

ریاضی کنکور

پایه دوازدهم (ویژه امتحان نهایی و کنکور)

مهندس صادق طاهری

حد و پیوستگی

استاد برتر کنکور

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

تنظیم : مهندس صادق طاهری

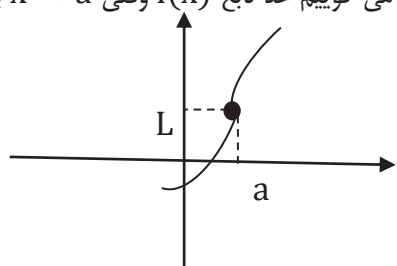
www.konkurtnt.com

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

حد

تعریف حد: فرض کنید تابع f در یک همسایگی یا همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد. آنگاه زمانی که متغیر x با مقادیر بیشتر یا کمتر از a به عدد a نزدیک می شود ($x \rightarrow a$) پس $f(x)$ به عدد منحصر به فرد L نزدیک می شود و می گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ برابر L است. به عبارتی

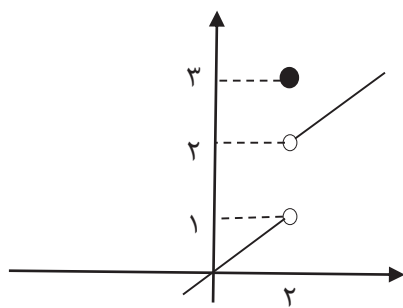
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



نکته (۱) حد تابع در $x = a$ با مقدار تابع در این نقطه ارتباطی ندارد.

نکته (۲) لزومی ندارد تابع در آن نقطه که حد را محاسبه می کنیم تعریف شده باشد.

مثال) با توجه به نمودار $y = f(x)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ کدام است؟



قضایای حد:

(۱) حد یک تابع در صورت وجود، منحصر به فرد است.

(۲) اگر $p(x)$ یک چند جمله ای باشد، $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$

(۳) اگر $f(x) = b^x$ یک تابع نمایی باشد آنگاه، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b^a$

(۴) اگر x برحسب رادیان باشد آنگاه،

الف) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad \left(a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$

د) $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

(۵) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = cL$; $(c \in \mathbb{R})$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$; $(n \in \mathbb{N})$

د) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$; $(L \neq 0)$

ه) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L} & ; n \text{ فرد} \\ \sqrt[n]{L} & ; n \text{ زوج} \rightarrow (L \geq 0) \end{cases}$

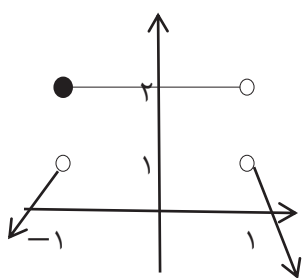
(۶) فرض کنید a عدد حقیقی باشد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ باشد آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \times L_2$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$; $(L_2 \neq 0)$

تست) اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\sin x) + \lim_{x \rightarrow \pi} f(\cos x)$ کدام است؟



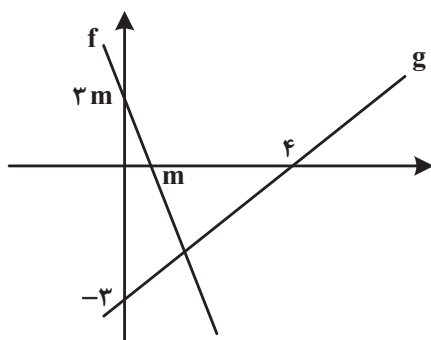
(۴) موجود نیست

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۰

- شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



(۱) -۳

(۲) ۳

(۳) -۴

(۴) ۴

(تست) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b & x > 2 \\ \sqrt{x + b + 1} & x \leq 2 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۳۲ (۴)

۳۱ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

چون حد f در $x = 2$ موجود است باید حد چپ = حد راست باشد و با حد تابع f در $x = 2$ برابر باشد.

(تجربی ۸۰) به ازای کدام مقادیر a تابع $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد؟

هیچ مقدار (۴)

هرمقدار (۳)

۰ (۲)

۱ (۱)

(ریاضی ۸۹) اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{x+1} & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟

موجود نیست (۴)

۱ (۳)

۰ (۲)

-۱ (۱)

محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح:

برای محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق: ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم و با حذف قدرمطلق، حاصل حد را محاسبه می کنیم.

(مثال)

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{6}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

(تست) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - [x]}{2|x| + [x]}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$:

اگر در $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ حاصل $\frac{0}{0}$ شود، دیگر نمی توانیم با قضایا حد که مطرح کردیم حد را محاسبه کنیم.

(اصطلاحاً می گوییم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ به وجود آمده و باید رفع ابهام شود.)

روش های رفع ابهام $\frac{0}{0}$:

حالت ۱) حذف عامل صفر شونده از صورت و مخرج: در این حالت با حذف عامل صفر شونده از صورت و مخرج حد را محاسبه می کنیم.

(عامل صفر شونده به صورت $(x - a)$ یا $\sqrt{x - a}$ و... است.)

مثال) حاصل حد های زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9} = \lim$

2) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{x - 8} =$

نکته: حد یک چند جمله ای وقتی $x \rightarrow 0$ برابر حد جمله با کوچکترین درجه در چند جمله ای است. (هم ارزی کوچکترین توان)

$x^4 + 3x^3 + 7x \sim 7x \quad (x \rightarrow 0)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 5x^3 + x}{x^4 - 3x^3 + 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{7x} = \frac{1}{7}$

نکته: در برخی موارد با انتقال حد به نقطه صفر می توانیم سؤال را راحت تر حل کنیم.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+t)}{g(a+t)}$

$x - a = t \rightarrow x = a + t$

$x \rightarrow a \quad t \rightarrow 0$

حالت ۲) قاعده هسپیتال: در حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ که حالت $\frac{0}{0}$ رخ داده اگر توابع g و f مشتق پذیر باشند داریم:

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

این قاعده را تا زمانی اجرا می کنیم که حد از حالت $\frac{0}{0}$ خارج شود.

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^2 + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0}$$

نکته: در حد هایی که به صورت $\frac{0}{0}$ اند، اگر عاملی وجود داشته باشد که در $\frac{0}{0}$ نقشی نداشته باشد، باید حد آن عبارت را جدا کنیم.

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)x^2}{\sqrt{x-1}(x^2 - x - 2)} = \frac{25}{\sqrt{4}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{25}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{25}{2} \left(\frac{1}{9} \right) = \frac{25}{108}$$

حالت ۳) روش هم ارزی

$$۱) \sin^m u \sim u^m \quad (u \rightarrow 0)$$

$$۲) \tan^m u \sim u^m \quad (u \rightarrow 0)$$

$$۳) 1 - \cos^m u \sim \frac{mu^2}{2} \quad (u \rightarrow 0)$$

$$4) \sqrt[m]{1 \pm u} \sim 1 \pm \frac{u}{m}$$

$$5) (1 \pm u)^m \sim 1 + mu$$

مثال)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^3 x - \tan^3 x}{2x^3 + x^4} = \quad .$$

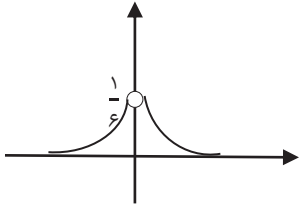
$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[4]{1+2x}}{x^2 + 3x} = \quad .$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \quad .$$

نکته: در رفع ابهام حد های $\frac{0}{0}$ اگر با قدرمطلق و براکت مواجه شویم، باید قدرمطلق را در مجاورت $x = a$ تعیین علامت کنیم و اگر براکت بود، براکت را در آن نقطه تعیین علامت کنیم.

(مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{[x]|x| - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+}$$



(مثال) در شکل روبرو نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{x^2+9}-a}{bx^2}$ داده شده است. حاصل $a^2 + b^3$ کدام است؟

=

(تست) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$ کدام است؟

$$\frac{3}{8} (4)$$

$$\frac{21}{2} (3)$$

$$\frac{21}{8} (2)$$

$$\frac{9}{8} (1)$$

=

(ریاضی ۹۰) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ کدام است؟

$$2 (4)$$

$$1 (3)$$

$$-1 (2)$$

$$-2 (1)$$

مهندس صادق طاهری

استاد برتر کنکور

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

تجربی خارج ۹۶) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{3}$ باشد آنگاه b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

(تست) حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+\sqrt[3]{x})(2x^2+x-1)}{(x+1)^2}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۱

(تجربی ۹۰) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۲ (۴) ۴

(ریاضی ۸۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 2x}}{1 - \cos x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

مهندس صادق طاهری
استاد برتر کنکور

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

(تست) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + [-\sin^2 x]}{\sin^2 x + [\sin^2 x]}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ∞

' - مقدار غیر صفر حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2b}{ax-b}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{48}$ (۴) $\frac{1}{24}$

(ریاضی ۹۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) -2π (۲) π (۳) $-\pi$ (۴) 2π

(ریاضی ۹۳) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

مهندس صادق طاهری
استاد برتر کنکور

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

(ریاضی ۹۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) 3 (۳) 0 (۴) حد ندارد

* نکته: $\lim_{x \rightarrow 0} [2x] + [-2x] = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2}}{1 - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)}{-\frac{x^2}{2}} = -3$$

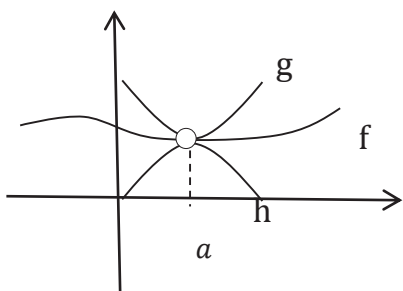
(تست) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot^2 x}{(2x - \pi)^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) ∞ (۴) 0

قضیه فشردگی (ساندویچ):

هرگاه به ازای هر x در بازه ای شامل a (به جز احتمالاً در خود a) $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ و نیز $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{آنگاه:}$$



قضیه کران داری:

$$(\infty) \times (\text{عبارت کران دار}) = \infty$$

(تست) اگر تابع f در نامساوی $|3f(x) + \cos x + 1| \leq \frac{x^2}{1 + \cos x}$ صدق کند، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} (1) \quad -\frac{2}{3} (2) \quad -\frac{2}{3} (3) \quad \frac{2}{3} (4)$$

$$-\frac{x^2}{1 + \cos x} \leq 3f(x) + \cos x + 1 \leq \frac{x^2}{1 + \cos x}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + \cos x} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 3f(x) + \cos x + 1 = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = -\frac{3}{2}$$

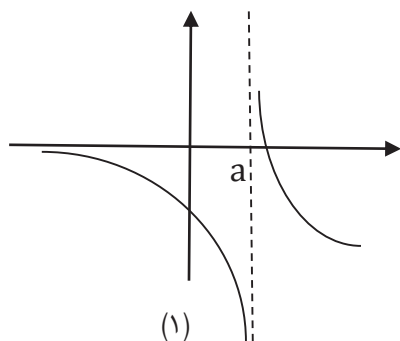
(تست) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(\frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right)$ کدام است؟

$$0 (1) \quad 1 (2) \quad 2 (3) \quad \text{حد ندارد} (4)$$

حد بی نهایت:

اگر در تابع $y = f(x)$ که در بازه I تعریف شده است، نقطه a به گونه ای باشد که بتوان از داخل بازه I به a نزدیک شد و با نزدیک شدن متغیر x به a ، مقادیر $f(x)$ بزرگ شوند، به طوری که $f(x)$ بتواند از هر عدد از پیش داده شده ای بزرگتر باشد، در این صورت می گوییم با نزدیک شدن x به a ، $f(x)$ به سمت $+\infty$ می رود و داریم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

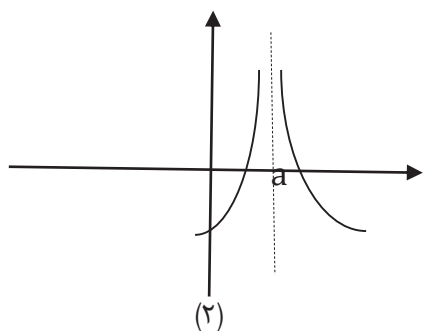
انفصال ساده:



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

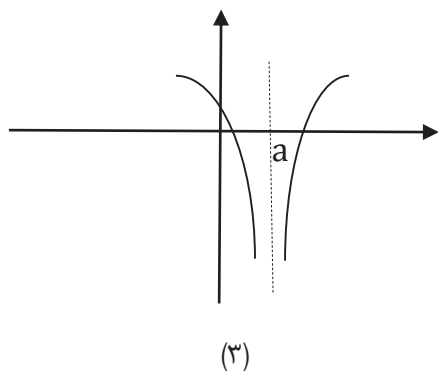
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

انفصال مضاعف:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

انفصال مضاعف:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

به طور خلاصه: $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$, $\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$, $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$, $\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\sin x]}{x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

معرفی چند ویژگی: (k عدد ثابت و $k > 0$)

$$۱) +\infty + \infty = +\infty$$

$$۲) -\infty - \infty = -\infty$$

$$۳) \frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$$

$$۴) (\pm\infty)^{\pm} = +\infty$$

$$۵) (\pm\infty)^{\text{فرد}} = \pm\infty$$

$$۶) \frac{k}{\pm\infty} = 0^\pm$$

$$۷) (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$۸) (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$۹) (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

$$۱۰) k \pm \infty = \pm\infty$$

$$۱۱) k \times (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$۱۲) \frac{0^\circ \text{ مطلق}}{0^\circ \text{ حدی}} = 0^\circ$$

$$۱۳) \frac{0^\circ \text{ مطلق}}{k} = 0^\circ$$

$$۱۴) \frac{0^\circ \text{ مطلق} - 0^\circ \text{ حدی}}{\pm\infty} = 0^\circ$$

$$۱۵) \frac{\infty}{0^\circ \text{ حدی}} = \infty$$

$$۱۶) \frac{0^\circ \text{ حدی}}{0^\circ \text{ حدی}} = \text{مبهم}$$

$$۱۷) (\infty \times \infty) = \text{مبهم}$$

$$۱۸) (\infty \times \infty) = \infty$$

$$۱۹) \infty - \infty = \text{مبهم}$$

$$۲۰) \frac{\infty}{\infty} = \text{مبهم}$$

نکته: به طور کلی اگر مخرج ∞ مطلق شود، عبارت تعریف نشده می شود و حد قابل بحث نیست.

$$\frac{k}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{\infty} = \text{ت ن} \quad \frac{\infty}{\infty} = \text{ت ن} \quad \frac{\infty}{\infty} = \text{ت ن}$$

نکته: اگر f تابعی متناوب باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ موجود نیست. مانند:

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = \text{موجود نیست}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x = \text{موجود نیست}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} x - [x] = \text{موجود نیست}$$

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]} = \frac{\infty}{-1} = \infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[\sin x]} = \frac{\infty}{\infty} = \text{ت ن}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \frac{0}{\infty} = 0$$

حد در بی نهایت ($x \rightarrow \pm\infty$)

در تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است و با بزرگ شدن متغیر x (به شرط آن که x به اندازه کافی بزرگ شود) مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک می شود. در این حالت خواهیم داشت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

حال اگر تابع $y = f(x)$ روی بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، و با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی (به شرط آن که x به اندازه کافی کوچک شود) مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک می شود. در این حالت می گوییم: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

نکته: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$ باید به علامت a ($a \neq 0$) و زوج و فرد بودن n دقت کنیم.

نکته: هم ارزی پرتوان:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

ابهام $\frac{\infty}{\infty}$:

برای محاسبه حد $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن f و g دو تابع چند جمله ای اند، وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \frac{\pm\infty}{a} & n > m \\ \frac{a}{a'} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

(مثال)

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^7 + 6x - ۱}{3x^7 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + 3x - ۱}{x^7 + 5x^7} = \lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 5x - ۱}{x^6 + 5x^7 - ۱} = \lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = 0 \times \infty \quad \text{ابهام } 0 \times \infty :$$

برای رفع ابهام باید عاملی که صفر شده را در صورت و عاملی که ∞ شده را معکوس کرده و به مخرج ببریم تا به ابهام $\frac{0}{0}$ تبدیل شود و سپس آن را حل می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \tan \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\cot \left(\frac{\pi}{2} x \right)} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2} x \right)} = \frac{-2}{\pi}$$

$$\text{ابهام } \infty - \infty :$$

برای رفع ابهام؛ اگر توابع از نوع کسری باشند ابتدا مخرج مشترک بگیرید تا به ابهام $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل شود، اما اگر از نوع رادیکالی باشد از اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر و یا هم ارزی نیوتن استفاده می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| & n \text{ زوج } (a > 0) \\ \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right) & n \text{ فرد} \end{cases}$$

هم ارزی نیوتن

مثال) حاصل حد های زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right) \xrightarrow{\infty - \infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1 - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + 1} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 6} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x + 2| - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - x = 2$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] \cot x = [0^+] \cot(0^+) = (0 \text{ مطلق}) \times (+\infty) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^2 - bx^{m-2}}{x^m - 3x + 1} = -1 \quad \text{اگر } b \text{ مقدار کدام است؟ (تست)}$$

هیچ کدام (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۱ یا ۳ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cot x \quad \text{حاصل (۹۴ خارج) کدام است؟}$$

حد ندارد (۴)

۱ (۳)

۰ (۲)

-۱ (۱)

(تجربی ۹۴) در تابع $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) ۵

=

مهندس صادق طاهری
استاد برتر کنکور

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

پیوستگی:

تعریف: تابع f که روی بازه I تعریف شده است را، در نقطه a از دامنه اش پیوسته گویند هرگاه:

(۱) تابع در $x = a$ حد داشته باشد

(۲) حد تابع در $x = a$ با مقدار تلبه در a برابر باشد. یعنی: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

بنابراین هرگاه تابعی روی بازه I تعریف شده باشد و یک نقطه آن، حداقل یکی از شروط بالا را نداشته باشد، در آن نقطه در بازه I ناپیوسته است.

(تست) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x+2)[x]^2 & x < 2 \\ 2b-x & x = 2 \\ x+1+a & x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

(ریاضی خارج ۹۰) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) هیچ مقداری

(تجربی ۹۰) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 1$ پیوسته است؟

(۱) هر مقدار a (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) هیچ مقدار a

مهندس صادق طاهری
استاد برتر کنکور

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

(تجربی ۹۳) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

(۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

(تجربی خارج ۹۳) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} & \pi < x \leq 2\pi \\ a \cos \frac{2}{3}x & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه ای به طول $x = \pi$ پیوسته است؟

(۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

(تجربی ۹۵) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقداری

مهندس صادق طاهری
استاد برتر گلور

۰۹۱۷۴۴۵۷۱۴۴

(ریاضی خارج ۹۴) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x-3} & x > 3 \\ (ax - 3a - \frac{3}{a}) & x \leq 3 \end{cases}$ پیوسته است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) هر مقدار a (۴) هیچ مقدار a

(تجربی ۹۶) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ پیوسته است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^3 + ((m-7)x + a)^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{5\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

نکات به روش صادق طاهری RST