

رياضی کنکور

تابع - مثلثات - درجه ۲ جامع

تنظیم : مهندس صادق طاهری

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

یادآوری:

$$۱) x^{rk} = y^{rk} \rightarrow$$

$$۲) a^{-n} =$$

$$۳) \sqrt[n]{a^m} =$$

تعیین علامت چند جمله ای ها:

هر عبارت به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ را یک چند جمله ای از درجه ی n می گویند.

(۱) تعیین علامت چند جمله ای درجه یک

ابتدا ریشه ی چند جمله ای را تعیین کرده و سپس با توجه به جدول زیر تعیین علامت می کنیم:

$$\text{مثال : } y = 2x - 3$$

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

(۲) تعیین علامت چند جمله ای درجه دو

هر عبارت درجه ۲ به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ می باشد که برای تعیین علامت آن سه حالت در نظر می گیریم:

۱) $\Delta > 0$

۲) $\Delta = 0$

۳) $\Delta < 0$

یادآوری: در یک عبارت درجه ۲ داریم:

و همچنین برای به دست آوردن ریشه ها داریم:

مثال : $f(x) = x^2 + 2x + 4$

(۳) تعیین علامت n جمله ای از درجه n

برای تعیین علامت یک n جمله ای درجه n به صورت زیر عمل می کنیم:

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

(۵)

(۶)

(۷)

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 4)(x - 3)x^3}{(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 6x + 9)(9 - x^2)}}$$

مثال:

تست ۱: مجموعه جواب نامعادله ی $\frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2+1)} \leq 0$ کدام است؟

تست ۲: کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصله منفی است؟

تعریف تابع:

تابع به عنوان زوج مرتب:

$$f = \{(1,2), (2,3), (4,3)\}$$

$$f = \{(1,2), (1,3), (1,5)\}$$

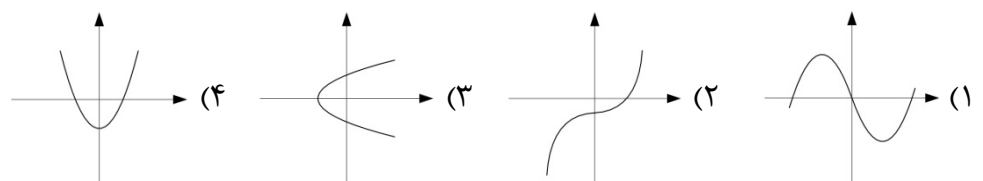
تست: a را چنان تعیین کنید که f یک تابع باشد؟
 $f = \{(1,2), (4,5), (1,3a)\}$

نکته:

تابع از نظر نمودار:

آزمون خط قائم:

تست: کدام یک از گزینه های زیر تابع نیست؟



درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تابع به عنوان یک دستگاه:

تابع از نظر ضابطه:

تعریف ریاضی تابع:

مثال: روابط زیر را از نظر تابع بودن بررسی کنید:

۱) $y = 3x^2 + 2$

۲) $y^2 = 2x - 6$

نکته:

تست: کدام رابطه یک تابع است؟

(۱) $y^3 - 3y^2 + x = 0$ (۲) $y + y^3 = x^2 + 1$ (۳) $|y - 1| + x = 0$ (۴) $x \cos y - x = 1$

نکته:

آیا رابطه $-2y^3 - 4y + x = 0$ تابع است؟

نکته: تک نقطه ها و مجموعه ی تهی نیز تابع است.

نکته:

نکته:

کدام یک از روابط زیر تابع نیست؟

(۱) $(2x - 4)^4 + \sqrt{2y - 3} = 0$ (۲) $|x - 1| + |y + 2| = 0$
(۳) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ (۴) $|y - 2| + |x - 4| = -3$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

توابع چند ضابطه ای:

$$y = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \vdots \\ f_n(x) & x \in D_n \end{cases} \quad \text{به صورت}$$

(۱)

(۲)

کدام یک از روابط زیر تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 3 & x \leq 1 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & x \geq 1 \\ 2x - 3 & x \leq 1 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ -x^3 & x \leq 1 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (۳)$$

تذکر:

جبر توابع:

الف) جبر توابع از روی زوج مرتب:

مثال: عملیات زیر را بر روی f و g انجام دهید؟

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

$$g = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 2)\}$$

$$2f =$$

$$f^2 - g^2 =$$

$$f - g =$$

$$\frac{f}{g - 4} =$$

نکته:

ب) جبر توابع از روی ضابطه:

$$(f + g)(x) =$$

$$(f \times g)(x) =$$

$$(f - g)(x) =$$

$$(f / g)(x) =$$

مثال: اگر f و g توابع زیر باشند، مطلوب است حاصل $\frac{(f - g)(2)}{(f \times g)(-1)}$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & x \geq 1 \\ x + 2 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x & x \geq 0 \\ \frac{x-1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ و $g(x) = \sqrt{3 - |x|}$ ، مطلوب است ضابطه و دامنه تابع $\frac{2g}{f}$ ؟

ج) جبر توابع از روی نمودار

مثال: نمودارهای زیر را با استفاده از جبر توابع رسم کنید.

۱) $y = x + \sin x$

۲) $y = x \sin x$

۳) $y = x - \sqrt{x}$

۴) $y = \frac{x}{1+x^2}$

نکته:

تابع مرکب:

الف) تابع مرکب از روی زوج مرتب:

مثال: توابع مرکب زیر را با استفاده از f و g به دست آورید:

$$f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\} \quad g = \{(1,3), (2,4), (3,5), (5,2)\}$$

$$fog(x) =$$

$$gof(x) =$$

$$fof(x) =$$

$$gog(x) =$$

نکته:

ب) تابع مرکب از روی ضابطه:

$$fog(x) = f(g(x))$$

$$D_{fog(x)} = \{x \mid x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad R_g \cap D_f \neq \emptyset \quad \text{شرط تشکیل:}$$

$$gof(x) = g(f(x))$$

$$D_{gof(x)} = \{x \mid x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad R_f \cap D_g \neq \emptyset \quad \text{شرط تشکیل:}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = \sqrt{4x-1}$ باشد، مطلوب است تعیین fog و دامنه ی آن؟

مثال: اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، مطلوب است ضابطه و دامنه ی gof ؟

مثال: اگر $f(x) = [2x] + [-2x]$ باشد، حاصل $fff(x)$ کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & 0 < x < 1 \\ 1+x & x < 0 \end{cases}$ ، مطلوب است $f \circ f(-\cos^2 x)$ ؟

به دست آوردن تابع اولیه از روی روابط ترکیبی:

الف) برای به دست آوردن f از $f \circ g$ ، ابتدا ...

مثال: اگر $f \circ g(x) = 3x + 4$ و $g(x) = x - 5$ ، مطلوب است $f(x)$ ؟

ب) در بعضی از مواقع $g(x)$ به صورت تابعی از $f \circ g$ است. در این حالت ...

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

ج) اگر $f \circ g$ و $f(x)$ معلوم باشد برای تعیین $g(x)$ مطابق زیر عمل می کنیم:

مثال: اگر $f \circ g(x) = 3x + 7$ و $f(x) = 10x + 6$ ، مطلوب است $g(x)$ ؟

د) برای به دست آوردن f از رابطه ی بین $f(x)$ و $f(-x)$...

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

مثال: اگر $2x + 3 = f(x) + 2f(-x)$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

$$(1) \quad 2x - \frac{3}{2} \quad (2) \quad 2x + \frac{3}{2} \quad (3) \quad -2x + 1 \quad (4) \quad 2x + 3$$

نکته:

ه) برای به دست آوردن f از رابطه ی بین $f(x)$ و $f\left(\frac{1}{x}\right)$...

مثال: اگر $4x - 2 = f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right)$ باشد، مطلوب است $f(x)$ ؟

$$(1) \quad \frac{8-2x-4x^2}{3x} \quad (2) \quad 2x+2 \quad (3) \quad \frac{2x}{3} \quad (4) \quad 4x-3$$

نکته:

نکته: در توابع هموگرافیک به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر ...

$$\underbrace{fff \dots f(x)}_n = \begin{cases} n \text{ زوج} ; \\ n \text{ فرد} ; \end{cases}$$

مثال: m را چنان تعیین کنید که در تابع $f(x) = \frac{2x-2}{x-m+1}$ رابطه ی $fff(x) = f(x)$ برقرار باشد؟

$$\underbrace{fff \dots f(x)}_n = \frac{|x|}{|x|+1} \quad \text{نکته: در توابع به صورت } f(x) = \frac{|x|}{|x|+1} \text{ داریم:}$$

$$\underbrace{fff \dots f(x)}_n = \frac{x}{\sqrt{1 \pm x^2}} \quad \text{نکته: در توابع به صورت } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 \pm x^2}} \text{ داریم:}$$

تساوی دو تابع:

توابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم مساوی اند اگر:

(1)

(2)

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

نکته: توابع $f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}$ با هم مساوی نیستند مگر آن که ...

نکته: توابع $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-a}\sqrt{x+a}$ در هیچ صورت برابر نیستند.

مثال: تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $g(x) = x - 1$ و $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

ب) $g(x) = 2 \log x$ و $f(x) = \log x^2$

ج) $g(x) = \left[\frac{x^4}{x^4 + 1} \right]$ و $f(x) = \cdot$

د) $g(x) = \left[\frac{1}{x^2 + 1} \right]$ و $f(x) = \cdot$

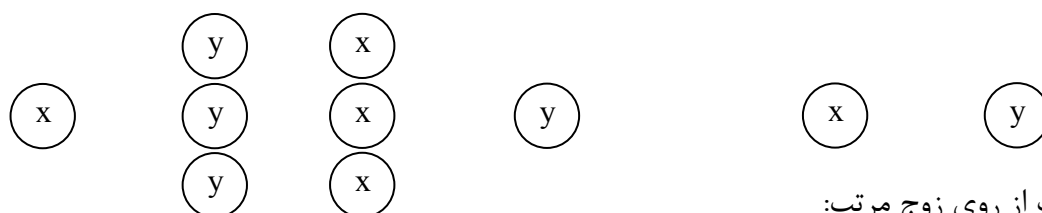
ه) $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$ و $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-1}$

و) $g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ و $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تابع یک به یک:

تعریف:



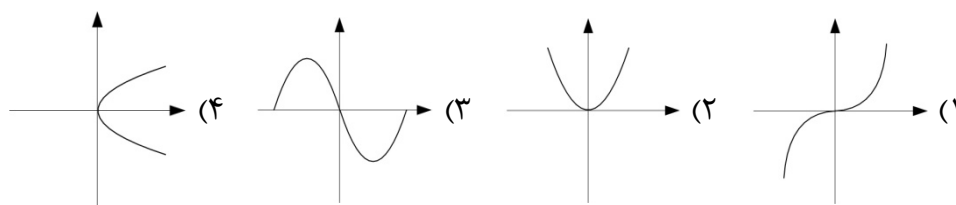
الف) تابع یک به یک از روی زوج مرتب:

تست: اگر تابع $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ یک به یک باشد، a کدام است؟

ب) تابع یک به یک از روی نمودار:

آزمون خط افقی:

تست: کدام یک از گزینه های زیر تابع یک به یک است؟



ج) تابع یک به یک از نظر ضابطه:

تعریف ریاضی تابع یک به یک:

مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید:

۱) $y = 4x^2 + 5$

۲) $y = 4x^2 - 6$

نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: کدام گزینه یک تابع یک به یک است؟

(۱) $y^3 = x^2 + 1$ (۲) $y = [x^3 + 5x]$ (۳) $y = x^3 + 5x - 6$ (۴) $y = \sin x^2$

نکته:

تست: کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

(۱) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 1-x & x \leq 0 \end{cases}$ (۲) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}$

(۳) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$ (۴) $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$

نکته:

تست: m را چنان تعیین کنید که $f(x) = \frac{1-3x}{2m+1-x}$ یک به یک باشد.

نکته:

تست: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ 2x + 3 & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود a چه قدر است؟

توابع زوج:

تابع f را زوج گویند هرگاه:

(۱)

(۲)

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

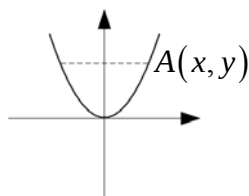
نکته: برای تشخیص زوج بودن یک تابع کافی است ...

مثال: تابع زیر را از نظر زوج و فرد بودن بررسی کنید.

$$y = 4x^2 - 1$$

نکته:

نکته: محور y ها، محور تقارن توابع زوج است.



تابع فرد:

تابع f را فرد گویند هرگاه ...

(۱)

(۲)

تذکر: اگر D_f متقارن نباشد، تابع f نه فرد و نه زوج است.

نکته: برای تشخیص فرد بودن یک تابع کافی است ...

مثال: تابع زیر را از نظر زوج و فرد بودن بررسی کنید.

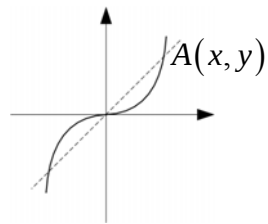
$$y = 2x^3 + 5x$$

نکته:

تست: هرگاه مبداء مختصات مرکز تقارن تابع $\log(ax + \sqrt{9x^2 + 1})$ باشد، a کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44



نکته: مبدا مختصات، مرکز تقارن نمودار تابع فرد است.

نکته: نمودار توابع فرد از مبدا مختصات می گذرد مگر آن که ...

نکته:

تست: اگر $f(x) = x^2 + (A-1)x$ زوج، و $g(x) = (B+2)x^2 + \sin x$ فرد باشد، $B+A$ کدام است؟

نکته: تابع، تنها تابعی است که هم زوج و هم فرد است.

مثال: زوج و فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید:

۱) $f(x) = \tan \pi[x]$

۲) $f(x) = \sin \pi[x]$

۳) $f(x) = [x - [x]]$

۴) $f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right]$

تست: a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f = \{(a-1, 4), (2, 4), (3, b+2), (-3, 1)\}$ زوج باشد؟

نکته: در جبر توابع داریم:

زوج	+	زوج	=	زوج
فرد	+	فرد	=	فرد
زوج	×	زوج	=	زوج
فرد	×	فرد	=	فرد
زوج	×	فرد	=	فرد

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

نکته: در ترکیب توابع داریم:

$$(1) \quad f \text{ زوج و } g \text{ زوج} \Rightarrow$$

$$(2) \quad f \text{ زوج و } g \text{ فرد} \Rightarrow$$

$$(3) \quad f \text{ فرد و } g \text{ زوج} \Rightarrow$$

$$(4) \quad f \text{ فرد و } g \text{ فرد} \Rightarrow$$

مثال: اگر f و g زوج باشد، حاصل $\frac{2f-g}{3g}$ چیست؟

نکته: برای هر تابع مانند $f(x)$ ، ...

نکته: هر تابع را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت:

نکته: هرگاه f یک تابع زوج باشد ...

تست: a را چنان تعیین کنید که $f(x) = |x+2| + a|x-2|$ زوج باشد؟

تست: $a+b+c$ را چنان تعیین کنید که $f(x) = |x+a| + |x+b| + |x+c+1|$ زوج باشد؟

تست: $a+b$ را چنان تعیین کنید که $f(x) = |x+a| - |x+2| + b|x+5|$ فرد باشد؟

نکته: توابع کثیرالجمله ...

تست: اگر تابع $f(x) = x^4(a-2) + (b+1)x^3 + (b-3)x^2 + 3 - c$ فرد باشد، $2a+b+c$ کدام است؟

تست: اگر تابع $f(x) = \{(a-1, b), (0, 0), (1, c-2)\}$ هم زوج و هم فرد باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

تست: اگر تابع زیر فرد باشد، $a+b+c$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x^2 + 5x - 1} & x > 0 \\ \frac{ax}{x^2 + bx + c} & x < 0 \end{cases}$$

نکته: در تابع $f(x) = \begin{cases} g(x) & x > a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ داریم:

نکته: مشتق تابع زوج، و مشتق تابع فرد، است.

تست: کدام گزینه همیشه درست نیست؟

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (۱) مشتق توابع زوج، فرد است | (۲) مشتق توابع فرد، زوج است |
| (۳) انتگرال توابع فرد، زوج است | (۴) انتگرال توابع زوج، فرد است |

نکته: همواره در مشتق پذیری داریم:

$$f \text{ زوج} \Rightarrow \begin{cases} f'(-x) = -f'(x) \\ f'(-x) = -f'(x) \end{cases}$$

$$f \text{ فرد} \Rightarrow \begin{cases} f'(-x) = f'(x) \\ f'(-x) = f'(x) \end{cases}$$

تست: اگر f زوج و $f'_+(1) = 1$ و $f'_-(1) = 2$ باشد، آنگاه $f'_+(-1)$ کدام است؟

مثال: اگر f فرد و g زوج باشد، مشتق تابع fog کدام است؟

تست: تابع $f(x) = x^2 - 4x + 4$ مفروض است. اگر $g(x) = f(x+m)$ زوج باشد، آنگاه m کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: حدود m را طوری بیابید تا $f(x) = |4x - 3| - |4x + 2m - 1|$ فرد باشد؟

تست: کدام یک از توابع زیر مانند بقیه نیست؟ (از لحاظ زوج و فرد بودن)

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \quad (1)$$

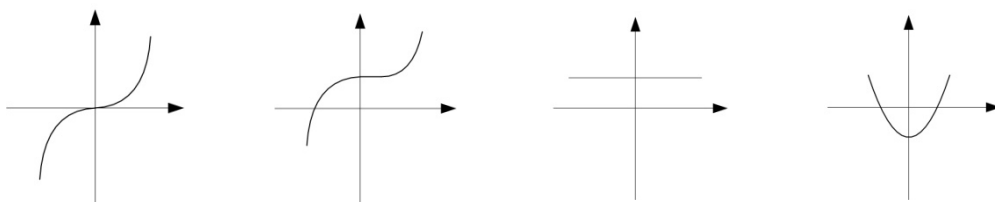
$$f(x) = |x - 5| - |x + 5| \quad (2)$$

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (3)$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2 \quad (4)$$

تابع یکنوا:

تابع همواره صعودی یا همواره نزولی را یک تابع اکیداً یکنوا گویند.



نکته: در ریاضیات همیشه از سمت چپ به نمودارها توجه کنید.

نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تابع معکوس:

هر گاه در تابع f جای مؤلفه های اول و دوم عوض شود، معکوس یا وارون تابع به دست می آید:

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

نکته مهم: هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است و هر تابع یک به یک، معکوس پذیر است.

روش به دست آوردن ضابطه معکوس یک تابع:

۱-

۲-

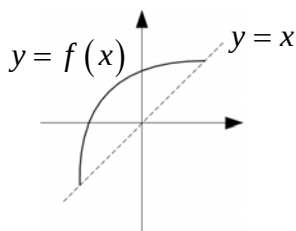
مثال: معکوس توابع زیر را به دست آورید:

$$y = x^2 - 5$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$$

نکته: وارون تابع فرد، ...

تست: هرگاه f یک تابع وارون پذیر باشد، $f(x) + f(-x)$ چگونه است؟
(۱) متناوب (۲) یکنوا (۳) معکوس ناپذیر (۴) یک به یک



نکته:

(الف)

(ب)

تست: نمودار تابع $y = -(x+1)^3 + 1$ وارون خود را در چند نقطه قطع می کند؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: هرگاه تابع $y = (a+1)x^4 + (a+2)x^3 + (a+4)x^2 + 3x$ روی $\mathbb{R}$ معکوس پذیر باشد، وارون آن خط $y = x$ را در چند نقطه قطع می کند؟

نکته:

تست: اگر $f \circ f^{-1}(x) = x$ و $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$)، آنگاه حدود تغییرات x کدام است؟

نکته: در ترکیب توابع داریم:

- ۱)
- ۲)
- ۳)

تست: اگر $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ و $f(x) = 2x - 1$ باشد، آنگاه $g(\cdot)$ کدام است؟

تست: اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ باشد، $R_{f^{-1}}$ کدام است؟

نکته:

تست: تابع معکوس $y = x + 4 + 4\sqrt{x}$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y = x + 4 + 4\sqrt{x} & (2) \quad y = x + 4 - 4\sqrt{x} \quad (1) \\ y = x + 2\sqrt{x} & (4) \quad y = x - 2\sqrt{x} \quad (3) \end{array}$$

نکته:

تست: فاصله ی نقطه ی $A(-1, 2)$ را از متناظرش روی f^{-1} بیابید؟

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

نکته: در توابع هموگرافیک به شکل $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر ...

تذکر:

نکته: اگر $f(x) = f^{-1}(x)$ باشد، داریم:

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n = \begin{cases} n = 2k \\ n = 2k - 1 \end{cases}$$

تست: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد، آنگاه $f \circ f$ کدام است؟

نکته: جهت تغییرات f و f^{-1} یکسان می باشد.

نکته: برای به دست آوردن معکوس یک تابع چند ضابطه ای ...

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

تست: اگر $f = \{(1,2), (2,5), (3,3), (4,-1)\}$ و $g = \{(2,3), (-1,4), (4,1), (3,0)\}$ باشد، تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟

تست: اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ ، آنگاه ضابطه ی $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: هرگاه g تابعی معکوس پذیر و $f(x) = 2g\left(\frac{3x-1}{4}\right)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(x)$ کدام است؟

تست: وارون تابع $y = x + [x]$ کدام است؟

تست: وارون تابع $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ کدام است؟

تابع پوشا:

توابعی هستند که بردشان برابر هم دامنه ی تابع باشد و یا هم دامنه ی تابع زیر مجموعه برد تابع باشد. به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases} \xrightarrow[\text{پوشا بودن}]{\text{شرط}} B \subseteq R_f$$

نکته: برای تشخیص پوشا بودن می توان ...

مثال: پوشا بودن توابع زیر را بررسی کنید:

$$۱) \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y = x^3 + x + 1 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \\ y = [x] \end{cases}$$

$$۴) \begin{cases} \mathbb{R} - \{5\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ y = \frac{2x+1}{x-5} \end{cases}$$

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

نکته: تابعی را که هم یک به یک و هم پوشا باشد دوسویی گویند.

تست: تابع زیر با کدام ضابطه یک به یک و پوشاست؟

$$y = x + |x| \quad (۲) \qquad y = x - |x| \quad (۱)$$

$$y = x |x| \quad (۴) \qquad y = \frac{|x|}{x} \quad (۳)$$

تست: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 2+x & x < 0 \end{cases}$ چگونه است؟

نکته:

قواعد تعیین دامنه ی تابع:

۱- توابع کثیرال جمله:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + d$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - \sqrt{5}x}{4}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

۲- توابع کسری:

$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{x}{[2x] - [x]}$$

$$f(x) = \frac{3x-7}{[x] + [-x]}$$

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{[2x] + [-2x]}$$

$$f(x) = \frac{3x}{2[3x]-1}$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

۳- توابع رادیکالی با فرجه ی زوج:

$$f(x) = \sqrt[k]{g(x)}$$

نکته:

تذکر:

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{2x+3}{|x-1|-1}}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$$

$$f(x) = \sqrt{|x-1|-3}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-|x|}}$$

$$f(x) = \sqrt{|x|-x}$$

$$f(x) = \sqrt{3-[x]}$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{3-[x]}}$$

$$f(x) = \sqrt{x-\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \log_b^a \quad D_f = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

۴- توابع لگاریتمی:

$$f(x) = \log_{x-1}^{9-x^2}$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$$

۵- توابع مثلثاتی:

الف) در توابع $y = \sin u$ و $y = \cos u$ کافیست ...

$$f(x) = \sin \sqrt{\frac{x-1}{[x]+2}}$$

ب) در توابع $y = \operatorname{tg} u$ و $y = \operatorname{cot} u$ داریم:

$$y = \operatorname{tg} u$$

$$y = \operatorname{cot} u$$

$$y = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

۶- توابع معکوس مثلثاتی:

الف) در توابع $y = \operatorname{Arc} \sin u$ و $y = \operatorname{Arc} \cos u$ داریم:

$$f(x) = \operatorname{Arc} \cos \left(\frac{x+2}{x+1} \right)$$

ب) در توابع $y = \operatorname{Arctg} u$ و $y = \operatorname{Arc} \cot u$ کافیست:

$$y = \operatorname{Arctg} \sqrt{x}$$

۷- توابع قدرمطلق و براکتی:

در توابع $y = |u|$ و $y = [u]$ کافیست ...

$$y = \left| \sin \sqrt{x+1} \right|$$

۸- توابع چند ضابطه ای:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|-1} & x \geq 0 \\ \frac{1}{[x]} & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = x^k$$

$$f(x) = \sqrt[k]{x}$$

$$f(x) = [x]$$

$$f(x) = x - [x]$$

$$f(x) = [x] + [-x]$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = a \sin x \pm b \cos x$$

$$f(x) = \sin x \pm \cos x$$

$$f(x) = 1 \pm \sin x$$

$$f(x) = 1 \pm \cos x$$

$$f(x) = \text{Arc sin } x$$

$$f(x) = \text{Arc cos } x$$

$$f(x) = \text{Arctg } x$$

$$f(x) = \text{Arc cot } x$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$f(x) = \sin^n x + \cos^n x$$

$$f(x) = \sin^n x \cdot \cos^n x$$

$$f(x) = \frac{ax^2}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = |x - a| + |x - b|$$

$$f(x) = |x - a| - |x - b|$$

۲- توابع با دامنه ی محدود:

$$f(x) = \sqrt{x - |x|}$$

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + \sqrt{-\sin^2 \pi x}$$

۳- با استفاده از ماکزیمم و مینیمم مطلق و مجانب ها:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

نکته:

$$f(x) = (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3})(\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3})$$

$$f(x) = x + 5 + \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 9}{x^2 - 2x + 3}$$

$$y = x + 5 + \frac{1}{x + 3}$$

$$y = \text{Arc sin}(x^2 + x + 1) + \text{Arc cos}(x^2 + x + 3)$$

۴- روش مربع کامل:

$$y = x^2 + 4x + 5$$

۵- استفاده از $\Delta \geq 0$ و حل کردن آن:

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

نکته مهم:

مثال: اگر در تابع $y = f(x)$ داشته باشیم $D_f = [0, 2]$ و $R_f = [1, 4]$ ، آنگاه مطلوب است دامنه و برد تابع $g(x)$:

$$g(x) = 4f(2x - 1) - 3$$

مثال: مطلوب است دامنه و برد تابع $y = 4|x - 2| + 3$:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

دوره ی تناوب تابع:

تابع $y = f(x)$ را متناوب گویند اگر عدد مثبت T وجود داشته باشد به قسمی که:

(۱)

(۲)

آنگاه T دوره ی تناوب تابع است.

نکته:

تست: اگر $f(x+2) = -f(x)$ باشد، دوره ی تناوب تابع کدام است؟

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

نکته: همواره به خاطر داشته باشید:

-۱

-۲

-۳

۱- دوره ی تناوب توابع براکتی:

$$y = ax - [ax]$$

$$y = [ax] + [-ax]$$

$$y = (-1)^{[ax]}$$

۲- دوره ی تناوب توابع مثلثاتی:

$$y = k \sin^{n-1} ax + b$$

$$y = k \cos^{n-1} ax + b$$

$$y = \frac{\alpha \sin(ax) + b}{c \sin(ax) + d}$$

$$y = \frac{\alpha \cos(ax) + b}{c \cos(ax) + d}$$

$$y = \sin ax \pm \cos ax$$

$$y = k \sin^n ax + b$$

$$y = k \cos^n ax + b$$

$$y = tg^n ax + b$$

$$y = \cot^n ax + b$$

$$y = k |\sin^n ax| + b$$

$$y = k |\cos^n ax| + b$$

$$y = |\sin^n ax \pm \cos^n ax| + b$$

$$y = |tg ax|$$

$$y = |\cot ax|$$

$$y = tg ax + \cot ax$$

$$y = \sin^n ax + \cos^n ax$$

$$y = tg^n ax + \cot^n ax$$

$$y = |tg ax + \cot ax|$$

$$y = |\sin^n ax| + |\cos^n ax|$$

$$y = |tg^n ax| + |\cot^n ax|$$

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

مثال: دوره ی تناوب توابع زیر را تعیین کنید:

$$y = \sin \Delta x$$

$$y = \sin^{10} 3x$$

$$y = \operatorname{tg} \vee x$$

$$y = (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]}. \cos x$$

$$y = [3x] - 3x$$

$$y = |1 + \sin x|$$

$$y = (-1)^{\left[\frac{x}{4}\right]}$$

$$y = \sin^4 2x + \cos^4 2x$$

$$y = [3x] - [2x] - x$$

$$y = 3 \sin \pi x - \Delta \cos \frac{2\pi}{3} x$$

$$y = \Delta \sin \frac{2\Delta}{3} x - \vee \cos \frac{1\Delta}{2} x$$

$$y = \Delta \cos^6 \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3} \right) + \vee \operatorname{tg}^{\vee} \frac{x}{3}$$

$$y = \sin x \cos x \cos 2x$$

$$y = \cot 2x - \operatorname{tg} 2x$$

$$y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\Delta \cos 2x - 6 \sin 2x}$$

نکته:

$$y = \frac{\cos x}{\cos x}$$

نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$y = \begin{cases} \sin^{\frac{\pi}{\sqrt{}}} x & ; x \in Q \\ \cdot & ; x \notin Q \end{cases}$$

نکته:

$$y = \sin^{\frac{\pi}{\sqrt{}}} [x]$$

$$y = \sin \frac{\pi}{\Delta} [x]$$

نکته:

$$y = \sin^{\frac{\pi}{\sqrt{}}} |x|$$

$$y = \cos |x|$$

نکته:

نکته: به طور کلی توابع زیر متناوب نیستند:

-۱

-۲

-۳

-۴

$$\log (\sin^{\frac{\pi}{\sqrt{}}} \pi x)$$

$$\sqrt{\sin \Delta x}$$

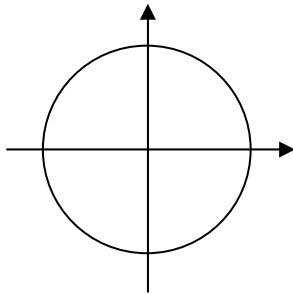
نکته:

معرفی توابع خاص:

(۱) توابع مثلثاتی

دایره ی مثلثاتی:

توجه:



نمایش نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه:

اگر $\cos \alpha \sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ باشد، آنگاه α در کدام ناحیه است؟

اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ باشد، آنگاه حدود m کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

علامت نسبت های مثلثاتی در چهار ربع دایره:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin \theta$				
$\cos \theta$				
$tg \theta$				
$\cot \theta$				

نکته:

نسبت های مثلثاتی زوایای اصلی:

	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$								
$\cos \theta$								
$tg \theta$								
$\cot \theta$								

نسبت های مثلثاتی:

۱- نسبت های $(-\alpha)$ و $(2\pi \pm \alpha)$ و $(\pi \pm \alpha)$:

$$\sin(2k\pi + \alpha) =$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) =$$

$$tg(2k\pi + \alpha) =$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) =$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) =$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) =$$

$$tg(2k\pi - \alpha) =$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) =$$

$$\sin(\pi + \alpha) =$$

$$\cos(\pi + \alpha) =$$

$$tg(\pi + \alpha) =$$

$$\cot(\pi + \alpha) =$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$\sin(\pi - \alpha) =$$

$$\cos(\pi - \alpha) =$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$\operatorname{cot}(\pi - \alpha) =$$

$$\sin(-\alpha) =$$

$$\cos(-\alpha) =$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) =$$

$$\operatorname{cot}(-\alpha) =$$

۲- نسبت های $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\operatorname{cot}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\operatorname{cot}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\operatorname{cot}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\operatorname{cot}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin a \sin b \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - b\right) =$$

اتحادهای مثلثاتی:

$$۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \\ \cos \alpha = \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \\ \operatorname{cot} \alpha = \end{cases} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha \times \operatorname{cot} \alpha =$$

$$۳) \operatorname{tg} \alpha = \quad \operatorname{cot} \alpha = \quad , \sec \alpha = \quad , \csc \alpha =$$

$$۴) ۱ + \operatorname{tg}^2 \alpha = \quad ۱ + \operatorname{cot}^2 \alpha =$$

نسبت های $(\alpha \pm \beta)$:

$$۵) \sin(\alpha \pm \beta) =$$

$$۶) \cos(\alpha \pm \beta) =$$

$$۷) \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) =$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

نسبت های (2α) :

۸) $\sin 2\alpha =$

۹) $\cos 2\alpha =$

۱۰) $tg 2\alpha =$ $\rightarrow \sin 2\alpha =$ $, \cos 2\alpha =$

نسبت های (3α) :

۱۱) $\sin 3\alpha =$

۱۲) $\cos 3\alpha =$

۱۳) $tg 3\alpha =$

فرمول های طلایی:

۱۴) $\cos^2 \alpha =$

۱۵) $\sin^2 \alpha =$

۱۶) $tg^2 \alpha =$

نتایج:

۱۷) $\sin \alpha + \cos \alpha =$

۱۸) $\sin \alpha - \cos \alpha =$

۱۹) $\frac{1 - tg \alpha}{1 + tg \alpha} =$

۲۰) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha =$

۲۱) $\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha =$

۲۲) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^7 =$

فرمول های تبدیل جمع به ضرب:

۲۳) $\sin p + \sin q =$

۲۴) $\sin p - \sin q =$

۲۵) $\cos p + \cos q =$

۲۶) $\cos p - \cos q =$

۲۷) $tg p + tg q =$

۲۸) $\cot p + \cot q =$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

فرمول های تبدیل ضرب به جمع:

$$۲۹) \sin a \cdot \cos b =$$

$$۳۰) \sin a \cdot \sin b =$$

$$۳۱) \cos a \cdot \cos b =$$

چند رابطه ی فرعی:

$$۳۲) \sin(a+b) \sin(a-b) =$$

$$۳۳) \cos(a+b) \cos(a-b) =$$

$$۳۴) \cot \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$$

$$۳۵) \cot \alpha - \operatorname{tg} \alpha =$$

ساده شده ی عبارات زیر کدام است؟

$$\frac{\sin a + \sin ۳a + ۲ \cos a}{(\sin a + \cos a)^۲} =$$

$$\frac{۱ - \operatorname{tg} ۱۰}{۱ + \operatorname{tg} ۱۰} =$$

$$\sin x \left[۱ + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{۲} \right] =$$

اگر $\operatorname{tg} x + \cot x = ۴$ و $\sin y + \cos y = \frac{1}{۳}$ باشد، حاصل $\sin ۲x$ و $\sin ۲y$ کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

معادلات مثلثاتی:

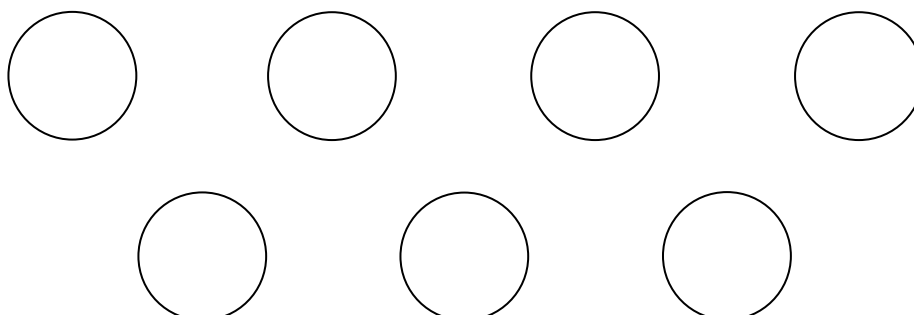
(معادلات نوع I)

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases}$$

نقاط مهم دایره:



نکته ۱:

نکته ۲:

تذکر مهم:

معادلات زیر را حل کنید:

$$1) \quad 2 \sin x - 1 = 0$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

۲) $2 \cos 2x + 1 = 0$

۳) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$

۴) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{3} = -1$

نکته ۱:

نکته ۲:

تست: جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

تست: نقطه پایانی کمان جواب های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی راس های کدام چند ضلعی است؟

(۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم الزاویه (۴) مثلث متساوی الساقین

معادلات نوع II

$2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

تست: جمع ریشه های معادله روبرو در $[0, 2\pi]$ کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

معادلات نوع III

۱) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

۲) $\cos 5x \cos 3x = \frac{1}{4} \cos 2x$

نکته ۱:

نکته ۲:

تست: اگر $tgx = 2$ باشد، حاصل $\frac{3 \sin x - \cos x}{\cos x + 2 \sin x}$ کدام است؟

نکته:

تست: حاصل $\sin^2 \alpha (1 + \cot^2 \alpha)$ کدام است؟

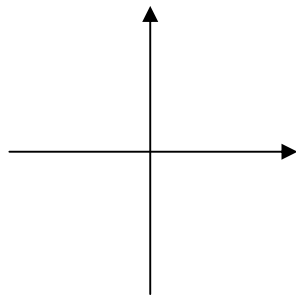
نکته:

تست: حاصل $\sin 10^\circ - \sqrt{3} \cos 10^\circ$ کدام است

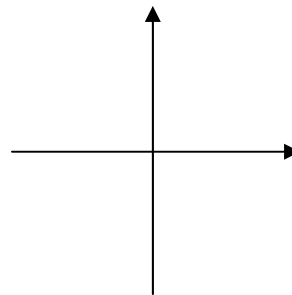
نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

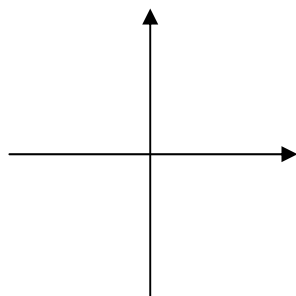
نمودار توابع مثلثاتی:



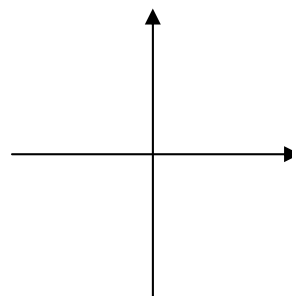
$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



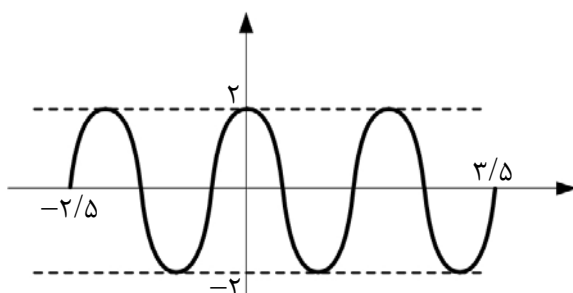
$$y = \tan x$$



$$y = \cot x$$

مثال: نمودار تابع $y = 2\sin(4x - \pi) + 3$ را در یک دوره ی تناوب رسم کنید:

تست: شکل روبرو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{T} + bx \right)$ است. کدام است؟



- | | | | |
|-----|---|-----|-----|
| (۱) | ۲ | (۲) | ۲/۵ |
| (۳) | ۳ | (۴) | ۳/۵ |

تست: نمودار تابع $y = -4 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x \right)$ روی بازه ی $[-1, 1]$ ، در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- | | | | | | | | |
|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| (۱) | ۱ | (۲) | ۲ | (۳) | ۳ | (۴) | ۴ |
|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|

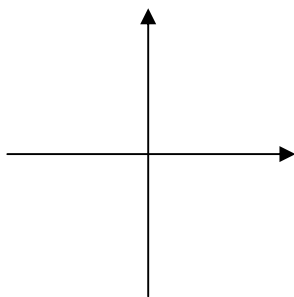
درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می کند؟

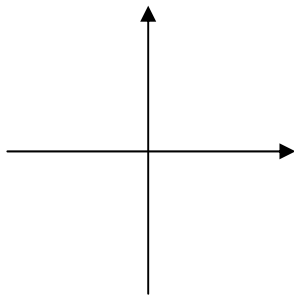
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(۲) توابع معکوس مثلثاتی

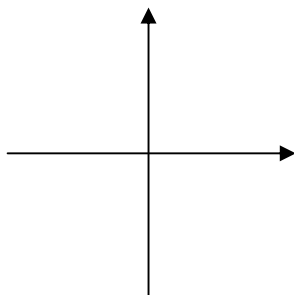
۱) $y = \text{Arc sin } x$



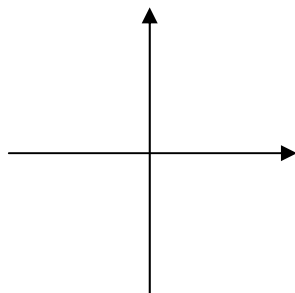
۲) $y = \text{Arc cos } x$



۳) $y = \text{Arctg } x$



۴) $y = \operatorname{Arccot} x$



روابط معکوس مثلثاتی:

۱) $\sin(\operatorname{Arc} \sin x) = \cos(\operatorname{Arc} \cos x) = \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) = \cot(\operatorname{Arc} \cot x) =$

۲) $\operatorname{Arc} \sin(\sin x) = \operatorname{Arc} \cos(\cos x) = \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{Arc} \cot(\cot x) =$

۳) $\operatorname{Arc} \sin(-x) =$

۴) $\operatorname{Arctg}(-x) =$

۵) $\operatorname{Arc} \cos(-x) =$

۶) $\operatorname{Arc} \cot(-x) =$

۷) $\operatorname{Arc} \sin(\cos x) = \operatorname{Arc} \cos(\sin x) =$

۸) $\operatorname{Arctg}(\cot x) = \operatorname{Arc} \cot(\operatorname{tg} x) =$

۹) $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc} \cot x) = \cot(\operatorname{Arctg} x) =$

۱۰) $\sin(\operatorname{Arc} \cos x) = \cos(\operatorname{Arc} \sin x) =$

۱۱) $\operatorname{Arc} \sin x + \operatorname{Arc} \cos x =$

۱۲) $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arc} \cot x =$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$۱۳) \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} =$$

$$۱۴) \operatorname{Arc} \cot x + \operatorname{Arc} \cot \frac{1}{x} =$$

$$۱۵) \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} y =$$

معادلات معکوس مثلثاتی:

$$۱) \operatorname{Arc} \cos \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$۲) \operatorname{Arctg} (1-m) + \operatorname{Arctg} \left(\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \right) =$$

$$۳) \cos \left(\operatorname{Arc} \sin \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} \right) \right) =$$

$$۴) \operatorname{Arc} \sin \left(\cos \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$۵) \operatorname{Arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \operatorname{Arctg} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$۶) \operatorname{Arc} \sin \left(\frac{1}{2} \right) + \operatorname{Arc} \cos \left(\frac{1}{2} \right) =$$

$$۷) \operatorname{tg} \left(\operatorname{Arc} \cot \left(\frac{5}{4} \right) \right) =$$

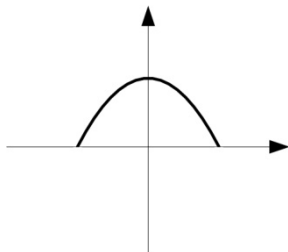
$$۸) \operatorname{Arc} \cos \left(\frac{1}{2} \right) + \operatorname{Arc} \cos \left(-\frac{1}{2} \right) =$$

$$۹) \sin (\operatorname{Arctg} 2) =$$

نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44



تست: شکل مقابل، نمودار کدام تابع است؟

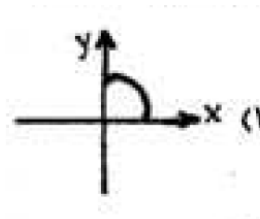
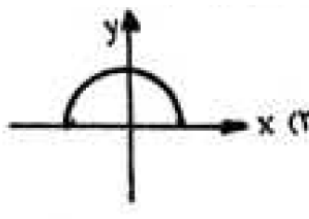
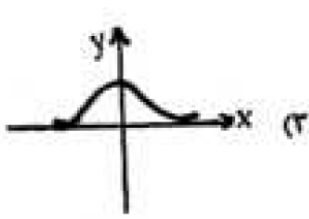
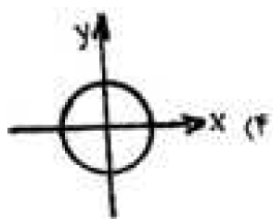
(۲) $y = \text{Arc cos}|x|$

(۱) $y = \text{Arc cos}\sqrt{x}$

(۴) $y = \text{Arc sin}|x|$

(۳) $y = \text{Arc sin}\sqrt{x}$

تست: نمودار تابع $y = \cos(\sin^{-1} x)$ کدام است؟



(۳) تابع درجه ۲

الف) معادله درجه دو: به شکل عمومی $ax^2 + bx + c = 0$ می باشد.

مبین این معادله، $\Delta = b^2 - 4ac$ می باشد و داریم:

- (۱) $\Delta > 0 \rightarrow$
- (۲) $\Delta = 0 \rightarrow$
- (۳) $\Delta < 0 \rightarrow$

نکات مهم:

(۱)

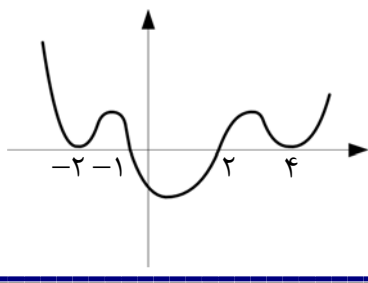
(۲)

(۳)

(۴)

(۵)

مثال: با توجه به شکل معادله $f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟ جمع ریشه های این معادله کدام است؟



درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

روابط بین ریشه های یک معادله ی درجه دوم:

اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله باشند، داریم:

I) $S = x_1 + x_2 =$

II) $P = x_1 \cdot x_2 =$

III) $D = |x_1 - x_2| =$

مثال: معادله ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ مفروض است. مطلوب است:

الف) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$

ب) $x_1^2 + x_2^2 =$

ج) $x_1^2 + x_2^2 =$

د) $\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} =$

ه) $x_1 x_2^2 + x_2^2 x_1 =$

و) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} =$

نکته: اگر ریشه های یک معادله معلوم باشد و بخواهیم معادله ی درجه دوم آن را بنویسیم، داریم:

تست: معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $2 \pm \sqrt{3}$ باشد.

نکات مهم:

-۱

-۲

-۳

-۴

تذکر مهم:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: به ازای کدام مقدار m ، ریشه های معادله ی $x^2 + (m^2 - 25)x + 3m = 0$ قرینه ی یکدیگرند؟

تست: به ازای چه مقادیری از m ، یک ریشه ی معادله ی $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ سه برابر ریشه ی دیگر آن می باشد؟

طریقه ی نوشتن معادله درجه دو در حالت خاص:

معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض است:

(۱) برای معادله ی درجه دومی که ریشه هایش قرینه ی ریشه های معادله ی فوق باشند.

(۲) برای معادله ی درجه دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله ی فوق باشند.

(۳) برای معادله ی درجه دومی که ریشه هایش عکس و قرینه ی ریشه های معادله ی فوق باشند.

تذکر مهم:

مثال: معادله ی $x^2 + 2x - 5 = 0$ مفروض است. معادله ی درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که ریشه هایش با ریشه های این معادله در روابط زیر صدق کند؟

قرینه (الف)

عکس (ب)

نصف (ج)

سه برابر (د)

مربع (ه)

نکته: دو معادله ی درجه ۲ وقتی دارای ریشه مشترک هستند که:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: اگر معادلات $x^2 + mx - 3 = 0$ و $x^2 + nx - 6 = 0$ دارای ریشه ی مشترک باشند، $m + n$ کدام است؟

نکته: شرط آن که معادله ی درجه دوم همواره مثبت یا همواره منفی باشد این است که:

$$\begin{cases} ۱) f > 0 \rightarrow \\ ۲) f < 0 \rightarrow \\ ۳) f \geq 0 \rightarrow \\ ۴) f \leq 0 \rightarrow \end{cases}$$

تست: حدود m برای آن که تابع $y = mx^2 + 2x + 1$ همواره مثبت باشد، چه قدر است؟

تست: در معادله ی درجه دوم $x^2 - 2x - 3 = 0$ حاصل $\frac{x_1^2 - 3}{x_1} + \frac{2x_2}{x_2^2 - 3}$ کدام است؟

نکته مهم:

تست: در معادله ی درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$ حاصل $\sqrt{x_1^2 (3x_2 - 1)}$ کدام است؟

اگر α و β ریشه های معادله ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

$$(۱) \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (۲) \quad 4x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۳) \quad 4x^2 - 5x - 1 = 0 \quad (۴) \quad 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

معادلات درجه دوم در حالات خاص:

در معادله ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

۱) $c = 0$

۲) $b = 0$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

۳) $b = c = 0$

۴) $a + b + c = 0$

۵) $a + c = b$

تست: معادله $x^2 - (a-2)x + (a^2 - 4) = 0$ دارای یک ریشه ی صفر است. مقدار a کدام است؟

تست: اگر tga و tgb ریشه های معادله $x^2 + 3x + 4 = 0$ باشد، $tg(a+b)$ کدام است؟

تست: برای آن که ریشه های معادله $x^2 - 2mx - 1 = 0$ بتوانند $\sin$ و $\cos$ یک کمان باشند، حدود m کدام است؟

تست: m را طوری بیابید که بین ریشه های معادله $x^2 - 4x + m = 0$ رابطه $x_1 - 2x_2 = 5$ برقرار باشد؟

تست: m را طوری بیابید که بین ریشه های معادله $x^2 + mx + 27 = 0$ رابطه $\alpha = \beta^2$ برقرار باشد؟

تست: m را طوری بیابید که معادله $mx^2 - (m+1)x - m + 1 = 0$ دارای دو ریشه ی مختلف علامه باشد؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: معادله ی درجه دومی بنویسید که ۱- و ۲ ریشه های آن باشد و از نقطه ی (۱, -۲) بگذرد؟

نکته:

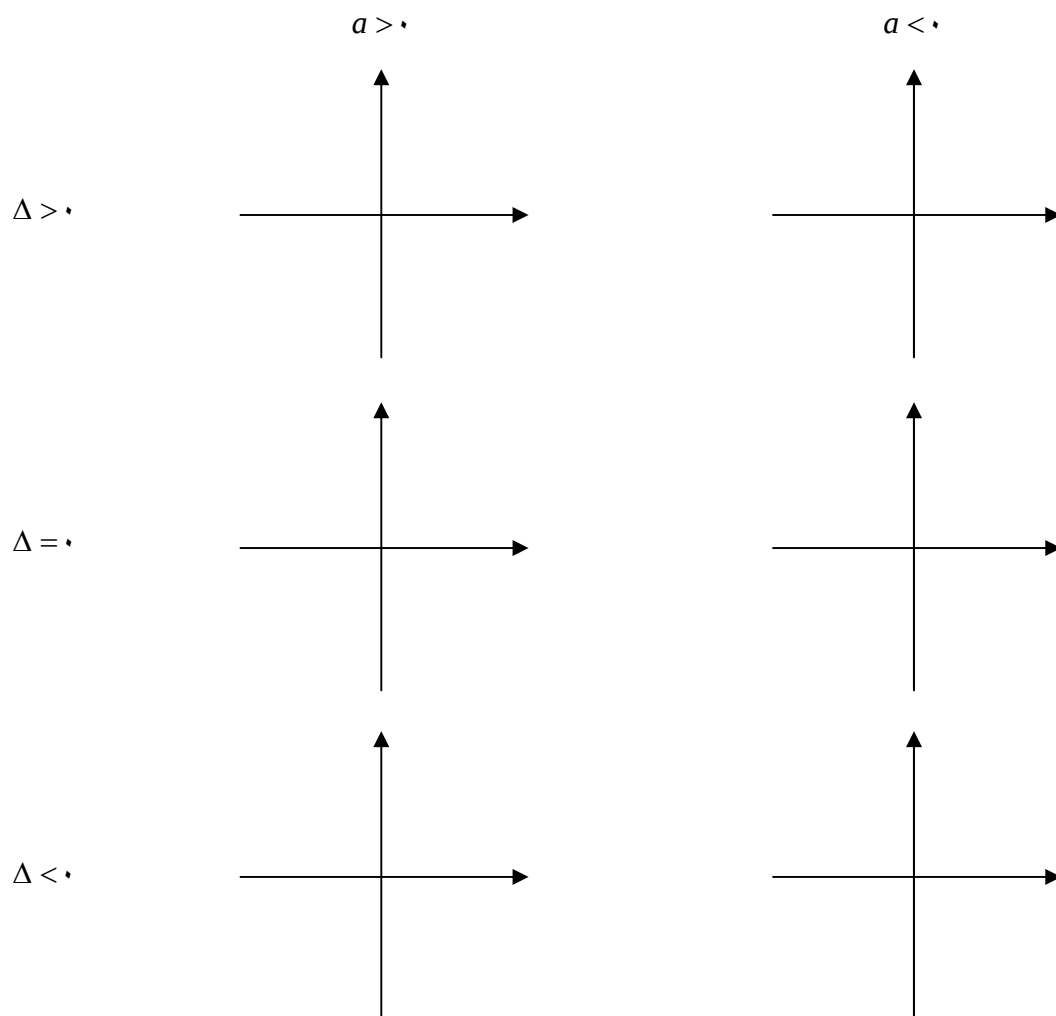
تست: حدود m چه قدر باشد تا نمودار $y = (1-m)x^2 + x + (m-2)$ از چهار ناحیه بگذرد و دارای $\max$ باشد؟

تست: کم ترین مقدار تابع $y = x^2 - mx + 3$ برابر ۲ می باشد. مقدار m کدام است؟

تست: برد تابع $y = 2\sqrt{x} - x$ کدام بازه است؟

مثال: محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه ی طول و عرض این مستطیل کدام است؟

ب) نمودار تابع درجه دوم:



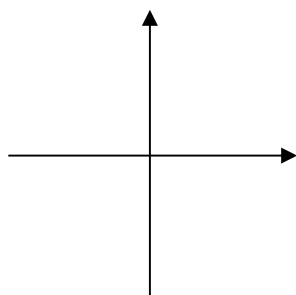
تست: به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ها قرار دارد؟

تست: اگر تابع $y = ax^2 + bx + c$ فقط از ناحیه ی چهارم عبور نکند، آن گاه کدام گزینه درست است؟

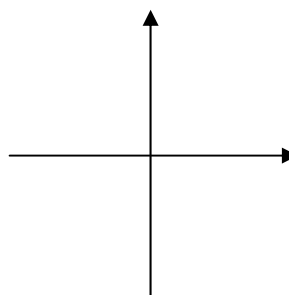
درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

۴) تابع نمایی

به صورت $y = a^x$ می باشد و به شکل زیر است:



$0 < a < 1$



$a > 1$

خواص تابع نمایی:

۱) $a^m \cdot a^n =$

۲) $\frac{a^m}{a^n} =$

۳) $(ab)^m =$

۴) $\left(\frac{a}{b}\right)^m =$

۵) $a^{-n} =$

۶) $(a^n)^m =$

۷) $\sqrt[n]{a^m} =$

۸) $a^{n^m} =$

۹) $k \sqrt[n]{a} =$

۱۰) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} =$

۱۱) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} =$

نکته: اگر در تابعی روابط زیر برقرار بود، تابع نمایی است.

۱) $f(x+y) =$

۲) $f(x-y) =$

تذکر: همواره داریم:

۱) $a^{\cdot} =$

۲) $p > q \rightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > 1 \end{cases}$

تست: تابع $y = (m^2 - 3m - 3)^x$ به ازای چه مقادیری از m صعودی است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: اگر $3^{2k+1} = 6a$ باشد، آنگاه $\frac{k}{3}$ کدام است؟

تست: معادله ی $9^x + 6^x = 2 \times 4^x$ چند جواب دارد؟

در تابع با ضابطه ی $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$. مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

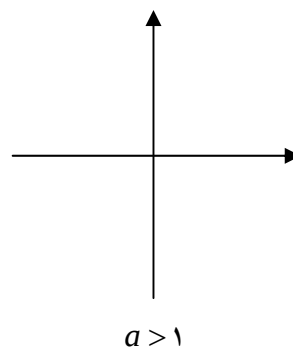
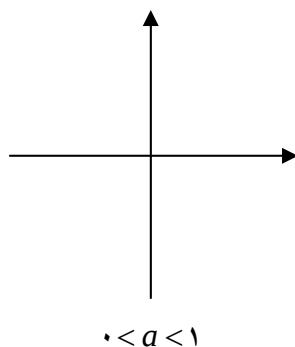
(۵) تابع لگاریتم

به شکل $y = \log_a^x$ بیان می شود و به مفهوم زیر است:

$$\log_b^a = n \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_{\gamma}^{\epsilon} =$$

$$\log_f^{\text{تعميم}} \log_e \log_d \log_c \log_b \log_a^x = n \quad \Leftrightarrow$$



درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری

تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

نکته: لگاریتم برای اعداد منفی وجود ندارد ولی جواب لگاریتم می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد و داریم:

اگر $a, b > 1$ یا $0 < a, b < 1$ ، آن گاه ...

اگر $a > 1$ یا $0 < a < 1$ ، آن گاه ...
یا $0 < b < 1$ یا $b > 1$

نامساوی های لگاریتمی:

$$۱) a > 1 : x > y \Rightarrow$$

$$۲) 0 < a < 1 : x > y \Rightarrow$$

$$۳) \log_a x > 0 \rightarrow$$

$$۴) \log_a x > 1 \rightarrow$$

نکته:

نکته: اگر در تابعی روابط زیر برقرار بود، تابع لگاریتمی است.

$$۱) f(x \times y) =$$

$$۲) f\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$۳) f(x^n) =$$

خواص تابع لگاریتم:

$$۱) \log_a 1 =$$

$$۲) \log_a a =$$

$$۳) \log_a a =$$

$$۴) \log ab =$$

$$۵) \log \frac{a}{b} =$$

$$۶) \log a^n =$$

$$۷) \log_{b^m} a =$$

$$۸) \log_{b^m} a^n =$$

$$۹) \log_b a =$$

$$۱۰) \log_b a =$$

$$۱۱) a^{\log b} =$$

$$۱۲) a^{\log a} =$$

$$۱۳) \log \frac{1}{x} =$$

$$۱۴) \log_b a \cdot \log_c b =$$

$$۱۵) \frac{\log_c a}{\log_c b} =$$

$$۱۶) \ln x =$$

طریقه ی ساده کردن لگاریتم:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

حاصل عبارات زیر را بیابید:

۱) $\log_{\log_7^x} \log_7^x = .$

۲) $\log_{\delta} (\sqrt{12\delta})^2 =$

۳) $\log_{\lambda}^{22} =$

۴) $1000 \cdot \log^2 =$

۵) $x^{\log x} = 10000$

۶) $\log^{tg 1^\circ} \times \log^{tg 2^\circ} \times \dots \times \log^{tg 88^\circ} \times \log^{tg 89^\circ} =$

۷) $[\log 1] + [\log 2] + \dots + [\log 20] =$

تست: اگر $\log^2 = a$ و $\log^3 = b$ ، مطلوب است حاصل:

$\log^{36} =$

$\log^{25} =$

$\log_9^4 =$

نکته: در توابع رادیکالی با فرجه ی زوج داریم:

$f(x) = \sqrt{\log_a^u}$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: دامنه ی عبارت $\sqrt{\log \frac{-4x^2-1}{x}}$ کدام است؟

نکته:

تست: اگر $A = n!$ باشد، مطلوب است:

$$\frac{1}{\log_2^A} + \frac{1}{\log_3^A} + \dots + \frac{1}{\log_n^A}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$$\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2$$

$$5^{\log x} + x^{\log 5} = 5.$$

$$2 \log(x-2) = \log(x+10)$$

نکته: تعداد ارقام یک عدد از رابطه ی زیر به دست می آید:

تست: اگر $\log 2 = 0.301$ باشد، 2^{100} چند رقم دارد؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

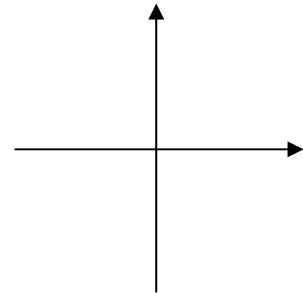
۶) تابع قدرمطلق

تابع قدرمطلق به صورت $y = |x|$ بیان می گردد و به مفهوم زیر است:

۱) $|x - a| =$

۲) $|x| =$

۳) $\max\{x, -x\} =$



تست: حاصل $|1 - \sqrt{2}|$ کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} - 1$ (۳) $\sqrt{2} + 1$ (۴) $-1 - \sqrt{2}$

تست: اگر $a < x < b$ ، حاصل $|x - a| + |x - b|$ کدام است؟

تست: معادله $|\pi^2 - x^2| = \pi^2 - x^2$ چند جواب طبیعی دارد؟

نکته:

تست: معادله $x^2 + |x^2 - 9| = 9$ چند جواب صحیح دارد؟

تست: نمودار تابع $\max\{\sin x, \cos x\}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

تست: اگر $f(x) = \max\{|2x|, |x+1|\}$ ، آنگاه می نیمم تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۲

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

قواعد قدر مطلق:

۱) $\sqrt[k]{x^{rk}} =$

$\sqrt{x^r} =$

نکته:

تست: اگر $x \in (-2, 2)$ حاصل $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

۲) $|x| =$

$\rightarrow |x - y| =$

۳) $x^r = a^r \rightarrow$

$x^r = 4$

تست: معادله $||x - 1| - 2| = 3$ چند جواب دارد؟

۴) $x^r < a^r \rightarrow$

تذکر:

۵) $x^r > a^r \rightarrow$

تذکر:

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید:

۱) $|1 - 2x| < 3$

۲) $|2x - 1| < -2$

۳) $|1 - x| > 3$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

۴) $|x - 1| > -2$

تذکر مهم:

۶) $|x + y|$

نکته:

۷) $|x - y|$

۸) $\leq |x \pm y| \leq$

۹) $|x \cdot y \cdot z \cdots| =$

۱۰) $\left| \frac{x}{y} \right| =$

تست: اگر $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$ باشد کدام گزینه درست است؟

(۱) $|\sin x + \cos x| < |\sin x| + |\cos x|$ (۲) $|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$

(۳) $|\sin x + \cos x| > |\sin x| + |\cos x|$ (۴) هیچکدام

تست: کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) $|\sin x + \cos x| < |\sin x| + |\cos x|$ (۲) $|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$

(۳) $|tgx + cot x| > |tgx| + |cot x|$ (۴) $|tgx + cot x| = |tgx| + |cot x|$

مثال: چند عدد صحیح در تساوی $|2 - x| + |6 + 3x| = |2x + 8|$ صدق می کند؟

نکته:

۱۱) $\leq x \leq \rightarrow \left\{ \right.$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

مثال: مجموعه جواب نامعادله $|2x - 1| > 2x - 1$ کدامست؟

حل معادلات قدرمطلق:

الف) روش تشریحی:

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $2x - |x - 1| = 8$

ب) $|x - 1| + |x + 3| = 5$

ب) روش تستی:

۱) معادلات نوع اول (I):

$$|x - a| + |x - b| = k$$

۲) معادلات نوع دوم (II):

$$|x - a| - |x - b| = k$$

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

۱) $|x - 1| + |x + 3| = 5$

۲) $|x - 1| - |x + 3| = -1$

تست: معادله $|x - 1| + |x + 2| = -3$ چند جواب دارد؟

تست: مجموع دو ریشه $|x - 2| + |x + 4| = 7$ کدام است؟

تست: معادله $|x - 2| + |x + 3| = 5$ چند جواب صحیح دارد؟

تست: حدود a را چنان تعیین کنید که معادله روبرو ۲ ریشه داشته باشد؟

$|x - a| + |x + 1| = 2$

تست: معادله $|2x - 1| - |2x + 3| = -4$ چند جواب دارد؟

نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

نامعادلات قدرمطلق:

$$2x - |x - 1| > 8$$

نکته بسیار مهم:

تست: مجموعه جواب دستگاه روبرو کدام است؟

$$\begin{cases} |x| < 2 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

نکته:

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید:

$$1) |x - 1| - |x + 2| > 0$$

درسنامه تابع – نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری – تماس : 0917 445 71 44

تست: در کدام بازه نمودار تابع $y = x^2$ پایین تر از نمودار $y = |x - 2|$ قرار می گیرد؟

نکته:

تبدیل نامساوی به قدرمطلق:

تست: نامساوی $-1 \leq x \leq 7$ را به قدرمطلق تبدیل کنید؟

تست: اگر دو نامساوی $-5 \leq x \leq 1$ و $|x - \alpha| \leq \beta$ معادل باشند $\alpha + \beta$ کدام است؟

تست: اگر دو نامساوی $|x - 1| \leq 2$ و $A \leq 2x + 3 \leq B$ معادل باشند $A + B$ کدام است؟

تست: رابطه $|2x - 3| < x$ معادل کدام گزینه است؟

$$(1) \quad |x - 2| < 1 \quad (2) \quad |x - 2| > 1 \quad (3) \quad x > 3 \quad (4) \quad x < 3$$

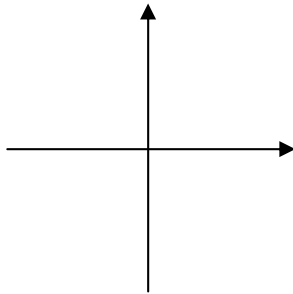
نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

نمودارهای قدرمطلق:

(۱) نمودار نوع اول (I):

$$y = |x - a| + |x - b|$$



نکته:

نکته:

نکته:

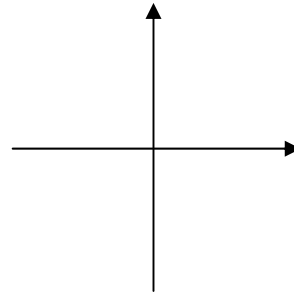
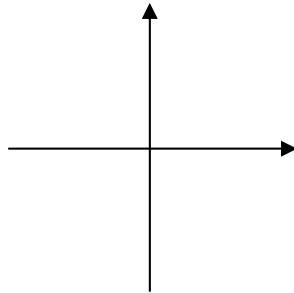
تست: اگر خط $x = -2$ محور تقارن تابع $y = |2x + 1| + |2x + k|$ باشد، k کدام است؟

تست: حدود m چه قدر باشد تا خط $y = m$ نمودار تابع $y = |x - 1| + |x + 2|$ را فقط در دو نقطه قطع کند؟

نکته:

(۲) نمودار نوع دوم (II):

$$y = |x - a| - |x - b|$$



نکته:

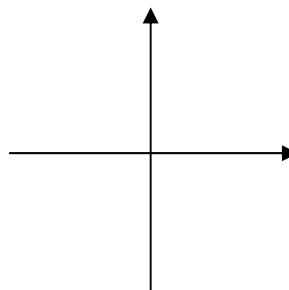
نکته:

تست: خط $y = 2$ نمودار تابع $y = |x - 1| - |x + 1|$ را در چند نقطه قطع می کند؟

(۷) تابع علامت

به صورت $y = \text{sgn}(x)$ بیان می گردد و به مفهوم زیر است:

$$y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$



درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

$$y = \operatorname{sgn}(x^2 - 9)$$

$$y = 2(\operatorname{sgn}(\sin x)) ; [0, 2\pi]$$

تست: معادله $x^2 + x \operatorname{sgn}(x) - 6 = 0$ چند جواب دارد؟

نکته:

۸) تابع جزء صحیح (براکت)

تابع براکت به صورت $y = [x]$ بیان می شود و به مفهوم زیر است:

$$x = n + p \rightarrow$$

$$[2/8] =$$

$$[-3/1] =$$

تذکر: تابع براست (سقف) به صورت زیر تعریف می شود:

$$[2/8] =$$

$$[-3/1] =$$

تست: حاصل $\| [7x] \| - \| [5x] \|$ به ازای $x = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

۳ (۴

۲ (۳

۱ (۲

۰ (۱

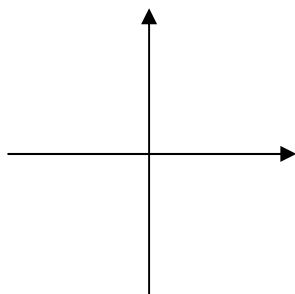
تست: حاصل $\left[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{50} \right] + \left[(\sqrt{2} - \sqrt{3})^{51} \right]$ کدام است؟

نکته:

تست: اگر $198 = (1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6$ باشد حاصل $\left[(1 + \sqrt{2})^6 \right]$ کدام است؟

تست: حاصل عبارت $\left[\cos 1^\circ + 2 \cos 2^\circ + 3 \cos 3^\circ \right]$ کدام است؟

نمودار تابع جزء صحیح:



نکته:

قواعد جزء صحیح:

$$1) [x] = n \rightarrow$$

$$[1 - 2x] = 3$$

تست: معادله $\left[\frac{x}{3} \right] = \frac{x}{2}$ چند جواب صحیح دارد؟

$$[2x - 3] = \frac{1}{3}$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$[x] + [9x] = x + 18$$

$$۲) \quad \leq [x] < \quad \rightarrow \quad \leq x <$$

$$۳) \quad \leq x - [x] < \quad \rightarrow \quad \leq ax - [ax] <$$

$$۴) \quad [x - [x]] = \quad \rightarrow \quad [ax - [ax]] =$$

$$۵) \quad [x + n] = \quad \rightarrow \quad [x - ۲] =$$

تست: حاصل عبارت $\frac{[x - [x - [x]]]}{-۲[x]}$ کدام است؟

تست: اگر $A = ۲x - ۲[x] + ۳$ باشد حدود A کدام است؟

تذکر مهم:

تست: اگر $\left[\frac{۳x+۱}{x}\right] = ۰$ باشد آنگاه حاصل $[-۶x]$ کدام است؟

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$$۱) \quad [x - ۵[x]] - ۳[۳x - [۳x]] = ۰$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$۲) \frac{1}{6} [x + [x + [x]]] - ۲ [\Delta x - [\Delta x]] = \frac{1}{2}$$

$$۳) [x] - [-x] = -۱$$

$$۶) [x + [x + [x + \dots]]] =$$

$$۷) [-x] = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$۸) [x] + [-x] = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست: حاصل عبارت $\left[\frac{2}{x}\right] + \left[-\frac{2}{x}\right]$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

نکته:

تست: مجموعه جواب معادله $[-x + 1] + [x + 2] + [x + 3] = 0$ کدام است؟

تست: دامنه تابع $y = \sqrt{[x] + [-x]}$ کدام است؟

۹) $[nx] =$

$[3x] =$

تست: مجموعه جواب معادله $[2x] - [x] = -1$ کدام است؟

۱۰) $\dots[[[x]]]\dots =$

۱۱) $[x] = [y] = n \rightarrow$

تست: اگر $[x^2 - 10x] = [x^2 - 8x] = 4$ آنگاه $[x^2 - 9x - 3]$ کدام است؟

۱۲) $[x^2] \geq [x] \rightarrow \left\{ \right.$

* $[x^n] = [x] \rightarrow \left\{ \right.$

تست: معادله $[x^3] - [x] = 0$ را حل کنید؟

تست: معادله $[x]^2 - 5[x] + 6 = 0$ را حل کنید؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$۱۳) \begin{cases} [x] > n \rightarrow \\ [x] \geq n \rightarrow \\ [x] \leq n \rightarrow \\ [x] < n \rightarrow \end{cases}$$

مثال: دامنه توابع زیر را به دست آورید:

$$y = \sqrt{[x] - 3}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{[x] - 3}}$$

تست: اگر $D = \{(x, y) \mid [x] + [y] = 1\}$ باشد مساحت ناحیه D کدام است؟

۹) تابع رشد و زوال

پدیده هایی که با گذشت زمان رشد و یا زوال پیدا می کنند، می توان از طریق تابع زیر توصیف نمود که در آن داریم:

P :

t :

α :

نکته:

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: هرگاه مقداری از یک ماده رادیواکتیو پس از سه سال به $\frac{1}{8}$ مقدار اولیه اش برسد، نیمه عمر آن کدام است؟

تعداد باکتری ها در یک نوع کشت، بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است. اگر تعداد این باکتری ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه ی بیستم برابر ۳۲۰۰ باشد، در دقیقه ی سی ام تعداد آن ها کدام است؟

(۱) ۴۸۰۰ (۲) ۵۶۰۰ (۳) ۶۴۰۰ (۴) ۷۲۰۰

(۱۰) تابع ثابت

تابع f را ثابت گوییم هرگاه به ازاء تمام مقادیر دامنه، یک خروجی داشته باشد و به فرم کلی زیر می باشد:

نکات:

(۱)

(۲)

(۳)

(۱۱) تابع همانی

به فرم کلی $y = x$ می باشد و به شکل زیر است:

خواص:

(۱)

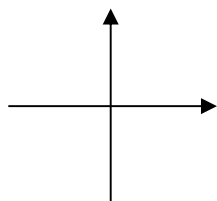
(۲)

(۳)

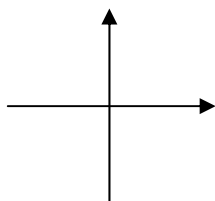
درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

رسم توابع با استفاده از انتقال:

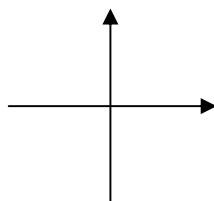
نمودارهای پایه:



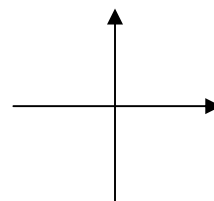
$$y = x$$



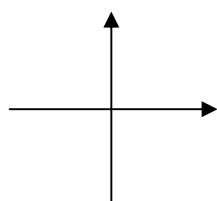
$$y = x^2$$



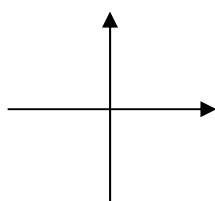
$$y = x^3$$



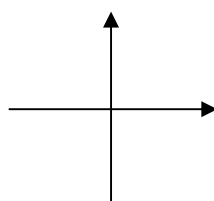
$$y = \sqrt{x}$$



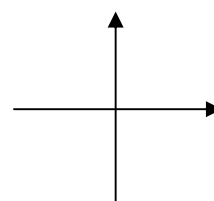
$$y = \sqrt[3]{x}$$



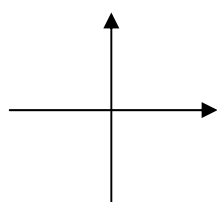
$$y = \frac{1}{x}$$



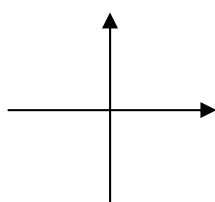
$$y = \frac{1}{x^2}$$



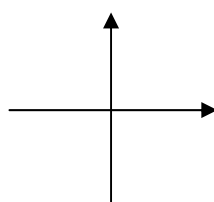
$$y = |x|$$



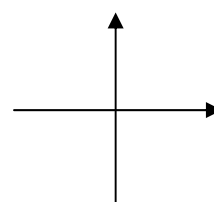
$$y = [x]$$



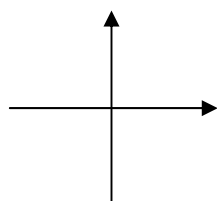
$$y = \sin x$$



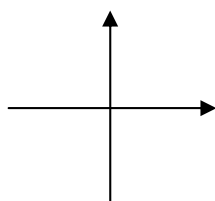
$$y = \cos x$$



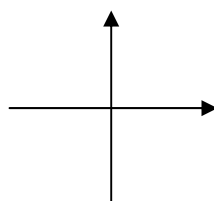
$$y = \operatorname{tg} x$$



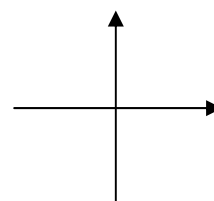
$$y = \cot x$$



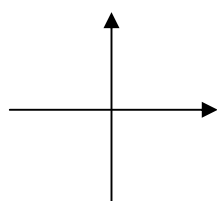
$$y = \operatorname{Arc} \sin x$$



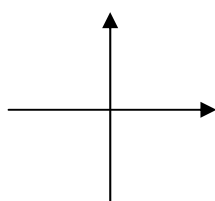
$$y = \operatorname{Arc} \cos x$$



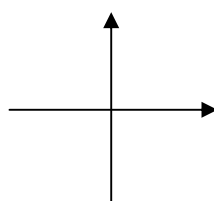
$$y = \operatorname{Arctg} x$$



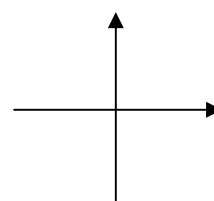
$$y = \operatorname{Arc} \cot x$$



$$y = a^x$$

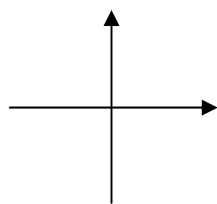


$$y = a^x$$

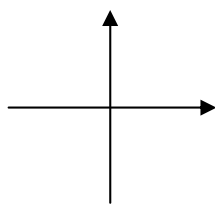


$$y = \log_a x$$

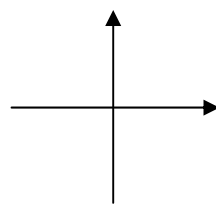
درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44



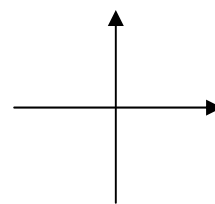
$$y = \log_a^x$$



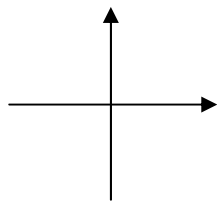
$$y = |x - a| + |x - b|$$



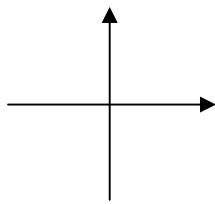
$$y = |x - a| - |x - b|$$



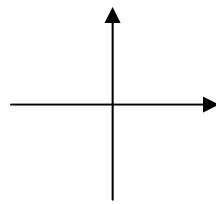
$$|x \pm y| = k$$



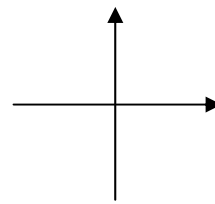
$$|x| + |y| = k$$



$$|x| - |y| = k$$



$$x^2 + y^2 = k^2$$



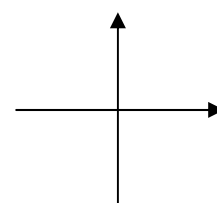
$$x^2 - y^2 = k^2$$

تست: مساحت ایجاد شده توسط روابط زیر را بیابید:

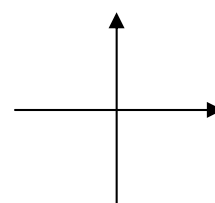
$$[x^2 + y^2] = 1$$

$$[|x| + |y|] = 1$$

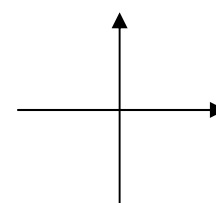
(۱) رسم تابع $f(x) + [x]$:



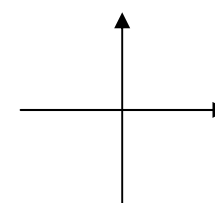
$$y = x + [x]$$



$$y = x^2 + [x]$$

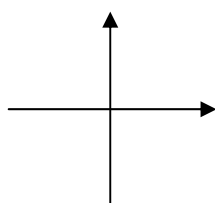


$$y = x^3 + [x]$$

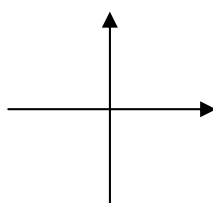


$$y = \sqrt{x} + [x]$$

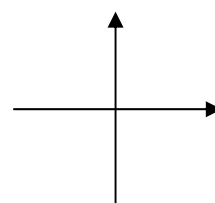
(۲) رسم تابع $f(x) + k$:



$$y = x^2 - 1$$

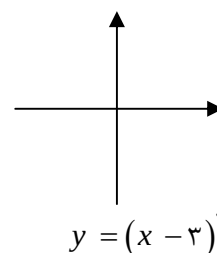
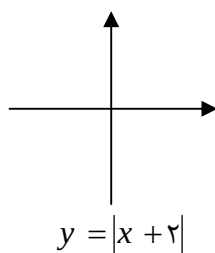
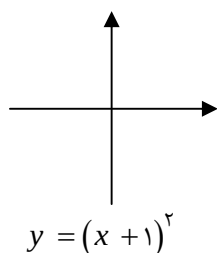


$$y = |x| + 2$$

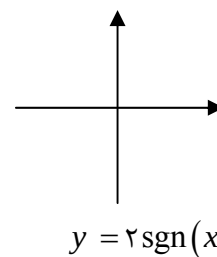
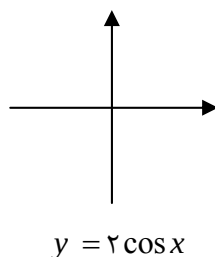
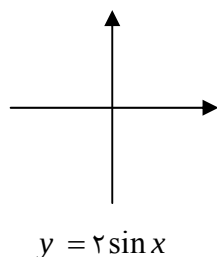


$$y = x^3 + 1$$

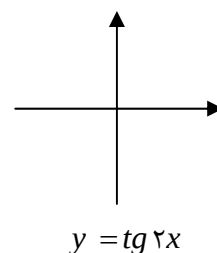
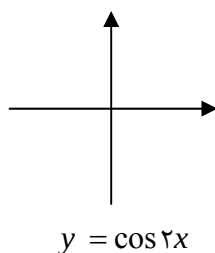
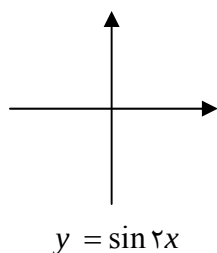
(۳) رسم تابع $f(x+k)$:



(۴) رسم تابع $f(x)$:

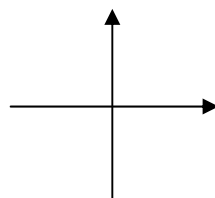
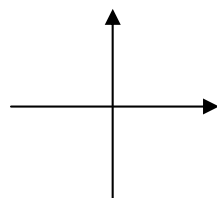
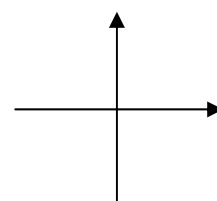
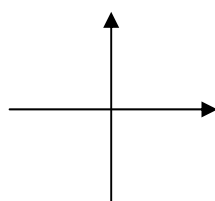
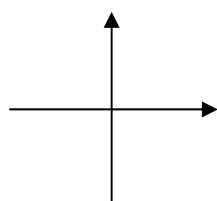


(۵) رسم تابع $f(kx)$:



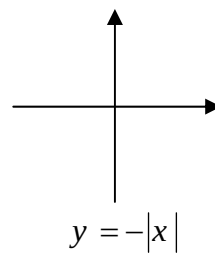
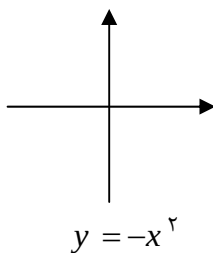
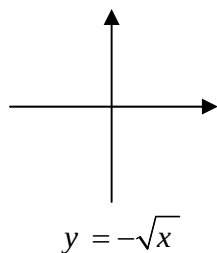
نکته:

تست: نمودار تابع $y = 2 \sin(4x - \pi) + 3$ کدام است؟

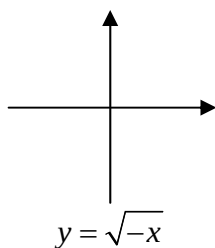


درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

(۶) رسم تابع $-f(x)$:

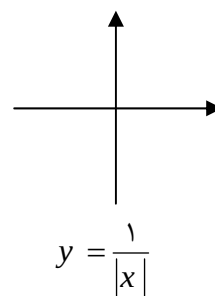
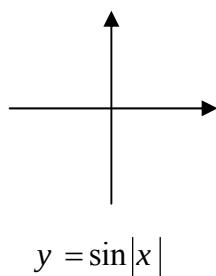


(۷) رسم تابع $f(-x)$:

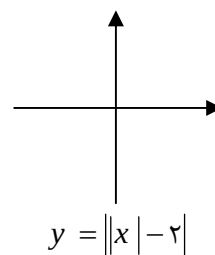
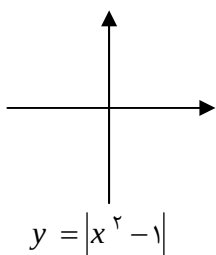


تست: نمودار تابع $y = -\sqrt{-x}$ کدام است؟

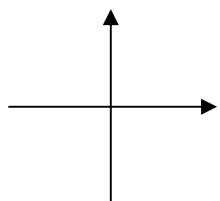
(۸) رسم تابع $f(|x|)$:



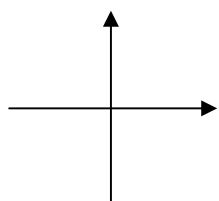
(۹) رسم تابع $|f(x)|$:



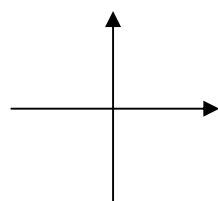
۱۰) رسم تابع $|y| = f(x)$:



$$|y| = \sin x$$



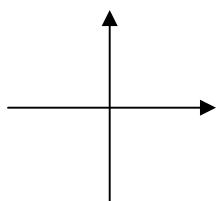
$$|y| = x^3$$



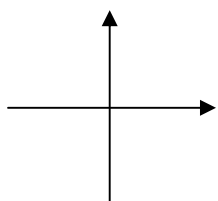
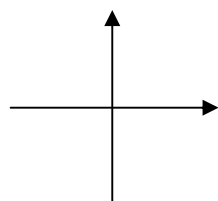
$$|y| = [x]$$

تست: نمودار تابع $y = -e^{|x|}$ کدام است؟

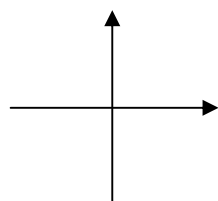
۱۱) رسم تابع $[f(x)]$:

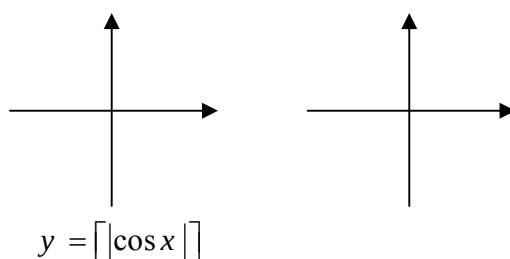


$$y = [\sin x]$$



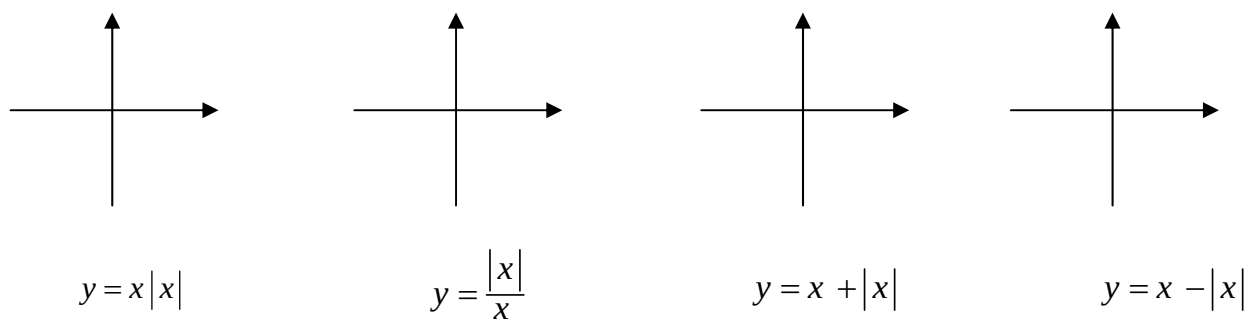
$$y = [\cos x]$$



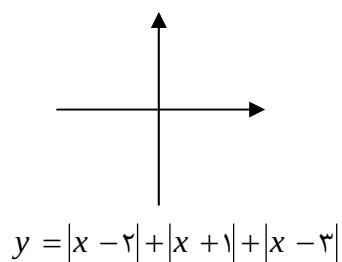


(۱۲) رسم نمودارهای چند قدر مطلق در ضرب و تقسیم:

مثال: نمودارهای زیر را رسم کنید.



(۱۳) رسم نمودارهای چند قدر مطلق در جمع و تفریق:



درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

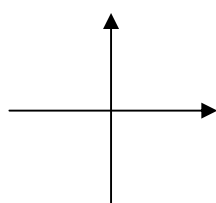
مثال: با توجه به نمودار $f(x)$ در هر قسمت نمودار $|f(x)|$ را رسم کنید:

الف) $f(x) = x^2 - x$

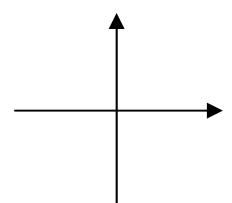
ب) $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$

۱۴) رسم تابع $\sqrt{f(x)}$:

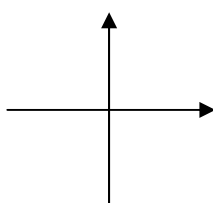
حالت اول:



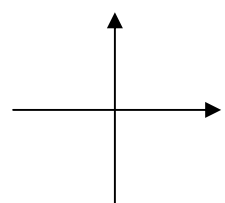
$y = x^2 - 4$



$y = \sqrt{x^2 - 4}$



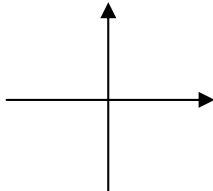
$y = 4 - x^2$

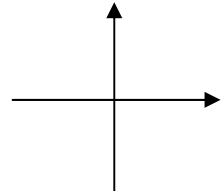


$y = \sqrt{4 - x^2}$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

حالت دوم:


$$y = \sqrt[3]{4 - x^2}$$


$$y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

فصل را با سه بحث تکمیلی به پایان می‌رسانیم:

I) حل معادلات II) بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها III) بسط دوجمله‌ای

I) حل معادلات

به طور کلی سه دسته معادلات وجود دارد:

۱) معادلات گویا (کسری): برای حل این معادلات مراحل زیر را در صورت نیاز به ترتیب انجام دهید:

الف) (ب) (ج)

تذکر مهم:

مثال: مجموعه جواب معادلات زیر کدام است؟

$$۱) \frac{x-3}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$$

$$۲) \frac{2x^2+4}{x+1} = 2x$$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

اگر $x = 2$ یکی از ریشه های معادله ی $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{ax - 1}{x^3 - x}$ باشد، ریشه ی دیگر آن کدام است؟

۲) معادلات گنگ(رادیکالی): برای حل معادلات رادیکالی به ترتیب زیر عمل کنید:

(الف) (ب) (ج)

تذکر مهم:

مثال: معادله $\sqrt{x} + 2 = x$ چند ریشه دارد؟

نکته:

تست: معادله $x^2 - \sqrt{x} = 0$ چند ریشه دارد؟

۳- معادلات جبری- مثلثاتی: برای حل این معادلات کافی است ...

مثال: معادلات زیر چند ریشه دارد؟

۱) $x^2 - \cos x = 0$

۲) $x \sin x = 1$ $[-2\pi, 2\pi]$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

$$۳) 2^x = x^2$$

$$۴) \log |x| = |\sin x|$$

II) بخش پذیری چند جمله ای ها

در تقسیم تابع $f(x)$ (مقسوم) بر تابع $g(x)$ (مقسوم علیه) یک خارج قسمت مانند $Q(x)$ و یک باقی مانده مانند $R(x)$ وجود دارد بطوری که:

$$\begin{array}{l} f(x) \\ \overline{Q(x)} \\ R(x) \end{array} \Leftrightarrow f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

نکته: برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $ax + b$ کافی است:

تست: باقی مانده تقسیم $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ بر $x - 2$ کدام است؟

تست: اگر باقی مانده تقسیم $x^2 - x + 1$ بر $(2m - 1)x - 1$ برابر ۳ باشد، m کدام است؟

تست: به ازای چه مقدار m و n عبارت $mx^4 + (n - 2)x + 2$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

نکته: اگر باقی مانده $p(x)$ بر $x-a$ برابر r_1 و بر $x-b$ برابر r_2 باشد در این صورت، باقی مانده $p(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر است با ...

تست: هرگاه باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x+1$ به ترتیب، ۵ و ۱ باشد باقی مانده تقسیم آن بر x^2-1 کدام است؟

- (۱) $x+2$ (۲) $x+4$ (۳) $3x+2$ (۴) $2x+3$

نکته:

تست: اگر $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ بر $(x-1)^3$ بخش پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

نکته:

تست: باقی مانده تقسیم $x^{10}-1$ بر x^2+2x+4 کدام است؟

نکته:

تست: باقی مانده تقسیم $x^4+x^3-3x^2+x+1$ بر x^2+2 کدام است؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: حاصل عبارت $(x^8 + x^7 + \dots + 1)(x^8 - x^7 + \dots + 1)$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست آورید؟

نکته:

III) بسط دوجمله ای:

به فرم کلی $(a+b)^n$ می باشد و داریم:

$$(a+b)^1 =$$

$$(a+b)^2 =$$

$$(a+b)^3 =$$

:

$$(a+b)^n =$$

ویژگی ها:

-۱

-۲

-۳

-۴

-۵

-۶

-۷

-۸

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: a و b چه قدر باشد تا جمله چهارم بسط $(ax + x^b)^y$ برابر $70x^{10}$ باشد؟

تست: اگر مجموع ضرایب بسط $(a+b)^n$ از مجموع ضرایب بسط $(x^3 + 2x - 2)^{100}$ به اندازه ۳۱ واحد بیشتر باشد، تعداد جملات بسط $(a+b)^n$ کدام است؟

تست: اگر نسبت ضریب جمله چهارم به ضریب جمله سوم در بسط $(x+y)^n$ برابر $\frac{10}{3}$ باشد، مقدار n کدام است؟

تست: چند عدد گویا در بین جملات بسط $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{5})^{40}$ وجود دارد؟

تست: در بسط دوجمله ای $\left(x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^y$ جمله مستقل از x و مقدار آن به ترتیب کدام است؟

تست: اگر در بسط $(x+y)^{5n+3}$ جمله دهم بزرگ ترین ضریب را داشته باشد، n کدام است؟

نکته:

-۱

-۲

-۳

-۴

-۵

تست: اگر $(2 + \sqrt{3})^n = 362 + b\sqrt{3}$ باشد آنگاه $(2 - \sqrt{3})^n = 362 - b\sqrt{3}$ برقرار است؟ در صورت برقراری b کدام است؟

نکته:

تست: کشاورزی می خواهد ۱۴۴ پرتقال، سیب و ۷۲ انار را در جعبه هایی قرار دهد. اگر کشاورز بخواهد تعداد میوه های هر جعبه یکسان باشد حداقل به چند جعبه نیاز است؟

تست: آب استخری توسط سه شیر بزرگ تأمین می شود. شیر اول به تنهایی در ۳ ساعت، شیر دوم در ۴ ساعت و هر سه شیر با هم در $\frac{4}{3}$ ساعت استخر را پر از آب می کنند. شیر سوم به تنهایی در چند ساعت استخر را پر از آب می کند؟

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = -3x$ باشد، کدام یک از توابع زیر نزولی است؟

- (۱) $f \circ f$ (۲) $g \circ g$ (۳) $f \circ g$ (۴) $f \circ f \circ f$

نکته:

تست: اگر $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ باشد نمودار $y = f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟

تست: اگر $x^2 + x < 0$ باشد حاصل $[x] + [x^2] + \dots + [x^{20}]$ کدام است؟

تست: معادله $x - |x| = [x] + 1$ چند ریشه دارد؟

تست: مساحت ایجاد شده توسط تابع $y = (-1)^{[x]}(x - [x])$ در بازه $[0, 10]$ کدام است؟

تست: تابع $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه ای وارون پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۲) $\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$ (۳) $\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$ (۴) $\frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$

درسنامه تابع - نویسنده : مهندس صادق طاهری
تماس : صادق طاهری - تماس : 0917 445 71 44

تست: معادله $\left| \begin{matrix} \log(6x-1) & \log(1-x) \\ \log(1-x) & \log(6x-1) \end{matrix} \right| = 0$ چند جواب دارد؟

تست: کدام یک از توابع زیر یک به یک نیست؟

(۱) $y = x - \sqrt{x}$ (۲) $y = x + [x]$ (۳) $y = 2x + |x+1|$ (۴) $y = \ln(\ln \sin x)$

تست: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+2}{x-2} \leq \frac{x}{x+2}$ کدام است؟

نکته:

تست: نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه $x \in (-2, 2)$ ، از چند پاره خط تشکیل شده است؟

تست: شکل روبرو، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه ی تابع $\sqrt{x}f(x)$ ، کدام است؟

(۱) $[0, 2]$ (۲) $[-3, 2]$
(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$ (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

