqrt{2}}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\sqrt{2}}}{2x^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس جواب حد فوق کاملاً مستقل از  $b$  است و به ازای هر مقدار  $b$ ، جواب  $\frac{1}{2}$  خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع در  $+\infty$  به خط  $y = 1$  نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$



به علاوه اگر حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$  را بخواهیم، باید ببینیم به ازای چه مقداری از  $x$  حد تابع  $-\infty$  است. باتوجه به شکل،  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  می‌باشد. پس  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = -1$  است. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = 1 + (-1) = 0$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برخلاف تصور اولیه، با ابهام  $\infty - \infty$  مواجه نیستیم و کافی است از هم‌ارزی پرتوان استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{fx^2 + x + 1} + \sqrt{fx^2 - x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{fx^2} + \sqrt{fx^2}) \\ &\stackrel{\text{پرتوان}}{\downarrow} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (|2x| + |2x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x) = +\infty \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برای آنکه  $x = 3$  نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد ولی اکسترمم نسبی آن نباشد، لازم است که  $x = 3$  ریشه مکرر زوج معادله  $f'(x) = 0$  شود، چون ریشه‌های ساده و مکرر فرد  $f'$  در آن‌ها هم صفر می‌شود و هم تغییر علامت می‌دهد) هم جزء نقاط بحرانی تابع  $f$  هستند و هم اکسترمم نسبی آن.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x + b} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - a)(x + b) - (1)(x^2 - ax + 3)}{(x + b)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(2x^2 + 2bx - ax - ab) - (x^2 - ax + 3)}{(x + b)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^2 + 2bx - ab - 3}{(x + b)^2} \stackrel{f'(x)=0}{\rightarrow} x^2 + 2bx - ab - 3 = 0 \end{aligned}$$

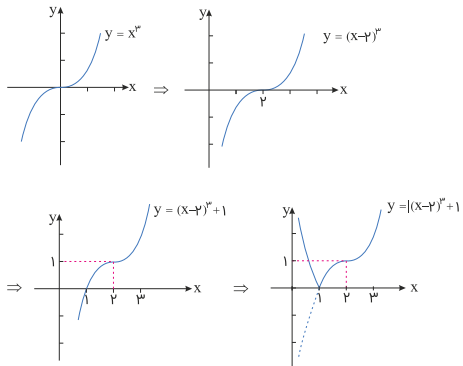
برای آنکه این معادله، ریشه مضاعف  $x = 3$  داشته باشد، باید به صورت  $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$  باشد، پس:

$$\begin{cases} 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \\ -ab - 3 = 9 \xrightarrow{b=-3} 3a - 3 = 9 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a - b = 4 - (-3) = 7 \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای اینکه بتوانیم تابع را راحت تر رسم کنیم، ابتدا تابع را به صورت مکعب کامل درمی آوریم که بتوانیم از قواعد انتقال استفاده کنیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - \sqrt{\lambda} = x^3 - 6x^2 + 12x - \lambda + 1$$



همان طور که ملاحظه می کنید کامل ترین بازه ای که تابع  $y = |f(x)|$  در آن اکیداً صعودی است بازه  $(1, +\infty)$  می باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا باید از قدر مطلق رها شویم:  $(h \rightarrow 0^- \Rightarrow |h| = -h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-h) - f(2)}{h}$$

در عبارت فوق تغییر متغیر  $-h = t$  را اعمال می کنیم. بدیهی است چون  $h \rightarrow 0^-$  و  $t \rightarrow 0^+$  و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2+t) - f(2)}{-t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} = -f'_+(2) \end{aligned}$$

حاصل عبارت به قرینه مشتق راست تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = 2$  رسید. اما باتوجه به اینکه  $f(2) = 2(2) + 6 = 10$  و  $f'(2) = 2(2) + 6 = 10$  می توان دریافت که تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  از سمت راست پیوسته نیست و لذا در این نقطه مشتق راست وجود ندارد. بنابراین گزینه "۴" صحیح است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول نقاط بحرانی  $f(x) = \frac{2x^2 - \sqrt{x}}{x}$  را در فاصله  $[0, 1]$  پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{توان } 2} 16x^2 = \frac{1}{4x} \\ \Rightarrow 64x^3 &= 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

نقاط  $x = 0$  و  $x = 1$  هم نقاط ابتدا و انتهای دامنه و بحرانی هستند. حالا مقادیر تابع را در نقاط بحرانی آن پیدا می کنیم:

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}$$

کمترین مقدار از بین مقادیر بالا مینیمم مطلق تابع را نشان می دهد که برابر  $-\frac{3}{16}$  است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-3) + 5}{5h^2 + h} = 6 \xrightarrow{\text{بیتوان}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-3) + 5}{h} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-3) = -5 \\ 2f'(-3) = 6 \Rightarrow f'(-3) = 3 \end{cases}$$

حال مشتق تابع  $f^3\left(\frac{1}{x}\right)$  را در  $x = -\frac{1}{3}$  حساب می‌کنیم:

$$\left(f^3\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 3f^2\left(\frac{1}{x}\right) \times f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2} \underset{x=-\frac{1}{3}}{=} 3f^2(-3) \times f'(-3) \times (-9)$$

$$= 3(-5)^2(3)(-9) = -2025$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای پیدا کردن ضابطه تابع وارون در تست کافی است  $x$ ی دلخواه در دامنه تابع انتخاب کنیم (بهتر است نقطه‌های ابتدا و انتهای دامنه را انتخاب نکنیم، چون ممکن است دو گزینه یا بیشتر درست شوند) سپس با قرار دادن آن در تابع داده شده،  $y$  متناظر با آن را حساب کرده و سپس جای  $x$  و  $y$  نقطه به دست آمده را عوض کرده و در گزینه‌ها جایگذاری کنیم تا گزینه درست مشخص شود.

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x=5} f(3) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5-1}} = \sqrt{5 - 2(2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow A \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix} \in f \Leftrightarrow A' \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix} \in f^{-1} \Rightarrow \text{گزینه ۴}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$f \circ f'(x)$  تابعی چندجمله‌ای از درجه دوم است، به عبارتی با قرار دادن  $f'$  در داخل تابع  $f(x)$ ، به عبارت درجه دوم رسیده‌ایم. پس  $f(x)$  خود باید از درجه دوم باشد، یعنی:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2ax + b \\ f''(x) = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \circ f'(x) = f(f'(x)) = f(2ax + b)$$

$$= a(2ax + b)^2 + b(2ax + b) + c$$

$$= (4a^3x^2 + 4a^2bx + ab^2) + (2abx + b^2) + c$$

$$= (4a^3)x^2 + (4a^2b + 2ab)x + (ab^2 + b^2 + c)$$

از مقایسه این عبارت با  $108x^2 + mx + n$  داریم:

$$4a^3 = 108 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f''(x) = 2a = 6$$

چون  $f''$  تابعی ثابت است،  $f''(99)$  هم برابر ۶ خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$2 \sin x (\cos x - \sin x) = \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\frac{2 \sin x \cos x = \sin 2x}{2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x} \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x - 1 = \cos 2x \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

حد تابع را فقط می‌توان در  $-\infty$  محاسبه نمود چرا که دامنه تابع  $f(x)$ ،  $(-\infty, 1]$  است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x - |x+1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{1-x}}{2x - |x+1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{1-x}}{2x + (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

تابع  $f(x)$  خطی است. بنابراین تابع  $g(x)$  تابعی چندجمله‌ای از درجه دوم است. دقت کنید در تابع‌های درجه دوم آهنگ تغییرات متوسط در بازه  $[a, b]$  با آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه  $x = \frac{a+b}{2}$  (وسط بازه) برابر است.  
بنا بر آنچه گفته شد، آهنگ تغییرات متوسط تابع  $g(x)$  در بازه  $[-1, 3]$  با آهنگ لحظه‌ای تغییرات در  $x = 1$  برابر و اختلاف آن‌ها صفر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ببینیم هر مرحله به زبان ریاضی چه معنایی دارد و مرحله به مرحله ضابطه‌ها را مشخص کنیم:

۱- انقباض افقی ۲ واحدی:  $f(2x)$

۲- قرینه نسبت به محور  $y$ ها:  $f(-2x)$

۳- یک واحد انتقال افقی به سمت چپ: محل اشتباه اغلب همین‌جا است که شاید بگویید این مرحله  $f(-2x+1)$  است. باید بدانید در نوشتن ضابطه تبدیل، هر تغییری که انجام می‌شود بر متغیر  $x$  است نه قسمت‌های دیگر. در اینجا یعنی به جای  $x$  باید  $(x+1)$  بگذاریم. یعنی ضابطه در این مرحله  $f(-2(x+1)) = f(-2x-2)$  است.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{-x}$$

$$\Rightarrow f(-2x-2) = \frac{1}{\sqrt{-2x-2+2}} + \sqrt{-(-2x-2)} = \frac{1}{\sqrt{-2x}} + \sqrt{2x+2}$$

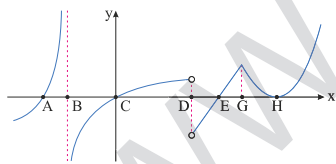
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

هر نقطه‌ای از دامنه تابع  $f$  در آن مشتق تابع (یعنی  $f'$ ) صفر باشد یا  $f'$  در آن موجود نباشد، نقطه بحرانی محسوب می‌شود. در نقاط بحرانی که علامت  $f'$  از مثبت به منفی، تغییر علامت دهد، آن نقطه، ماکزیم نسبی تابع  $f$  است و اگر  $f'$  در نقطه‌ای از منفی به مثبت، تغییر علامت دهد، آن نقطه، مینیمم نسبی تابع  $f$  می‌باشد.

بحرانی‌ها:  $A, B, C, D, E, H$  (۶ نقطه بحرانی)

max نسبی:  $B$  و  $D$  (۲ نقطه ماکزیم نسبی)

min نسبی:  $A, C$  و  $E$  (۳ نقطه مینیمم نسبی)



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا به  $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$  و  $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$  دقت می‌کنیم. پس اولاً اعداد  $\pm 1$  در  $D_{g \circ f}$  نیستند. ثانیاً باید اعدادی مانند  $x$  را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها  $f(x) = -3$  باشند. با حل معادله  $\frac{1}{x^2-1} = -3$  داریم:

$$x^2 - 1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

پس  $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 1, \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\}$  که فقط دو عدد صحیح  $-1$  و  $1$  در آن نیستند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه به اینکه حاصل  $1 - \sin^2 x$  و  $1 + \cos^2 x$  به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  برابر با صفر است، با یک رفع ابهام  $\frac{0}{0}$  روبه‌رو هستیم. با استفاده از دو اتحاد مثلثاتی  $1 - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$  و  $1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)^2$  داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{2 \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{2(\sin x - \cos x)^2 (\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1 - ax^2 - ax - bx - b}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(1-a)x^2 + (-a-b)x + 1-b}{x+1} \right) = 1 \\ \begin{cases} 1-a=0 \Rightarrow a=1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(-a-b)x + 1-b}{x+1} \right) = 1 \Rightarrow (-a-b) = 1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a+b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

تالیفی آریان حیدری - محمد علی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته تستی: برای تعیین طول نقاط بحرانی توابعی که ضابطه مشتق آن‌ها مشخص است (به عبارتی شامل قدر مطلق یا جزء صحیح نباشند)، از ضابطه تابع مشتق گرفته و همه ریشه‌های صورت مشتق را مشروط بر اینکه متعلق به دامنه تعریف تابع باشند، به عنوان طول نقطه بحرانی معرفی می‌کنیم. در توابع شامل رادیکال با فرجه فرد، علاوه بر ریشه‌های صورت، ریشه‌های مخرج را نیز مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2\lambda x^{\frac{1}{3}} = (x^2 - 2\lambda) \cdot \sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

باتوجه به توضیحات بالا، داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2\lambda) \cdot \sqrt[3]{x} = 2x \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} (x^2 - 2\lambda) = \frac{6x^2 + x^2 - 2\lambda}{3 \sqrt[3]{x^2}} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{اکسترمم نسبی} \Rightarrow \text{ساده} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \text{مخرج قائم} \Rightarrow \text{مضاعف} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

پس تابع  $f$  دارای ۳ نقطه بحرانی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باید از قسمت داخلی عبارت شروع کنیم و طبق شکل حدهای خواسته شده را پیدا کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] - \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(f(x))] = 2$$

$$\underbrace{\underbrace{+\infty}_{1^+}}_{1} - \underbrace{\underbrace{-\infty}_{(-1)^+}}_{-1}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

چون ضابطه دوم، یک تابع اکیداً صعودی است (تابع  $x + \sqrt{x+3}$ ، به صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی می‌باشد، پس اکیداً صعودی خواهد بود)، در نتیجه ضابطه اول نیز، باید قطعاً اکیداً صعودی باشد، پس داریم:

$$(1) \quad a > 0 = \text{شیب خط}$$

از طرفی دیگر برد ضابطه اول و ضابطه دوم نباید اشتراک داشته باشند. برای تعیین برد توابع اکیداً صعودی، کافی است به ترتیب دامنه، برد را مشخص نماییم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} ax + a - 1, & x \in (-\infty, 1) \Rightarrow R_1 = (-\infty, 2a - 1) \\ x + \sqrt{x+3}, & x \in [1, +\infty) \Rightarrow R_2 = [3, +\infty) \end{cases}$$

برای آنکه بردها اشتراکی نداشته باشند، باید مقدار  $2a - 1$ ، کوچکتر یا مساوی ۳ باشد. داریم:

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow 2a - 1 \leq 3 \Rightarrow 2a \leq 4 \Rightarrow a \leq 2 \quad (2)$$

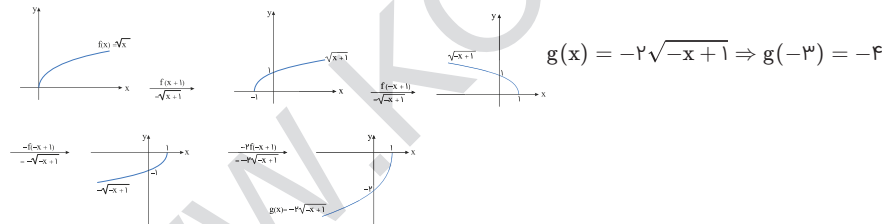
$$\frac{(1) \cap (2)}{(1) \cap (2)} \Rightarrow 0 < a \leq 2 \quad a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \{1, 2\}$$

پس مجموعه مقادیر  $a$ ، شامل ۲ عدد صحیح خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

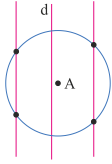
باید بررسی کنیم چه تبدیلاتی روی نمودار تابع  $f(x)$  آمده تا به نمودار تابع  $g(x)$  تبدیل شده است. اینکه نمودار هم نسبت به محور  $x$ ها و هم نسبت به محور  $y$ ها قرینه شده است، کمی کار را سخت می‌کند. نمودار  $f$  را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم (یعنی به جای  $x$ ،  $x+1$  قرار می‌دهیم، یعنی  $f(x+1)$ ) و سپس نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌کنیم (یعنی به جای  $x$ ،  $-x$  قرار می‌دهیم، یعنی  $f(-x+1)$ ). حال نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده (کل تابع را در  $-1$  ضرب می‌کنیم، یعنی  $-f(-x+1)$ ) و بعد عرض همه نقاط را ۲ برابر می‌کنیم  $(-2f(-x+1))$ .

پس ضابطه تابع  $g$  عبارت است از:



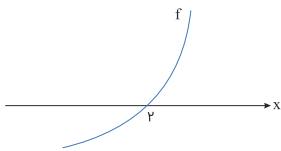
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله معلوم k هستند یک دایره به مرکز A و شعاع k می‌باشد. از طرفی مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله k هستند دو خط موازی با d است. محل تلاقی این دو خط موازی با دایره نقاط موردنظر هستند که تعداد آن‌ها حداکثر ۴ تا است.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهرابی قراہانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به اینکه  $f'(x) = 2x^A + x^F + 1$  عبارتی همواره مثبت می‌باشد، بنابراین تابع f اکیداً صعودی می‌باشد. از طرفی می‌دانیم  $f(2) = 0$ ، پس باتوجه به صعودی بودن تابع f، مقدار تابع در همسایگی چپ و راست  $x = 2$ ، به ترتیب  $0^-$  و  $0^+$  خواهد بود.

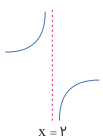


$$\Rightarrow \begin{cases} f(2^-) = 0^- \\ f(2^+) = 0^+ \end{cases}$$

حال برای بررسی نمودار تابع  $y = \frac{1-x}{f(x)}$  در اطراف  $x = 2$ ، باید حد چپ و حد راست این تابع را در  $x = 2$  مشخص کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{f(x)} = \frac{1-2}{f(2^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{f(x)} = \frac{1-2}{f(2^-)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی قراہانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع  $y = |x^2 - 1|$  در نقطه‌های  $x = \pm 1$  مشتق‌ناپذیر است و برای اینکه تابع  $f(x)$  فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، ضابطه آن باید  $f(x) = (x+1)|x^2 - 1|$  یا  $f(x) = (x-1)|x^2 - 1|$  باشد و در نتیجه a می‌تواند ۱ یا -۱ باشد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی قراہانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا عرض نقاط بحرانی تابع را مشخص کرده و سپس مقادیر را در بی‌نهایت دورها نیز مشخص می‌کنیم (حد در بی‌نهایت تابع). داریم:

$$y' = \frac{1(1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y' = 0 \xrightarrow{\text{صورت مشتق}} 1-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{2} \\ x=-1 \Rightarrow y(-1) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

بین عرض‌های به‌دست‌آمده مقایسه کرده و بیشترین عرض را به عنوان ماکزیمم مطلق و کمترین عرض را به عنوان مینیمم مطلق معرفی می‌کنیم. داریم:

$$y_{\max} = \frac{1}{2}, y_{\min} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{اختلاف مقادیر اکسترمم مطلق} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اولاً:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان دو}} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

ثانیاً:

$$\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \left( \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= \sin \alpha \underbrace{\left( \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}_{-\cos \alpha} \underbrace{\left( \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}_1$$

$$= -\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در هر مسیر به‌طور جداگانه آهنگ تغییر لحظه‌ای و متوسط را بررسی می‌کنیم: (می‌دانیم آهنگ تغییر لحظه‌ای شیب خط مماس و آهنگ تغییر متوسط شیب واصل بین دو سر بازه است)

مسیر "۱":

آهنگ تغییر متوسط < آهنگ تغییر لحظه‌ای > ۰

مسیر "۲":

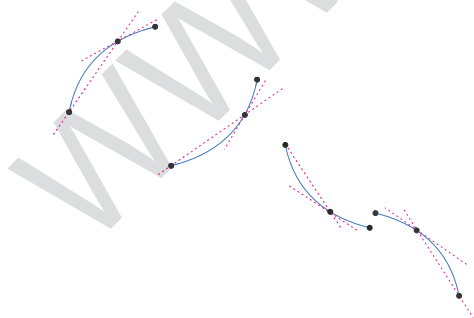
آهنگ تغییر لحظه‌ای < آهنگ تغییر متوسط > ۰

مسیر "۳":

۰ < آهنگ تغییر لحظه‌ای < آهنگ تغییر متوسط

مسیر "۴":

۰ < آهنگ تغییر متوسط < آهنگ تغییر لحظه‌ای



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  تابع اولیه ما باشد، پس  $1 + 2f(x-1) + \sqrt{x-1} = 2f(x-1) + 1$  برای رسم  $1 + 2f(x-1)$  ابتدا نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال داده، سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و در نهایت کل نمودار را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم که این عوامل با یک جابه‌جایی بی‌تأثیر در گزینه "۳" دیده می‌شوند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه به وجود  $\sqrt{-x}$  در ضابطه تابع  $f$ ، باید  $x \leq 0$  باشد. پس نتیجه می‌گیریم که  $|x| = -x$  است. پس ضابطه  $f$  به صورت  $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{-x}+1}$  درمی‌آید. صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{-x})^2 - 1}{\sqrt{-x} + 1} = \frac{(\sqrt{-x} - 1)(\sqrt{-x} + 1)}{(\sqrt{-x} + 1)} = \sqrt{-x} - 1 \quad ; x \leq 0$$

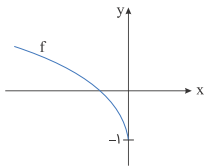
حال ضابطه  $f^{-1}$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y = \sqrt{-x} - 1 \Rightarrow \sqrt{-x} = y + 1 \Rightarrow -x = (y + 1)^2 \\ \Rightarrow x = -(y + 1)^2 \xrightarrow[y, x]{\text{عوض کردن جای}} y = -(x + 1)^2$$

برد تابع  $f^{-1}$  همان  $D_{f^{-1}}$  است. پس داریم:

$$R_f = D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = -(x + 1)^2 \quad ; x \geq -1$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب ۱ و -۳ است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= |b| + c = 1 \\ y_{\min} &= -|b| + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |b| = 2, \quad c = -1$$

باتوجه به اینکه نمودار تابع سینوسی  $y = b \sin(ax) + c$  در سمت راست محور  $y$ ، به صورت صعودی شروع شده، پس  $b \cdot a > 0$  است.

$$\text{ازطرفی دوره تناوب تابع } T = 4\pi - \left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} \text{ است، پس داریم:}$$

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow |a| = \frac{3}{8}$$

پس باتوجه به اینکه  $ab > 0$  است، داریم:

$$fabc = f\left(\frac{3}{8} \times 2 \times (-1)\right) = -3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا تابع را ساده‌تر می‌کنیم و به صورت توانی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{x^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{x^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{x^{\frac{1}{5}}}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{x^{\frac{1}{5}} \times x^{\frac{1}{5}}}} \\ &= \sqrt[5]{x^{\frac{1}{5}} \sqrt[5]{x^{\frac{2}{5}}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{1}{5}} \times x^{\frac{2}{5}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{3}{5}}} = x^{\frac{3}{25}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{\lambda}{15} x^{-\frac{3}{25}} = \frac{\lambda}{15 \sqrt[25]{x^3}} \end{aligned}$$

از مقایسه این عبارت با  $f'(x) = \frac{a}{b \sqrt[5]{x^c}}$  نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} a = \lambda \\ b = 15 \Rightarrow a - b + c = \lambda - 15 + 7 = 0 \\ c = 7 \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با تفکیک حدود در ریشه‌های داخل قدر مطلق، تابع f را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -x - (2x - 1) + ax + 3 = (a - 3)x + 4 & ; x \leq 0 \\ x - (2x - 1) + ax + 3 = (a - 1)x + 4 & ; 0 < x < \frac{1}{4} \\ x + (2x - 1) + ax + 3 = (a + 3)x + 2 & ; x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

حال دقت کنیم که تنها امکان برای وجود بی‌شمار نقطه بحرانی در این تابع، ثابت بودن تابع در یکی از زیربازه‌های موجود می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ \text{یا} \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \text{یا} \\ a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

پس حاصل جمع مقادیر ممکن برای a برابر است با:  $(3) + (1) + (-3) = 1$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h = 330 \Rightarrow h = \frac{330}{\pi r^2} \\ S &= \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{330}{\pi r^2}\right) = 2\left(\pi r^2 + \frac{330}{r}\right) \\ S' &= 2\left(2\pi r + \frac{-330}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \text{ cm} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

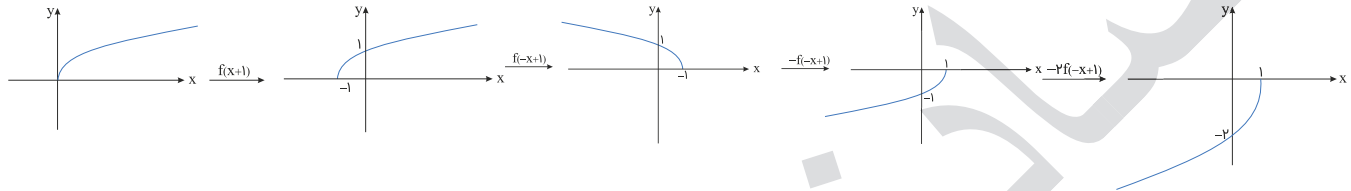
می‌دانیم  $f(f^{-1}(x)) = x$  است، پس حاصل عبارت  $f(f^{-1}(5))$  برابر  $5$  می‌باشد. حال با جایگذاری  $f(f^{-1}(-5)) = -5$  در تساوی داده‌شده، معادله را ساده‌تر می‌کنیم. داریم:

$$3g(f(a)) + \underbrace{f(f^{-1}(-5))}_{-5} = 1 \Rightarrow 3g(f(a)) = 6 \Rightarrow g(f(a)) = 2 \xrightarrow{g(x)=\sqrt{4-x}} \sqrt{4-f(a)} = 2$$

$$\Rightarrow f(a) = 0 \xrightarrow{(3,0) \in f} a = 3$$

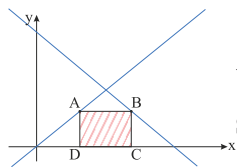
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باید ببینیم با چه تغییرهایی نمودار  $f(x)$  به نمودار  $g(x)$  تبدیل شده است. اینکه نمودار هم نسبت به محور  $x$  و هم نسبت به محور  $y$  قرینه شده است، مقداری کار را سخت می‌کند. نمودار  $f$  را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم  $(f(x+1))$  و سپس نسبت به محور  $y$  قرینه می‌کنیم  $(f(-x+1))$ . نمودار حاصل را نسبت به محور  $x$  قرینه کرده  $(-f(-x+1))$  و سپس عرض همه نقاط را در  $2$  ضرب می‌کنیم  $(-2f(-x+1))$ .



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مختصات نقطه  $A$  واقع بر خط  $y = 3x$  را به صورت  $(x_1, 3x_1)$  و مختصات نقطه  $B$  واقع بر خط  $y = -3x + 2$  را به صورت  $(x_2, -3x_2 + 2)$  در نظر می‌گیریم. داریم:



$$AD = BC \Rightarrow 3x_1 = -3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} - x_1$$

$$S_{\text{مستطیل}} = AB \times AD = (x_2 - x_1)(3x_1) = \left(\frac{2}{3} - x_1 - x_1\right)3x_1 = \left(\frac{2}{3} - 2x_1\right)3x_1 = -6x_1^2 + 2x_1$$

از آنجاکه  $S$  بر حسب  $x_1$  از درجه دوم است، پس بیشترین مقدار آن در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$$

$$S_{\text{max}} = S\left(\frac{1}{6}\right) = -6\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1) - f(1 - 2h^2)}{3h^2} = \frac{2}{3} f'_{-}(1)$$

یعنی کافی است مشتق چپ تابع  $f$  را در  $x = 1$  از ضابطه بالایی حساب کرده و در  $\frac{2}{3}$  ضرب کنیم. اما دقت کنید تابع  $f$  در  $x = 1$  از سمت چپ پیوسته نیست:

$$\begin{cases} \text{ضابطه پایین: } f(1) = 3 \\ \text{ضابطه بالا: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \end{cases}$$

پس این تابع در  $x = 1$  از سمت چپ قطعاً مشتق‌ناپذیر است و حاصل این حد وجود ندارد.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

محل تلاقی خط  $y = 10x + 20$  با محور  $x$ ها را پیدا می‌کنیم:

$$y = 10x + 20 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$$

از آنجا که این خط در نقطه  $(-2, 0)$  بر منحنی  $f$  مماس است، پس:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 10 \end{cases}$$

پس در مشتق‌گیری از تابع  $g(x)$  در  $x = -2$  دقت کنید که:  
اولاً:

$$f(x) - f^3(x) \xrightarrow{x=-2} f(-2) - f^3(-2) = 0$$

یعنی پراتنز اول، یک عامل صفرشونده است.

ثانیاً: در بین پراتنزه‌های بعدی هم  $x^2 - 4$  نیز عامل صفرشونده در  $x = -2$  محسوب می‌شود و لذا مشتق تابع  $g$  در  $x = -2$  به خاطر وجود دوتا عامل صفرشونده، حتماً صفر است.

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 9x + 14} = \frac{13}{0^+} = +\infty$$

$$\text{نوجه: } x^3 - x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x^2 + x - 7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2)(x^2 + x - 7) = (0^-)(-1) = 0^+$$

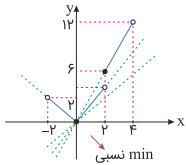
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا به کمک بازه‌بندی، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$-2 < x < 0 \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} < 0 \xrightarrow{[\frac{x}{2}] = -1} f(x) = (-x)(-1 + 2) = -x$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \xrightarrow{[\frac{x}{2}] = 0} f(x) = (x)(0 + 2) = 2x$$

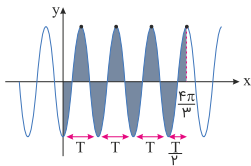
$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \xrightarrow{[\frac{x}{2}] = 1} f(x) = (x)(1 + 2) = 3x$$



بنابراین باتوجه به شکل، تنها در  $x = 0$ ،  $\min$  نسبی وجود دارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

چون سؤال از ما حداکثر مقدار  $a$  را خواسته است، پس نتیجه می‌گیریم در  $x = \frac{4\pi}{3}$  تابع دارای چهارمین ماکزیمم خود خواهد بود. نمودار کلی  $y = -3 \cos ax$  به صورت زیر است. باتوجه به نمودار تابع  $y = -3 \cos ax$  داریم:



$$7 \times \text{طاق} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \text{طاق} = \frac{4\pi}{21} \Rightarrow T = 2 \times \text{طاق} = \frac{8\pi}{21}$$

از طرف دیگر می‌دانیم دوره تناوب تابع  $y = -3 \cos ax$  برابر است با  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  است، پس داریم:

$$\frac{8\pi}{21} = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{21}{4} \Rightarrow a = \frac{21}{4}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم  
تستر علوم تجربی دوازدهم

ریشه‌های  $f'$  در بازه  $[-1, 4]$  را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^6}{6} - 2x^2 + k \Rightarrow f'(x) = x^5 - 4x \xrightarrow{f'(x)=0} x^5 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^4 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \times$$

مقدار  $f$  را در نقاط بحرانی (جاهایی که  $f' = 0$  و ابتدا و انتهای بازه) حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(0) = k \\ f(2) = 4 - 8 + k = k - 4 \Rightarrow \text{مطلق min} \\ f(-1) = \frac{1}{6} - 2 + k = k - \frac{11}{6} \\ f(4) = 64 - 32 + k = k + 32 \Rightarrow \text{مطلق max} \end{cases}$$

مقدار  $\text{max}$  مطلق،  $5$  برابر  $\text{min}$  مطلق است، پس:

$$k + 32 = 5(k - 4) \Rightarrow k + 32 = 5k - 20 \\ \Rightarrow 4k = 52 \Rightarrow k = 13$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون  
تستر علوم تجربی دوازدهم  
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم